3-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

فيما سبق:

درست كيفية استعمال المتطابقات لإيجاد قيم العبارات المثلثية وتبسيطها.
(الدرس1 – 3)

والآن:

- أثبت صحة المتطابقة المثلثية بتحويل أحد طرفيها إلى الآخر.
- أثبت صحة المتطابقة المثلثية بتحويل كلا طرفيها إلى العبارة نفسها.

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

3-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

لماذا؟

عندما ركض عبدالله في مسار دائري نصف قطره R، لاحظ أن جسمه لا يكون عموديًّا على الأرض، بل يميل عن الخط العمودي بزاوية حادّة غير سالبة هي θ

تُسمى زاوية الميل، ويمكن وصفها بالمعادلة: $\tan\theta = \frac{v^2}{gR}$ ، حيث g تسارع الجاذبية الأرضية، و v سرعة العداء.

كما توجد معادلات أخرى يمكن أن تصف زاوية الميل بدلالة دوال مثلثية أخرى، كالمعادلة: $\sin\theta = \frac{v^2}{gR}\cos\theta$ ، حيث $0° < \theta < 90°$.

هل تختلف هاتان المعادلتان كليًّا عن بعضهما بعضًا، أم أنهما صيغتان للعلاقة نفسها؟

تحويل احد طرفي المتطابقة : يمكن استعمال المتطابقات المثلثية الاساسية بالإضافة إلى تعريف الدوال المثلثية لإثبات صحّة المتطابقات. وجدير بالذكر أن إثبات صحة المتطابقة المثلثية، يعني إثبات صحتها لقيم θ جميعها.

مفهوم أساسي

إثبات صحة متطابقة من خلال تحويل أحد طرفيها

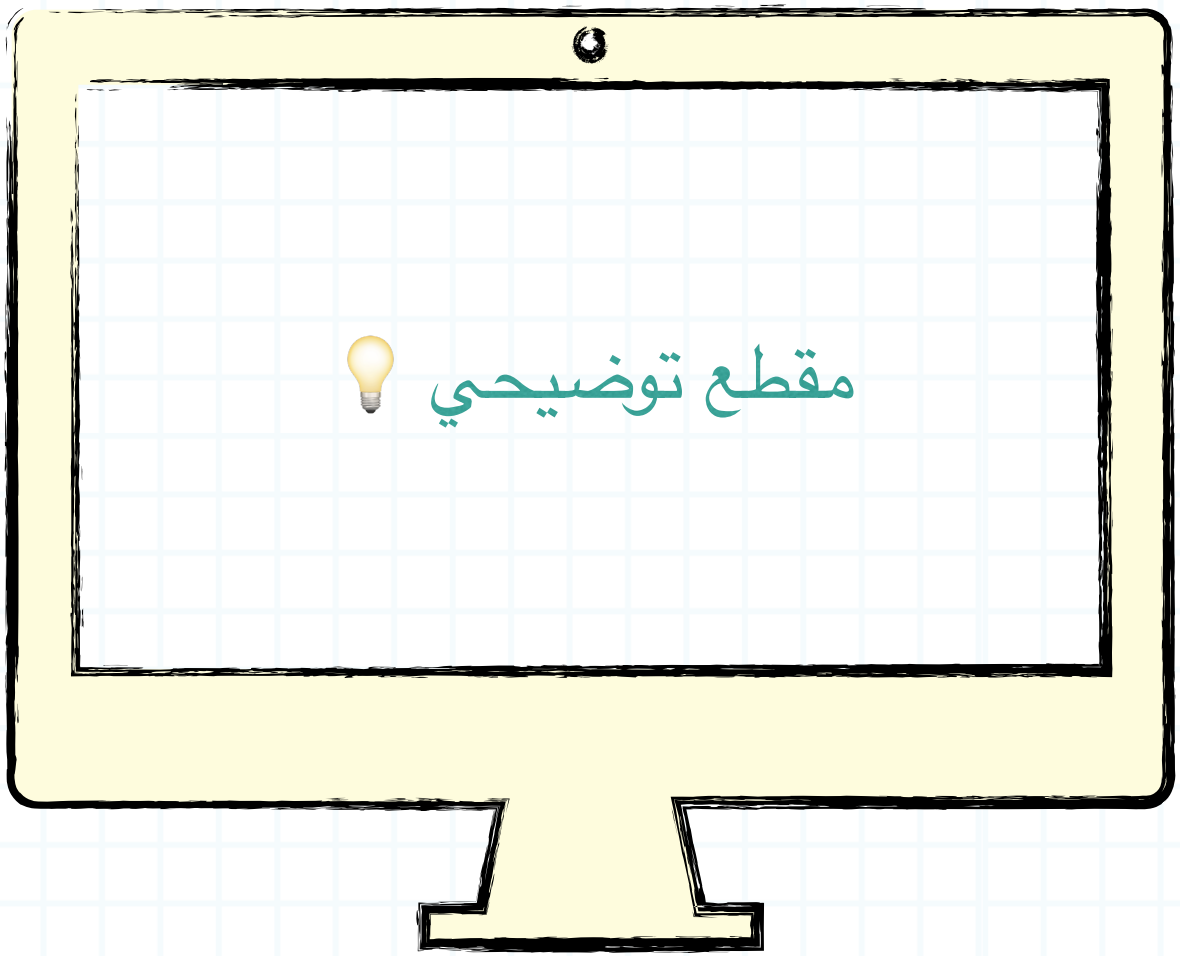
بسّط أحد طرفي المتطابقة حتى يصبح الطرفان متساويين. وفي العادة يكون من الأسهل البدء بالطرف الأكثر تعقيدًا.

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

3-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

إثبات صحة متطابقة من خلال تحويل أحد طرفيها



@Hudali_math

3-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

مثال 1 إثبات صحة المتطابقة من خلال تحويل أحد طرفيها

أثبت صحة المتطابقة $\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta} = 1+\cos\theta$

$\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$	الطرف الأيسر
$= \frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta} \cdot \frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}$	اضرب كلًا من البسط والمقام في $1+\cos\theta$
$= \frac{\sin^2\theta(1+\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$	$(1+\cos\theta)(1-\cos\theta) = 1-\cos^2\theta$
$= \frac{\sin^2\theta\,(1+\cos\theta)}{\sin^2\theta}$	$\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$
$= 1+\cos\theta$ ✓	اقسم كلًا من البسط والمقام على $\sin^2\theta$
= الطرف الأيمن	

إرشادات للدراسة

إثبات صحة متطابقة

توجد حلول أخرى لإثبات أن الطرف الأيسر يساوي الطرف الأيمن في المثال رقم (1).

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

3-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

تحقق من فهمك

1) $\cot^2\theta - \cos^2\theta = \cot^2\theta\cos^2\theta$.

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

3-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

تدرب وحل المسائل

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية: (مثال 1)

1 $\cos^2\theta + \tan^2\theta\cos^2\theta = 1$

2 $\cot\theta(\cot\theta + \tan\theta) = \csc^2\theta$

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

3-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

عند حل أسئلة الاختيار من متعدد في المتطابقات، لا بد من تحويل العبارة المعطاة حتى تطابق أحد البدائل.

مثال 2 على اختبار

أي مما يأتي يكافئ العبارة $\frac{\cos\theta \csc\theta}{\tan\theta}$ ؟

A $\cot\theta$ **C** $\cot^2\theta$

B $\csc\theta$ **D** $\csc^2\theta$

اقرأ فقرة الاختبار

المطلوب إيجاد عبارة مكافئة للعبارة الأصلية. لاحظ أن جميع البدائل المعطاة تتضمّن إما $\cot\theta$ أو $\csc\theta$. لذا اعمل على أن تستبدل بالدوالّ دوالّ مثلثية أخرى.

حُلّ فقرة الاختبار

حوّل العبارة المعطاة حتى تطابق إحدى البدائل.

$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$, $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$$\frac{\cos\theta\csc\theta}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta\frac{1}{\sin\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

اضرب

$$= \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

اقلب المقام واضربه بالبسط

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \cdot \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$$= \cot\theta \cdot \cot\theta$$

اضرب

$$= \cot^2\theta$$

الجواب هو C.

إرشادات للاختبار

التأكد من الإجابات

كي تتحقق من صحة حلّك اختر قيمة لـ θ. وعوّض بها في البديل المختار، ثم قارنها بإجابتك عند تعويض قيمة θ في العبارة الأصلية.

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

3-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

تحقق من فهمك

2) أي مما يأتي يكافئ العبارة $\tan^2\theta\,(\cot^2\theta - \cos^2\theta)$ ؟

A $\cot^2\theta$

B $\tan^2\theta$

C $\cos^2\theta$

D $\sin^2\theta$

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

3-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

تدرب وحل المسائل

11) **اختيار من متعدد:** أي عبارة مما يأتي تكافئ العبارة $\frac{\tan^2\theta + 1}{\tan^2\theta}$؟

(مثال 2)

A $\sin^2\theta$ C $\cos^2\theta$

B $\tan^2\theta$ D $\csc^2\theta$

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

3-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

تحويل طرفي المتطابقة : في بعض الأحيان يكون من الأسهل أن تُحوّل كل طرف في المتطابقة بصورة منفصلة إلى صورة مشتركة. والاقتراحات الآتية ربما تكون مفيدة في إثبات صحة المتطابقات المثلثية:

مفهوم أساسي **اقتراحات لإثبات صحة المتطابقات**

- بسّط العبارة بالإفادة من المتطابقات المثلثية الأساسية.
- حلّل أو اضرب كلًا من البسط والمقام بالعبارة المثلثية نفسها.
- اكتب كل طرف بدلالة كل من الجيب ، وجيب التمام فقط. ثم بسّط كل طرف قدر المستطاع.
- لا تنفذ أي عملية (جمع، طرح، ضرب، قسمة) على طرفي المعادلة التي يطلب إثبات أنها متطابقة؛ لأن خصائص المساواة لا تنطبق على المتطابقات كما تنطبق على المعادلات.

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

3-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

مثال 3 إثبات صحة المتطابقات من خلال تحويل كلا طرفيها

أثبت صحة المتطابقة $\cos\theta \cot\theta = \csc\theta - \sin\theta$

نبسِّط الطرف الأيسر

$$\cos\theta \cot\theta = \cos\theta \cdot \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}$$

اضرب

نبسِّط الطرف الأيمن

$$\csc\theta - \sin\theta = \frac{1}{\sin\theta} - \sin\theta$$

$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

$$= \frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}$$

اطرح

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}$$

بما أن الطرفين يساويان المقدار نفسه، فالطرفان متساويان.

تنبيه!

تبسيط الطرفين

تشبه عملية إثبات صحة المتطابقة، عمليةَ التحقّق من حل المعادلة. ومن هنا يمكنك استعمال عملية التحقّق في تبسيط أحد الطرفين أو كليهما للحصول على العبارة ذاتها.

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

3-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

تحقق من فهمك

3) $\csc^2\theta - \cot^2\theta = \cot\theta\tan\theta$.

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

3-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

تدرب وحل المسائل

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية: (مثال 3)

(12 $\sec\theta - \tan\theta = \dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$

(13 $\dfrac{1+\tan\theta}{\sin\theta+\cos\theta} = \sec\theta$

(14 $\sec\theta\csc\theta = \tan\theta + \cot\theta$

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

3-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

مسائل مهارات التفكير العليا

44) اكتشف المختلف: حدّد المعادلة المختلفة عن المعادلات الثلاث الأخرى. وضح إجابتك.

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$	$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$
$\sin^2\theta-\cos^2\theta=2\sin^2\theta$	$\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$

55) اختيار من متعدد: أي مما يأتي لا يكافئ $\cos\theta$ ، حيث $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ ؟

A $\frac{\cos\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$

B $\frac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta}$

C $\cot\theta\sin\theta$

D $\tan\theta\csc\theta$

@Hudali_math

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

3-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

(3 – 2) إثبات صحة المتطابقات المثلثية

اسم الطالب :..... الشعبة : .....

اختر الإجابة الصحيحة:								
1	المتطابقة $1+sec^2\theta sin^2\theta$ تكافئ:							
	A	$sec^2\theta$	B	$cot^2\theta$	C	$tan^2\theta$	D	$sin^2\theta$
2	اي عبارة مما يأتي تكافئ العبارة : $\frac{tan^2\theta+1}{tan^2\theta}$							
	A	$tan^2\theta$	B	$cos^2\theta$	C	$sin^2\theta$	D	$csc^2\theta$
3	قيمة العبارة $(sec^2\theta+csc^2\theta)-(tan^2\theta+cot^2\theta)$							
	A	1	B	2	C	-2	D	-1

أكمل الفراغات التالية :	
$cos^2\theta+tan^2\theta cos^2\theta=$	1
$(sin\theta-1)(tan\theta+sec\theta)=$	2

@Hudali_math

تصميم واخراج الاستاذة : هدى علي الشمراني
عضو في مجموعة رفعة الرياضيات

الحسابات الالكترونية :