المملكة العربية السعودية

الرياضيات

للصف الثاني الثانوي

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

الفصل الرابع: العلاقات والدوال العكسية والجذرية

العبيكان Obeikan

McGraw Hill Education

١٤٣٤ هـ - ٢٠١٣ م

يوزع مجانًا ولا يباع

الرياضيات ـ الصف الثاني الثانوي

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

أعدَّ النسخة العربية: شركة العبيكان للتعليم

Glencoe Mathematics © 2010

CHAPTER RESOURCE MASTERS

Algabra 2

www.obeikaneducation.com

حقوق الطبعة الإنجليزية محفوظة لشركة ماجروهل©.

الطبعة العربية: مجموعة العبيكان للاستثمار
وفقًا لاتفاقيتها مع شركة ماجروهل© ٢٠٠٨م/ ١٤٢٩هـ.

English Edition Copyright © the McGraw-Hill Companies, Inc.
All rights reserved.

Arabic Edition is published by Obeikan under agreement with
The McGraw-Hill Companies, Inc. © 2008.

لا يسمح بإعادة إصدار هذا الكتاب أو نقله في أي شكل أو واسطة، سواءٌ أكانت إلكترونية أو ميكانيكية، بما في ذلك التصوير بالنسخ «فوتوكوبي»، أو التسجيل، أو التخزين و الاسترجاع، دون إذن خطي من الناشر.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

المقدمة

الحمد لله والصلاة والسلام على نبينا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين، وبعد:

عزيزي المعلم / عزيزتي المعلمة

يسرنا أن نقدم هذه المجموعة من التدريبات المساندة، التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب. حيث نطمح أن يساعدك التنوع في هذه التدريبات على الوصول إلى جميع الطلاب في الصف، مهما تباينت مستوياتهم.

وقد تم تخصيص صفحة أو أكثر لكل نوع من هذه التدريبات؛ لتغطي درسًا من دروس كتاب الطالب. حيث يمكنك أن تكلف الطلاب حل صفحة التدريبات المقابلة لكل درس بحسب مستوى كل منهم؛ سواء في داخل الصف أم في المنزل. وليست هذه التدريبات بديلًا عن كتاب التمارين، ولكنها مساندة ومكملة له.

وتشمل هذه التدريبات الأنواع التاليه:

تدريبات إعادة التعليم

تركِّز هذه التدريبات على محتوى الدروس في كتاب الطالب، وتقدمه بأسلوب تدريسي ومعالجة يختلفان عن كتابي الطالب والتمارين. وهي موجّهة إلى الطلاب ذوي المستوى دون المتوسط.

ولأهمية حل المسألة تم تخصيص صفحتين من تدريبات إعادة التعليم لكل درس من دروس حل المسألة؛ للتركيز على كيفية اختيار الخطة وتنفيذها، بالإضافة إلى مجموعة من التدريبات المناسبة لتطبيق تلك الخطة.

تدريبات المهارات

تركِّز هذه التدريبات غالبًا على المهارات الحسابية الموجودة في الدرس، وتتضمن تدريبات إضافية وسائل تركز على تلك المهارات. وهي موجّهة إلى الطلاب ذوي المستوى المتوسط.

التدريبات الإثرائية

تساعد هذه التدريبات على التوسُّع في مفاهيم الدرس، كما تؤدي إلى توسيع مدارك الطلاب حول تعلم الرياضيات بشكل عام. وهذه التدريبات موجَّهة إلى الطلاب ذوي المستوى فوق المتوسط.

ملحق الإجابات:

يتضمن هذا المصدر في آخره ملحقًا بالإجابات، حيث تظهر باللون الأسود الغامق على صفحات مصغَّرة.

الفهرس

المقدمة 5

الدرس 4-1 العمليات على الدوال

تدريبات إعادة التعليم 6

تدريبات المهارات 8

تدريبات حل المسألة 9

التدريبات الإثرائية 10

الدرس 4-2 العلاقات والدوال العكسية

تدريبات إعادة التعليم 11

تدريبات المهارات 13

تدريبات حل المسألة 14

التدريبات الإثرائية 15

الدرس 4-3 دوال ومتباينات الجذر التربيعي

تدريبات إعادة التعليم 16

تدريبات المهارات 18

تدريبات حل المسألة 19

التدريبات الإثرائية 20

الدرس 4-4 الجذر النوني

تدريبات إعادة التعليم 21

تدريبات المهارات 23

تدريبات حل المسألة 24

التدريبات الإثرائية 25

الدرس 4-5 العمليات على العبارات الجذرية

تدريبات إعادة التعليم 26

تدريبات المهارات 28

تدريبات حل المسألة 29

التدريبات الإثرائية 30

الدرس 4-6 الأسس النسبية

تدريبات إعادة التعليم 31

تدريبات المهارات 33

تدريبات حل المسألة 34

التدريبات الإثرائية 35

الدرس 4-7 حل المعادلات والمتباينات الجذرية

تدريبات إعادة التعليم 36

تدريبات المهارات 38

تدريبات حل المسألة 39

التدريبات الإثرائية 40

ملحق الإجابات 41

4-1 تدريبات إعادة التعليم

العمليات على الدوال

العمليات الحسابية

الجمع	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
الطرح	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$
الضرب	$(f\bullet g)(x)=f(x)\bullet g(x)$
القسمة	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}, g(x)\neq 0$

مثال أوجد $(f+g)(x)$ و $(f-g)(x)$ و $(f\bullet g)(x)$ و $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ حيث $f(x)=x^2+3x-4$ و $g(x)=3x-2$.

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ جمع الدوال

$=(x^2+3x-4)+(3x-2)$ بالتعويض بدل $f(x)$ و $g(x)$.

$=x^2+6x-6$ بالتبسيط

$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ طرح الدوال

$=(x^2+3x-4)-(3x-2)$ بالتعويض بدل $f(x)$ و $g(x)$

$=x^2-2$ بالتبسيط

$(f\bullet g)(x)=f(x)\bullet g(x)$ ضرب الدوال

$=(x^2+3x-4)(3x-2)$ بالتعويض بدل $f(x)$ و $g(x)$

$=x^2(3x-2)+3x(3x-2)-4(3x-2)$ خاصية التوزيع

$=3x^3-2x^2+9x^2-6x-12x+8$ خاصية التوزيع

$=3x^3+7x^2-18x+8$ بالتبسيط

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}, g(x)\neq 0$ قسمة الدوال

$=\frac{x^2+3x-4}{3x-2}, x\neq\frac{2}{3}$ بالتعويض بدل $f(x)$ و $g(x)$

تمارين:

أوجد $(f+g)(x)$ و $(f-g)(x)$ و $(f\bullet g)(x)$ و $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ للدالتين $f(x)$، $g(x)$ فيما يأتي:

1) $f(x)=8x-3; g(x)=4x+5$

2) $f(x)=x^2+x-6; g(x)=x-2$

3) $f(x)=3x^2-x+5; g(x)=2x-3$

4) $f(x)=2x-1; g(x)=3x^2+11x-4$

5) $f(x)=x^2-1; g(x)=\frac{1}{x+1}$

4-1 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

العمليات على الدوال

تركيب دالتين: لتكن f وg دالتين بحيث أن مدى g مجموعة جزئية من مجال f. فإن تركيب الدالتين $f\circ g$ يعرف بالمعادلة: $[f\circ g](x)=f[g(x)]$.

مثال 1 **إذا كانت $f=\{(1,2),(3,3),(2,4),(4,1)\}$ و$g=\{(1,3),(3,4),(2,2),(4,1)\}$ فأوجد $f\circ g$ و$g\circ f$ إذا كان ذلك ممكنًا.**

$f[g(4)]=f(1)=2$ $f[g(3)]=f(4)=1$ $f[g(2)]=f(2)=4$ $f[g(1)]=f(3)=3$

أي أن: $f\circ g=\{(4,2),(3,1),(2,4),(1,3)\}$

$g[f(4)]=g(1)=3$ $g[f(3)]=g(3)=4$ $g[f(2)]=g(4)=1$ $g[f(1)]=g(2)=2$

أي أن: $g\circ f=\{(4,3),(3,4),(2,1),(1,2)\}$

مثال 2 **أوجد $[g\circ h](x)$ و$[h\circ g](x)$ للدالتين $g(x)=3x-4$ و$h(x)=x^2-1$**

$$[h\circ g](x)=h[g(x)]$$
$$=h(3x-4)$$
$$=(3x-4)^2-1$$
$$=9x^2-24x+16-1$$
$$=9x^2-24x+15$$

$$[g\circ h](x)=g[h(x)]$$
$$=g(x^2-1)$$
$$=3(x^2-1)-4$$
$$=3x^2-7$$

تمارين:

أوجد $f\circ g$ و$g\circ f$ لكل زوج من الدوال، إذا كان ذلك ممكنًا:

1) $f=\{(-1,2),(5,6),(0,9)\}$, $g=\{(6,0),(2,-1),(9,5)\}$

2) $f=\{(5,-2),(9,8),(-4,3),(0,4)\}$, $g=\{(3,7),(-2,6),(4,-2),(8,10)\}$

أوجد $[f\circ g](x)$ و$[g\circ f](x)$ في كل مما يأتي، إذا كان ذلك ممكنًا.

3) $f(x)=2x+7;\ g(x)=-5x-1$

4) $f(x)=x^2-1;\ g(x)=-4x^2$

5) $f(x)=x^2+2x;\ g(x)=x-9$

6) $f(x)=5x+4;\ g(x)=3-x$

4-1 تدريبات المهارات

العمليات على الدوال

أوجد $(f+g)(x)$ و $(f-g)(x)$ و $(f \cdot g)(x)$ و $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ للدالتين $f(x)$ و $g(x)$ في كل مما يأتي:

1) $f(x) = x + 5$
$g(x) = x - 4$

2) $f(x) = 3x + 1$
$g(x) = 2x - 3$

3) $f(x) = x^2$
$g(x) = 4 - x$

4) $f(x) = 3x^2$
$g(x) = \frac{5}{x}$

أوجد $f \circ g$ و $g \circ f$ لكل زوج من الدوال الآتية، إذا كان ذلك ممكنًا:

5) $f = \{(0, 0), (4, -2)\}$
$g = \{(0, 4), (-2, 0), (5, 0)\}$

6) $f = \{(0, -3), (1, 2), (2, 2)\}$
$g = \{(-3, 1), (2, 0)\}$

7) $f = \{(-4, 3), (-1, 1), (2, 2)\}$
$g = \{(1, -4), (2, -1), (3, -1)\}$

8) $f = \{(6, 6), (-3, -3), (1, 3)\}$
$g = \{(-3, 6), (3, 6), (6, -3)\}$

أوجد $(g \circ h)(x)$ و $(h \circ g)(x)$ في كل مما يأتي، إذا كان ذلك ممكنًا:

9) $g(x) = 2x$
$h(x) = x + 2$

10) $g(x) = -3x$
$h(x) = 4x - 1$

11) $g(x) = x - 6$
$h(x) = x + 6$

12) $g(x) = x - 3$
$h(x) = x^2$

13) $g(x) = 5x$
$h(x) = x^2 + x - 1$

14) $g(x) = x + 2$
$h(x) = 2x^2 - 3$

إذا كان $f(x) = 3x$ و $g(x) = x + 4$ و $h(x) = x^2 - 1$، فأوجد قيمة كل مما يأتي:

15) $f[g(1)]$

16) $g[h(0)]$

17) $g[f(-1)]$

18) $h[f(5)]$

19) $g[h(-3)]$

20) $h[f(10)]$

21) $f[h(8)]$

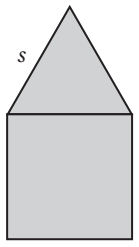
22) $[f \circ (h \circ g)](1)$

23) $[f \circ (g \circ h)](-2)$

4-1 تدريبات حل المسألة

العمليات على الدوال

1) المساحة: يريد خالد إيجاد مساحة الشكل التالي المكون من مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه (s) ومربع طول ضلعه (s). الدالة التي تعطي مساحة المثلث هي: $f(s)=\frac{\sqrt{3}}{4}s^2$، والدالة التي تعطي مساحة المربع هي $g(s)=s^2$. ما الدالة $h(s)$ التي تعطي مساحة الشكل كاملًا بدلالة (s)؟

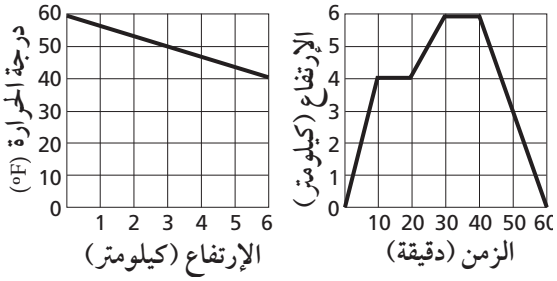


2) أسعار: قررت شركة حاسوب ضبط الأسعار والخصومات لتبقى لديها القدرة على المنافسة. الدالة $p(t)$ تعطي سعر البيع بالريال للحاسوب من الفئة A بدلالة الزمن (t). والدالة $D(t)$ تعطي قيمة خصم خاص لتشجيع الزبائن الدائمين. فكم ريالًا سيدفع زبون دائم ثمنًا لشراء حاسوب من الفئة A بدلالة الزمن (t)؟

3) حمم: قيست درجة حرارة حمم فكانت $2000^{\circ}F$، بدأت الحمم تبرد بحيث أن درجة حرارتها بعد زمن (t) تعطى بالدالة $T(t)$. إذا كانت $C(F)$ دالة تعطي درجة الحرارة السيليزية بدلالة الدرجة الفهرنهايتية. فما الدالة التي تعطي حرارة الحمم بالدرجات السيليزية بدلالة الزمن (t)؟

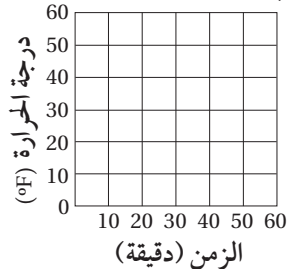
4) هندسة: صممت مجموعة مهندسين آلة تدبيس ورق، وكانت سرعة غرز الدبابيس (s) (بالأقدام لكل ثانية) بدلالة طول ذراع الآلة (l) (بالبوصة) تعطى بالعلاقة $s(l)=40+3l$. وحددت مجموعة أخرى من المهندسين عدد الأوراق N التي يمكن تدبيسها بدلالة السرعة (s) بالدالة $N(s)=\frac{s-10}{3}$.
ما الدالة التي تعطي N بدلالة l؟

5) منطاد: ركب أحمد ومصعب منطادًا يسير بالهواء الساخن لمدة ساعة واحدة. لتكن $T(A)$ درجة حرارة الهواء الخارجي بدلالة ارتفاع المنطاد (A). و$A(t)$ الدالة التي تعطي ارتفاع المنطاد بدلالة الزمن (t).



a) ما الدالة التي تعطي درجة حرارة الهواء (T) بدلالة الزمن (t)؟

b) ارسم الدالة التي حصلت عليها في الفرع **a** معتمدًا على الشكلين السابقين اللذين يمثلان الدالتين $T(A)$ و$A(t)$.

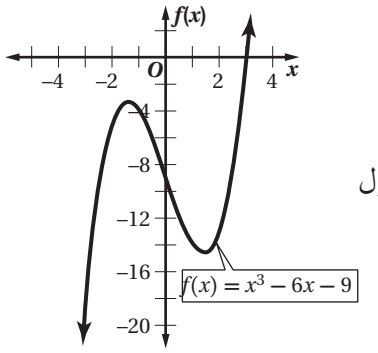


4-1 التدريبات الإثرائية

قيم عظمى محلية

يبيّن منحنى الدالة $f(x)=x^3-6x-9$ المجاور وجود قيمة عظمى محلية للدالة بين القيمتين $f(-2)$ و $f(-1)$، ويمكنك الحصول على قيمة أكثر قربًا لهذه القيمة العظمى المحلية بمقارنة القيم في الجدول المجاور.

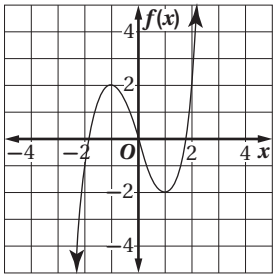
القيمة العظمى المحلية هي -3.3 لأقرب جزء من عشرة.



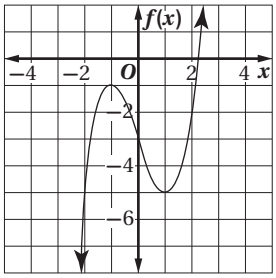
x	$f(x)$
-2	-5
-1.5	-3.375
-1.4	-3.344
-1.3	-3.397
-1	-4

أوجد قيمة عظمى محلية لكل دالة ممثلة فيما يأتي مقربة إلى أقرب جزء من عشرة.

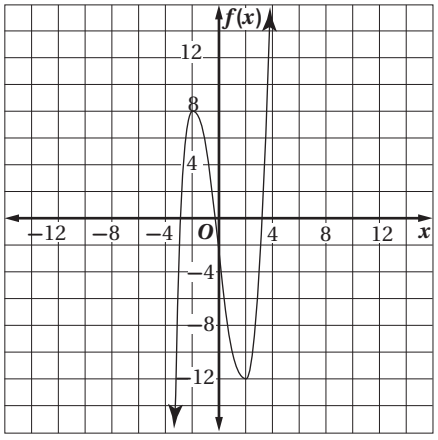
1) $f(x)=x(x^2-3)$



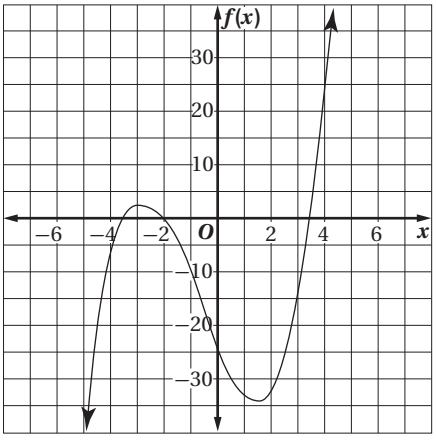
2) $f(x)=x^3-3x-3$



3) $f(x)=x^3-9x-2$



4) $f(x)=x^3+2x^2-12x-24$



4-2 تدريبات إعادة التعليم

العلاقات والدوال العكسية

إيجاد الدالة العكسية

العلاقات العكسية	تكون كل من العلاقتين عكسية للأخرى، إذا وفقط إذا كان كل زوج مرتب مثل (a, b) ينتمي لإحداهما، فإن الزوج (b, a) ينتمي للأخرى.
خصائص الدوال العكسية	افرض أن f، f^{-1} دالتان كل منهما عكسية للأخرى، فإن: $f(a)=b$، إذا وفقط إذا كان $f^{-1}(b)=a$.

مثال **أوجد الدالة العكسية للدالة $f(x)=\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}$، ثم مثّل $f(x)$ ودالتها العكسية بيانيًّا.**

الخطوة 1: ضع y بدلًا من $f(x)$ في الدالة الأصلية.

$$f(x)=\frac{2}{5}x-\frac{1}{5} \rightarrow y=\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}$$

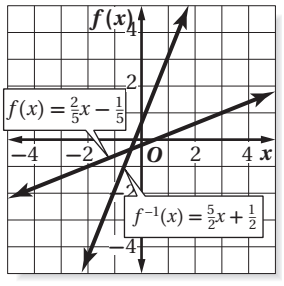
الخطوة 2: بدل y، x مع بعضهما

$$x=\frac{2}{5}y-\frac{1}{5}$$

الخطوة 3: حل المعادلة السابقة في y.

$x=\frac{2}{5}y-\frac{1}{5}$	العكسية لـ $y=\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}$
$5x=2y-1$	بضرب الطرفين بالعدد 5.
$5x+1=2y$	بجمع العدد 1 للطرفين
$\frac{1}{2}(5x+1)=y$	بقسمة الطرفين على 2

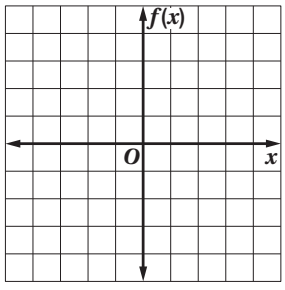
إذن، الدالة العكسية للدالة $f(x)=\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}$ هي $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(5x+1)$



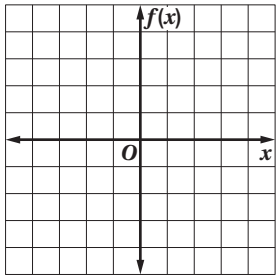
تمارين:

أوجد الدالة العكسية لكل دالة مما يأتي، ثم ارسم منحنى الدالة، ومنحنى الدالة العكسية.

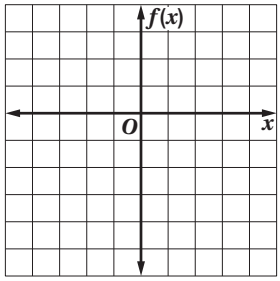
1) $f(x)=\frac{2}{3}x-1$



2) $f(x)=2x-3$



3) $f(x)=\frac{1}{4}x-2$



4-2 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

العلاقات والدوال العكسية

التحقق من الدالة العكسية

الدوال العكسية	تكون كل من الدالتين $f(x)$ و $g(x)$ عكسية للأخرى إذا وفقط إذا كان: $[f\circ g](x)=x$ و $[g\circ f](x)=x$

مثال 1 **حدد إن كانت $f(x)=2x-7$ و $g(x)=\frac{1}{2}(x+7)$ كل منهما دالة عكسية للأخرى أم لا.**

$$[f\circ g](x)=f[g(x)]$$
$$=f[\tfrac{1}{2}(x+7)]$$
$$=2[\tfrac{1}{2}(x+7)]-7$$
$$=x+7-7$$
$$=x$$

$$[g\circ f](x)=g[f(x)]$$
$$=g(2x-7)$$
$$=\tfrac{1}{2}(2x-7+7)$$
$$=x$$

إذن، الدالتان $f(x)$ و $g(x)$ كل منهما عكسية للأخرى.

مثال 2 **حدد إن كانت $f(x)=4x+\frac{1}{3}$ و $g(x)=\frac{1}{4}x-3$ كل منهما دالة عكسية للأخرى أم لا.**

$$[f\circ g](x)=f[g(x)]$$
$$=f\left(\tfrac{1}{4}x-3\right)$$
$$=4\left(\tfrac{1}{4}x-3\right)+\tfrac{1}{3}$$
$$=x-12+\tfrac{1}{3}$$
$$=x-11\tfrac{2}{3}$$

وبما أن $[f\circ g](x)\neq x$ ، فإن الدالتين ليست كل منهما عكسية للأخرى.

تمارين:

حدد إن كانت كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا في كل زوج مما يأتي. اكتب (نعم) أو (لا).

1) $f(x)=3x-1$, $g(x)=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$

2) $f(x)=\frac{1}{4}x+5$, $g(x)=4x-20$

3) $f(x)=\frac{1}{2}x-10$, $g(x)=2x+\frac{1}{10}$

4) $f(x)=2x+5$, $g(x)=5x+2$

5) $f(x)=8x-12$, $g(x)=\frac{1}{8}x+12$

6) $f(x)=-2x+3$, $g(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

7) $f(x)=4x-\frac{1}{2}$, $g(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}$

8) $f(x)=2x-\frac{3}{5}$, $g(x)=\frac{1}{10}(5x+3)$

9) $f(x)=4x+\frac{1}{2}$, $g(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

10) $f(x)=10-\frac{x}{2}$, $g(x)=20-2x$

11) $f(x)=4x-\frac{4}{5}$, $g(x)=\frac{x}{4}+\frac{1}{5}$

12) $f(x)=9+\frac{3}{2}x$, $g(x)=\frac{2}{3}x-6$

4-2 تدريبات المهارات

العلاقات والدوال العكسية

أوجد الدالة العكسية لكل دالة مما يأتي:

1) $\{(3, 1), (4, -3), (8, -3)\}$

2) $\{(-7, 1), (0, 5), (5, -1)\}$

3) $\{(-10, -2), (-7, 6), (-4, -2), (-4, 0)\}$

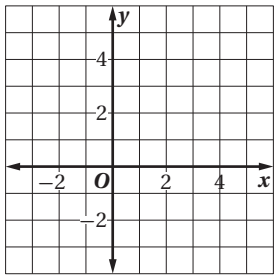
4) $\{(0, -9), (5, -3), (6, 6), (8, -3)\}$

5) $\{(-4, 12), (0, 7), (9, -1), (10, -5)\}$

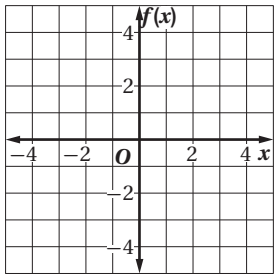
6) $\{(-4, 1), (-4, 3), (0, -8), (8, -9)\}$

أوجد الدالة العكسية لكل دالة مما يأتي، ثم مثل الدالتين الأصلية والعكسية بيانيًا.

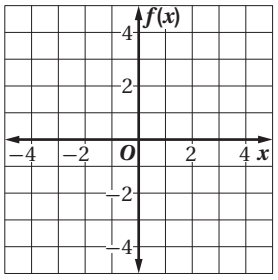
7) $y = 4$



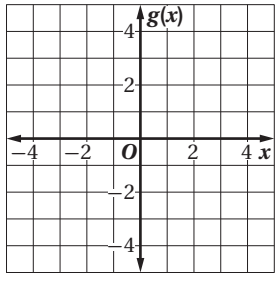
8) $f(x) = 3x$



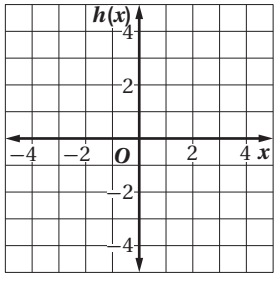
9) $f(x) = x + 2$



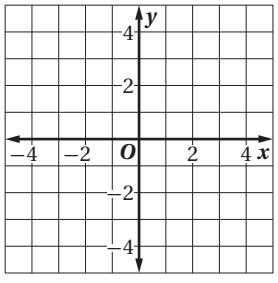
10) $g(x) = 2x - 1$



11) $h(x) = \frac{1}{4}x$



12) $y = \frac{2}{3}x + 2$



حدد إن كانت كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا في كل زوج مما يأتي. اكتب (نعم) أو (لا).

13) $f(x) = x - 1$
$g(x) = 1 - x$

14) $f(x) = 2x + 3$
$g(x) = \frac{1}{2}(x - 3)$

15) $f(x) = 5x - 5$
$g(x) = \frac{1}{5}x + 1$

16) $f(x) = 2x$
$g(x) = \frac{1}{2}x$

17) $h(x) = 6x - 2$
$g(x) = \frac{1}{6}x + 3$

18) $f(x) = 8x - 10$
$g(x) = \frac{1}{8}x + \frac{5}{4}$

4-2 تدريبات حل المسألة

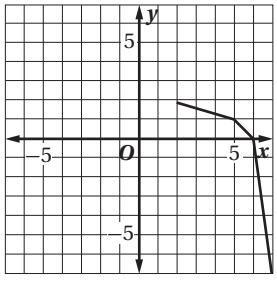
العلاقات والدوال العكسية

1) الحجم: يريد عامر أن يصنع وعاءً كروي الشكل يتسع لنصف متر مكعب من الماء. ويعلم أن حجمه V بدلالة نصف قطره r يُعطى بالدالة $V=\frac{4}{3}\pi r^3$. ولكنه يريد معرفة r بدلالة V. أوجد هذه الدالة العكسية.

2) تمارين رياضية: وضع سالم برنامجًا لممارسة التمارين الرياضية بانتظام، ولتحقيق أكبر فائدة ممكنة، حسب سالم أقصى معدل لعدد ضربات القلب مستعملًا الدالة $f(x)=0.85(220-x)$، حيث x تمثل عمره. أوجد الدالة العكسية للدالة $f(x)$.

3) صواريخ: ارتفاع صاروخ بالأقدام كدالة في الزمن (t) (بالثانية) حيث $t \geq 0$ يُعطى بالدالة $f(t)=49t^2$.
أوجد الدالة العكسية للدالة f. وحدد الزمن عندما كان الارتفاع 10 و20 و1000 قدم. قرِّب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة من الثانية.

4) وجد فهد تمثيلًا بيانيًّا غير مكتمل لدالة ما، ويعلم أن الدالة هي دالة عكسية لنفسها، الشكل التالي يمثل الجزء الذي وجده فهد. أكمل تمثيل جزء المنحنى المقابل لقيم x من -7 إلى 2.



5) الكواكب: المسافة التقريبية بين أحد الكواكب والشمس تُعطى بالمعادلة: $d=T^{\frac{2}{3}}$، حيث d المسافة بالوحدات الفلكية، وT مدة دورته بالسنوات على الأرض.
(الوحدة الفلكية هي المسافة بين الأرض والشمس).
أوجد T بدلالة d.

4-2 التدريبات الإثرائية

قراءة في الجبر

كلمة زمرة لها معنى خاص في الرياضيات، والعبارات المرقمة التالية توضح فكرة الزمرة، وهي مثال ممتع للزمرة أيضًا.

1) إن أي مجموعة من العناصر مع عملية ثنائية عليها تشكل زمرة إذا تحققت الشروط الأربعة الآتية: المجموعة مغلقة تحت تأثير العملية، والعملية تجميعية، ويوجد في المجموعة عنصر محايد، وكل عنصر في المجموعة له نظير في المجموعة نفسها.

2) والدوال الست التالية مع عملية تركيب الدوال تشكل زمرة:
$f_1(x)=x\,,\ f_2(x)=\frac{1}{x}\,,\ f_3(x)=1-x\,,\ f_4(x)=\frac{(x-1)}{x}\,,\ f_5(x)=\frac{x}{(x-1)}\,,\ f_6(x)=\frac{1}{(1-x)}$.

3) هذه الزمرة مثال للزُمر غير التبديلية. فمثلًا $f_3\circ f_2=f_6$ بينما $f_2\circ f_3=f_4$.

4) يمكن تجريب بعض الحالات للتحقق من أن f_1 عنصر محايد لهذه الزمرة.

5) كل دالة هي دالة عكسية لنفسها باستثناء الدالتين f_4 وf_6 اللتين كل منهما دالة عكسية للأخرى.

أجب عن كل من الأسئلة الآتية:

1) اشرح المقصود بالقول "مجموعة مغلقة تحت تأثير عملية". هل مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة مغلقة تحت تأثير عملية الطرح؟

2) الطرح عملية غير إبدالية على مجموعة الأعداد الصحيحة. اكتب تعريفًا من عندك للعملية غير الإبدالية.

3) ما العنصر المحايد لعملية الضرب على الأعداد الصحيحة؟ برر إجابتك.

4) اشرح كيف ترتبط العبارة الآتية مع العبارة رقم (5) السابقة.

$$(f_6\circ f_4)(x)=f_6[f_4(x)]=f_6\left(\frac{(x-1)}{x}\right)=\frac{1}{1-\frac{(x-1)}{x}}=x=f_1(x)$$

4-3 تدريبات إعادة التعليم

دوال ومتباينات الجذر التربيعي

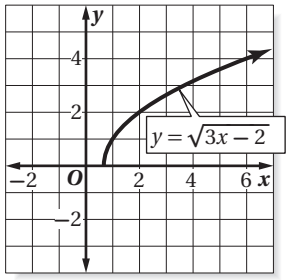
دوال الجذر التربيعي: الدالة التي تحتوي على الجذر التربيعي تسمى **دالة الجذر التربيعي**، ومجالها جميع القيم التي يكون عندها ما تحت الجذر موجبًا أو صفرًا.

مثال **مثل الدالة $y=\sqrt{3x-2}$ بيانيًا، وأوجد مجالها ومداها.**

بما أن ما تحت الجذر التربيعي لا يكون سالبًا، فإن مجال الدالة هو $3x-2\geq 0$ ، ومنه تكون $x\geq \frac{2}{3}$. ومقطع المنحنى مع المحور x هو $\frac{2}{3}$، والمدى هو $y\geq 0$.

صمّم جدولًا لبعض قيم x,y ، واستعمله في تمثيل الدالة.

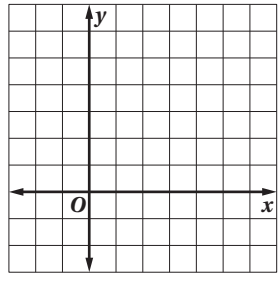
x	y
$\frac{2}{3}$	0
1	1
2	2
3	$\sqrt{7}$



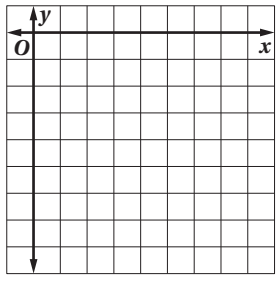
تمارين:

مثّل كل دالة بيانيًا، وأوجد مجالها ومداها.

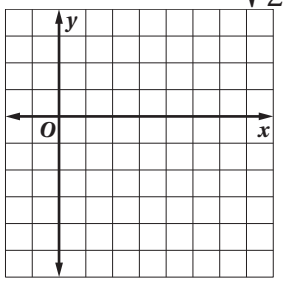
1) $y=\sqrt{2x}$



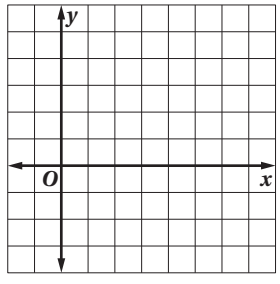
2) $y=-3\sqrt{x}$



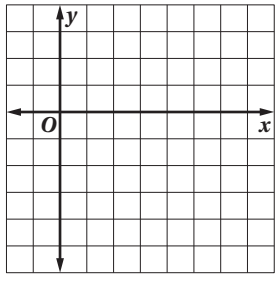
3) $y=-\sqrt{\frac{x}{2}}$



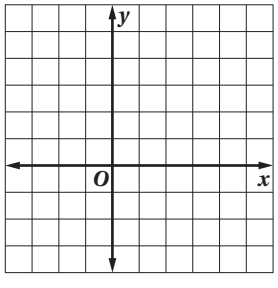
4) $y=2\sqrt{x-3}$



5) $y=-\sqrt{2x-3}$



6) $y=\sqrt{2x+5}$



الاسم: _____ التاريخ: _____

4-3 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

دوال ومتباينات الجذر التربيعي

متباينات الجذر التربيعي: المتباينة التي تحتوي الجذر التربيعي لمتغير تسمى **متباينة الجذر التربيعي.** استعمل معلوماتك حول تمثيل دوال الجذر التربيعي، والمتباينات بيانيًّا، في تمثيل متباينات الجذر التربيعي.

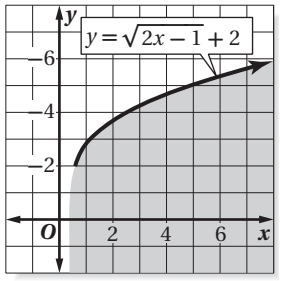
مثال 1 **مثل المتباينة $y \le \sqrt{2x-1}+2$ بيانيًا.**

مثل المعادلة المرتبطة بالمتباينة: $y=\sqrt{2x-1}+2$

المنحنى متضمن في حل المتباينة كما هو في الشكل المجاور.

يتضمن مجال الدالة القيم $x \ge \frac{1}{2}$

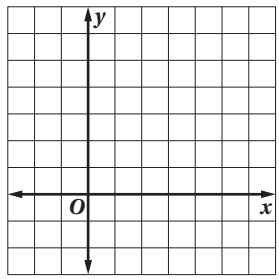
لذا يكون التمثيل البياني للمتباينة واقعًا على يمين المستقيم $x=\frac{1}{2}$



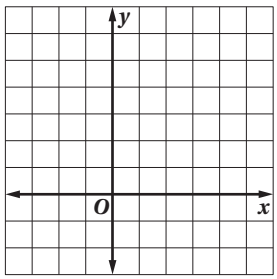
تمارين:

مثل كل متباينة بيانيًا:

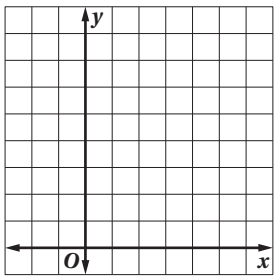
1) $y < 2\sqrt{x}$



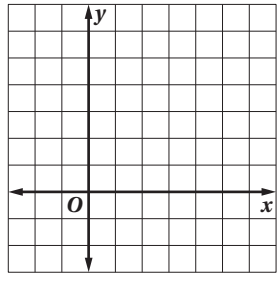
2) $y > \sqrt{x+3}$



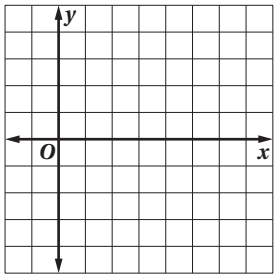
3) $y < 3\sqrt{2x-1}$



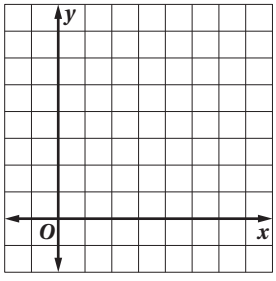
4) $y < \sqrt{3x-4}$



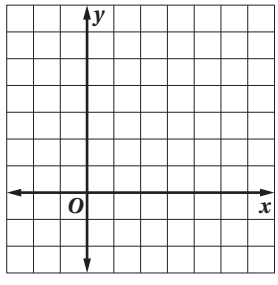
5) $y \ge \sqrt{x+1}-4$



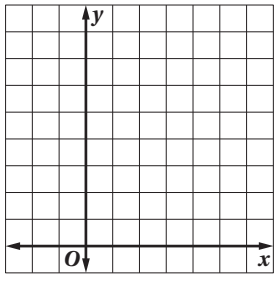
6) $y > 2\sqrt{2x-3}$



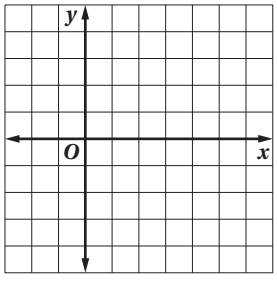
7) $y \ge \sqrt{3x+1}-2$



8) $y \le \sqrt{4x-2}+1$



9) $y < 2\sqrt{2x-1}-4$

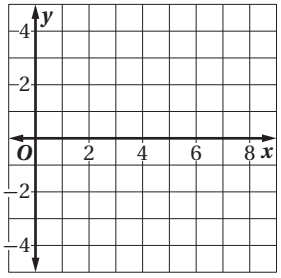


4-3 تدريبات المهارات

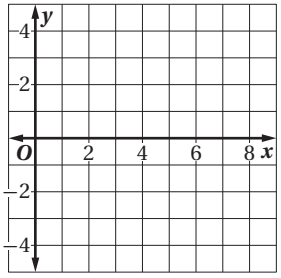
دوال ومتباينات الجذر التربيعي

مثِّل كل دالة بيانيًّا، وأوجد مجالها ومداها

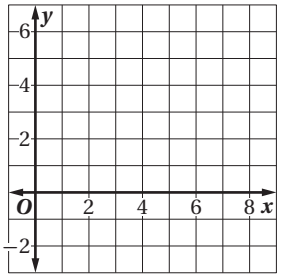
1) $y = \sqrt{2x}$



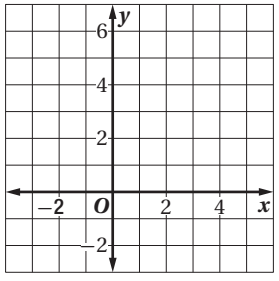
2) $y = -\sqrt{3x}$



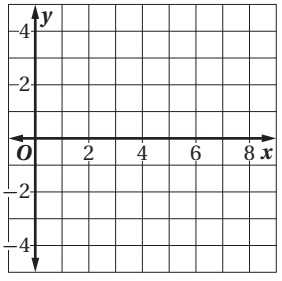
3) $y = 2\sqrt{x}$



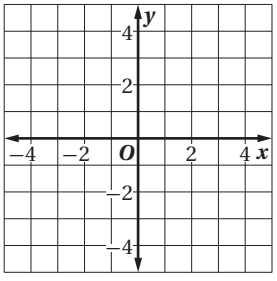
4) $y = \sqrt{x+3}$



5) $y = -\sqrt{2x-5}$

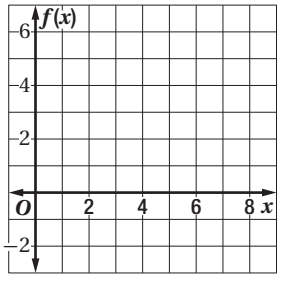


6) $y = \sqrt{x+4} - 2$

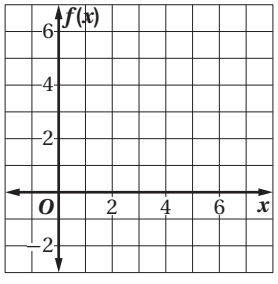


مثل كل متباينة بيانيًّا:

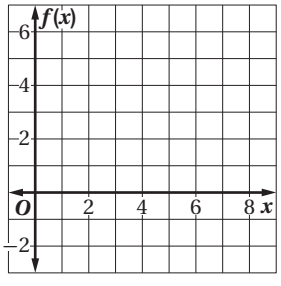
7) $f(x) < \sqrt{4x}$



8) $f(x) \geq \sqrt{x+1}$



9) $f(x) \leq \sqrt{4x-3}$



الاسم: _____ التاريخ: _____

4-3 تدريبات حل المسألة

دوال ومتباينات الجذر التربيعي

1) مربعات: يريد محمود إنشاء حديقة منزلية مربعة الشكل مساحتها $625\,ft^2$. ما أبعاد الحديقة؟

2) البندول: الزمن الذي يستغرقه بندول للتحرك اهتزازة كاملة يُعطى بالعلاقة:

$$p = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

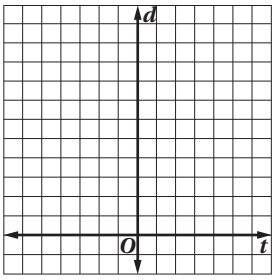
حيث L طول البندول بالأمتار، و g تسارع الجاذبية الأرضية $(g = 9.8 m/s^2)$.

أوجد زمن اهتزازة بندول طوله $0.65\,\text{m}$، قرب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

3) ردة الفعل: يريد صالح وسعد قياس ردات فعل بعضهما بعضًا. يُسقط صالح مسطرة من ارتفاع معين لتسقط بين، إصبعي يد سعد (الإبهام والسبابة). ويحاول سعد الإمساك بالمسطرة قبل أن تسقط من يده. الزمن المتطلب للإمساك بالمسطرة يُعطى بالعلاقة $t = \frac{\sqrt{d}}{4}$، حيث d مقاسة بالأقدام. أكمل الجدول التالي. قرب إجابتك لأقرب جزء من مئة.

المسافة (بالبوصة)	زمن ردة الفعل (بالثواني)
3	
6	
9	
12	

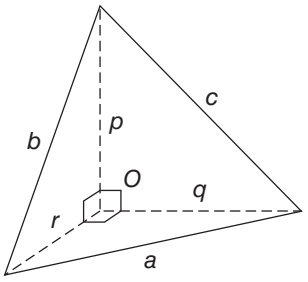
4) مسافات: يقف مدرب فريق درَّاجات على جانب طريق يراقب أحد الدراجين الذين يدربهم أثناء سيره على الطريق، والمسافة بين المدرب والدرَّاج تُعطى بالعلاقة $d = \sqrt{9 + 36t^2}$. مثل هذه الدالة بيانيًّا. وأوجد المسافة بين المدرب والدرَّاج بعد 3 ثواني. قرب إجابتك لأقرب جزء من مئة



5) النجوم: تتناسب كثافة الضوء المنبعث من مصدر عكسيًّا مع مربع المسافة، وبالرموز $I = \frac{k}{d^2}$، حل المعادلة لإيجاد d بدلالة I

4-3 التدريبات الإثرائية

قراءة في الجبر

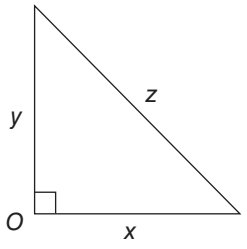


إذا تشابهت مسألتان رياضيتان في البنية فيقال أنهما متماثلتان.
واستعمال المُماثل إحدى الطرق للاستكشاف، وبرهنة النظريات الجديدة.
والعبارات المرقمة التالية تبيِّن المُماثل ثلاثي الأبعاد لنظرية فيثاغورس.

1) افرض أن لديك مجسمًا رباعي السطوح فيه ثلاثة أوجه متعامدة تلتقي في الرأس O.

2) وافرض أنك تريد معرفة ارتباط المساحات A,B,C للأوجه الثلاثة المتعامدة بمساحة السطح الرابع (D) المقابل للرأس O.

3) من الطبيعي أن تتوقع صيغة مماثلة لنظرية فيثاغورس $z^2 = x^z+y^2$،
وتكون صحيحة للحالات المشابهة ذات البعدين.



4) لتكتشف الصيغة في حالة الأشكال ثلاثية الأبعاد،
عليك أن تقترح صيغة، وتبرهن صحتها.

5) الاقتراحان التاليان معقولان:
$D^2= A^2+B^2+C^2$ و $D^3= A^3+B^3+C^3$

بالرجوع إلى العبارات المرقمة السابقة، أجب عن الأسئلة التالية:

1) استعمل العبارة رقم 1 والشكل العلوي. اكتب تعريفًا من عندك للشكل رباعي السطوح.

2) استعمل العبارة رقم 2 والشكل العلوي. ما أطوال أضلاع كل سطح في الشكل رباعي السطوح؟

3) أعد كتابة العبارة رقم 1 لتناسب وضعًا مماثلًا ذا بعدين.

4) بالرجوع إلى الشكل العلوي، اكتب عبارات للمساحات A و B و C المذكورة في العبارة رقم 2.

5) اكتب عبارات للمتغيرات a و b و c بدلالة p و q و r ، ولتكتشف حالة مماثلة ذات ثلاثة أبعاد، استعمل نظرية فيثاغورس للحصول على هذه العبارات.

6) أي اقتراح في العبارة رقم 5 يبدو أكثر معقولية؟ برِّر إجابتك.

4-4 تدريبات إعادة التعليم

الجذر النوني

تبسيط الجذور

الجذر التربيعي	لأي عددين حقيقيين a, b ، إذا كان $a^2=b$، فإن a جذر تربيعي لِـ b
الجذر النوني	لأي عددين حقيقيين a, b، وأي عدد صحيح موجب n، إذا كان $a^n=b$ ، فإن a جذر نوني للعدد b.
الجذور النونية الحقيقية $\sqrt[n]{b}$ و $-\sqrt[n]{b}$	إذا كان n عددًا زوجيًّا، و $b > 0$ ، فإن b له جذر حقيقي واحد موجب، وجذر حقيقي واحد سالب، الجذر الموجب هو الجذر الرئيس. إذا كان n عددًا فرديًا و $b > 0$ ، فإن b له جذر حقيقي واحد موجب. إذا كان n عددًا زوجيًا و $b < 0$ ، فإنه لا يوجد للعدد b جذور حقيقية. إذا كان n عددًا فرديًا و $b < 0$ ، فإنه يوجد للعدد b جذر حقيقي واحد سالب.

مثال 1 بَسِّط $\sqrt{49z^8}$

$\sqrt{49z^8}=\sqrt{(7z^4)^2}=7z^4$

z^4 عدد موجب، فلا داعي لأخذ القيمة المطلقة

مثال 2 بَسِّط $-\sqrt[3]{(2a-1)^6}$

$-\sqrt[3]{(2a-1)^6}=-\sqrt[3]{[(2a-1)^2]^3}=-(2a-1)^2$

تمارين:

بَسِّط كلًا مما يأتي:

1) $\sqrt{81}$
2) $\sqrt[3]{-343}$
3) $\sqrt{144p^6}$
4) $\pm\sqrt{4a^{10}}$
5) $\sqrt[5]{243p^{10}}$
6) $-\sqrt[3]{m^6n^9}$
7) $\sqrt[3]{-b^{12}}$
8) $\sqrt{16a^{10}b^8}$
9) $\sqrt{121x^6}$
10) $\sqrt{(4k)^4}$
11) $\pm\sqrt{169r^4}$
12) $-\sqrt[3]{-27p^6}$
13) $-\sqrt{625y^2z^4}$
14) $\sqrt{36q^{34}}$
15) $\sqrt{100x^2y^4z^6}$
16) $\sqrt[3]{-0.027}$
17) $-\sqrt{-0.36}$
18) $\sqrt{0.64p^{10}}$
19) $\sqrt[4]{(2x)^8}$
20) $\sqrt{(11y^2)^4}$
21) $\sqrt[3]{(5a^2b)^6}$
22) $\sqrt{(3x-1)^2}$
23) $\sqrt[3]{(m-5)^6}$
24) $\sqrt{36x^2-12x+1}$

4-4 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

الجذر النوني

تقريب الجذور باستعمال الآلة الحاسبة

العدد غير النسبي	هو العدد الذي لا يمكن التعبير عنه بكسر عشري منتهٍ أو دوري.

الجذور مثل $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ أمثلة للأعداد غير النسبية. ويُستعمل تقريب الكسور العشرية في تقريب قيم الأعداد غير النسبية في التطبيقات عادة. ويمكنك إيجاد هذه القيم التقريبية بسهولة بوساطة الآلة الحاسبة.

مثال **استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة $\sqrt[5]{18.2}$ مقربة لأقرب جزء من ألف.**

$\sqrt[5]{18.2} \approx 1.787$

تمارين:

استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقربة إلى أقرب جزء من ألف.

1) $\sqrt{62}$ **2)** $\sqrt{1050}$ **3)** $\sqrt[3]{0.054}$

4) $-\sqrt[4]{5.45}$ **5)** $\sqrt{5280}$ **6)** $\sqrt{18600}$

7) $\sqrt{0.095}$ **8)** $\sqrt[3]{-15}$ **9)** $\sqrt[5]{100}$

10) $\sqrt[6]{856}$ **11)** $\sqrt{3200}$ **12)** $\sqrt{0.05}$

13) $\sqrt{12500}$ **14)** $\sqrt{0.60}$ **15)** $-\sqrt[4]{500}$

16) $\sqrt[3]{0.15}$ **17)** $\sqrt[6]{4200}$ **18)** $\sqrt{75}$

19) الانزلاق: تستعمل شرطة السير الصيغة $r=2\sqrt{5L}$ لتقدير سرعة سيارة (r) بالأميال لكل ساعة، عندما تنزلق مسافة (L) بالأقدام. قدِّر سرعة سيارة بالأميال لأقرب جزء من عشرة إذا انزلقت مسافة 300 ft قبل أن تتوقف.

20) رحلات الفضاء: تُقدر المسافة الأفقية (d) بالأميال من مركبة فضائية تدور على ارتفاع (h) ميلًا فوق سطح الأرض بالمعادلة $d=\sqrt{8000h+h^2}$. ما المسافة الأفقية المُقدرة من مركبة تدور على ارتفاع 150 ميلًا فوق سطح الأرض؟

4-4 تدريبات المهارات

الجذر النوني

استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقربة لثلاث منازل عشرية.

1) $\sqrt{230}$

2) $\sqrt{38}$

3) $-\sqrt{152}$

4) $\sqrt{5.6}$

5) $\sqrt[3]{88}$

6) $\sqrt[3]{-222}$

7) $-\sqrt[4]{0.34}$

8) $\sqrt[5]{500}$

بَسِّط كلًا مما يأتي:

9) $\pm\sqrt{81}$

10) $\sqrt{144}$

11) $\sqrt{(-5)^2}$

12) $\sqrt{-5^2}$

13) $\sqrt{0.36}$

14) $-\sqrt{\frac{4}{9}}$

15) $\sqrt[3]{-8}$

16) $-\sqrt[3]{27}$

17) $\sqrt[3]{0.064}$

18) $\sqrt[5]{32}$

19) $\sqrt[4]{81}$

20) $\sqrt{y^2}$

21) $\sqrt[3]{125c^3}$

22) $\sqrt{64x^6}$

23) $\sqrt[3]{-27a^6}$

24) $\sqrt{m^8p^4}$

25) $-\sqrt{100p^4t^2}$

26) $\sqrt[4]{16w^4v^8}$

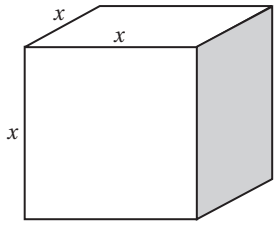
27) $\sqrt{(-3c)^4}$

28) $\sqrt{(a+b)^2}$

4-4 تدريبات حل المسألة

الجذر النوني

1) مكعبات: يريد سعود بناء مخزن مكعب الشكل سعته 1728 قدمًا مكعبًا. كم ستكون أبعاد المخزن؟



2) الفلك: تمثل المعادلة $a=\sqrt[3]{p^2}$ حالة خاصة لقانون كبلر الثالث المتعلق بحركة الكواكب. حيث a معدل بُعد الكوكب عن الشمس بالوحدات الفلكية، و p الفترة الزمنية بالسنوات لدورة الكوكب. إذا كانت دورة كوكب المشتري تستغرق 12 سنة. فما بُعده عن الشمس بالوحدات الفلكية؟

3) هامش الربح: تبلغ تكاليف سلعة لدى تاجر جملة D ريالًا، ويبيعها لتاجر توزيع بربح $P\%$. ويبيعها تاجر التوزيع لتاجر تجزئة بربح $P\%$. ويبيعها تاجر التجزئة للمستهلك بربح $P\%$. ما السعر الذي يشتري به المستهلك؟ وإذا اشترى المستهلك السلعة بمبلغ 80 ريالًا، وكانت تكلفتها على تاجر الجملة 29.15 ريالًا. فما نسبة الربح $P\%$.

4) البندول: يتحرك بندول طوله (L) قدمًا على أن يكون زمن الاهتزازة الواحدة (T) يُعطى بالعلاقة $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$، g تسارع الجاذبية الأرضية وهي $32\,ft/s^2$.

a) إذا كان طول البندول $2\,ft$. فما زمن اهتزازته؟

b) إذا كان زمن اهتزازة بندول $1.74\,s$، فما طول البندول بالأقدام.

4-4 التدريبات الإثرائية

تقريب الجذور التربيعية

لديك المفكوك التالي:

$$\left(a+\frac{b}{2a}\right)^2 = a^2 + \frac{2ab}{2a} + \frac{b^2}{4a^2}$$
$$= a^2 + b + \frac{b^2}{4a^2}$$

افترض أن قيمة a كبيرة جدًا مقارنة بقيمة b. عندها تكون القيمة $\frac{b^2}{4a^2}$ صغيرة جدًا، لدرجة أنه يمكن إهمالها في التقريب.

أي ان $\left(a+\frac{b}{2a}\right)^2 \approx a^2 + b$

$$a+\frac{b}{2a} \approx \sqrt{a^2+b}$$

افترض أن عددًا يمكن التعبير عنه على الصورة a^2+b ، حيث $a>b$، فإن القيمة التقريبية للجذر التربيعي للمقدار a^2+b تساوي $a+\frac{b}{2a}$. وكذلك يمكنك التوصل إلى القيمة التقريبية

$$a-\frac{b}{2a} \approx \sqrt{a^2-b}$$

مثال استخدم الصيغة $\sqrt{a^2 \pm b} \approx a \pm \frac{b}{2a}$ لتقريب قيمتي $\sqrt{101}$ و $\sqrt{622}$.

a) $\sqrt{101}=\sqrt{100+1}=\sqrt{10^2+1}$

لتكن $a=10$ و $b=1$

$$\sqrt{101} \approx 10+\frac{1}{2(10)}$$
$$\approx 10.05$$

b) $\sqrt{622}=\sqrt{625-3}=\sqrt{25^2-3}$

لتكن $a=25$ و $b=3$

$$\sqrt{622} \approx 25-\frac{3}{2(25)}$$
$$\approx 24.94$$

تمارين:

استعمل الصيغة السابقة لتقريب كل قيمة مما يأتي إلى أقرب جزء من مئة. تحقق من إجابتك مستعملًا الآلة الحاسبة.

1) $\sqrt{626}$ **2)** $\sqrt{99}$ **3)** $\sqrt{402}$

4) $\sqrt{1604}$ **5)** $\sqrt{223}$ **6)** $\sqrt{80}$

7) $\sqrt{4890}$ **8)** $\sqrt{2505}$ **9)** $\sqrt{3575}$

10) $\sqrt{1441100}$ **11)** $\sqrt{290}$ **12)** $\sqrt{260}$

13) بيِّن أن $a-\frac{b}{2a} \approx \sqrt{a^2-b}$ حيث $a > b$.

4-5 تدريبات إعادة التعليم

العمليات على العبارات الجذرية

تبسيط الجذور

خاصية ضرب الجذور	لأي عددين حقيقيين a و b، وأي عدد صحيح $n > 1$: 1) إذا كان n عددًا زوجيًا، a,b غير سالبين، فإن $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$. 2) إذا كان n عددًا فرديًا، فإن $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

اتبع الخطوات التالية لتبسيط الجذور التربيعية:

1) حلل ما تحت الجذور إلى مربعات ما أمكن ذلك.

2) استعمل خاصية ضرب الجذور لفصل المربعات الكاملة.

3) بَسِّط كل جذر.

خاصية قسمة الجذور	لأي عددين حقيقيين a و b، $b \neq 0$، وأي عدد صحيح $n > 1$ فإن $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ إذا كانت جميع الجذور معرَّفة.

للتخلص من الجذور في المقام، والكسور من المقدار تحت الجذور، اضرب كلًا من البسط والمقام بمقدار يسهل إيجاد الجذر الدقيق (إنطاق المقام).

مثال 1

بَسِّط $\sqrt[3]{-16a^5b^7}$

$$\sqrt[3]{-16a^5b^7} = \sqrt[3]{(-2)^3 \cdot 2 \cdot a^3 \cdot a^2 \cdot (b^2)^3 \cdot b}$$

$$= -2ab^2\sqrt[3]{2a^2b}$$

مثال 2

بَسِّط $\sqrt{\frac{8x^3}{45y^5}}$

$$\sqrt{\frac{8x^3}{45y^5}} = \frac{\sqrt{8x^3}}{\sqrt{45y^5}}$$ خاصية قسمة الجذور

$$= \frac{\sqrt{(2x)^2 \cdot 2x}}{\sqrt{(3y^2)^2 \cdot 5y}}$$ بالتحليل إلى مربعات

$$= \frac{\sqrt{(2x)^2} \cdot \sqrt{2x}}{\sqrt{(3y^2)^2} \cdot \sqrt{5y}}$$ خاصية الضرب

$$= \frac{2|x|\sqrt{2x}}{3y^2\sqrt{5y}}$$ بالتبسيط

$$= \frac{2|x|\sqrt{2x}}{3y^2\sqrt{5y}} \cdot \frac{\sqrt{5y}}{\sqrt{5y}}$$ بإنطاق المقام

$$= \frac{2|x|\sqrt{10xy}}{15y^3}$$ بالتبسيط

تمارين:

بَسِّط كلًا مما يأتي:

1) $5\sqrt{54}$

2) $\sqrt[4]{32a^9b^{20}}$

3) $\sqrt{75x^4y^7}$

4) $\sqrt{\frac{36}{125}}$

5) $\sqrt{\frac{a^6b^3}{98}}$

6) $\sqrt[3]{\frac{p^5q^3}{40}}$

4-5 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

العمليات على العبارات الجذرية

العمليات على الجذور: يمكنك جمع الجذور المتشابهة فقط عند جمع عبارات تحتوي على جذور. ويكون جذران متشابهين إذا كان لهما الدليل نفسه، وما تحت الجذر نفسه.

تستعمل خصائص الضرب والقسمة في ضرب الجذور، ولإيجاد ناتج $(a\sqrt{b}+c\sqrt{d})\cdot(e\sqrt{f}+g\sqrt{h})$ استعمل خاصية التوزيع. ولإنطاق المقام استعمل المرافق. تُعدُ كل من ثنائيتي الحد اللتين على الصورة $a\sqrt{b}-c\sqrt{d}$ و $a\sqrt{b}+c\sqrt{d}$ حيث a, b, c, d أعداد نسبية، مرافقة للأخرى. وحاصل ضرب المقدار بمرافقه عدد نسبي دائمًا.

مثال 1 **بسِّط $2\sqrt{50}+4\sqrt{500}-6\sqrt{125}$.**

$2\sqrt{50}+4\sqrt{500}-6\sqrt{125} = 2\sqrt{5^2\cdot 2}+4\sqrt{10^2\cdot 5}-6\sqrt{5^2\cdot 5}$ التحليل باستعمال المربعات

$= 2\cdot 5\cdot\sqrt{2}+4\cdot 10\cdot\sqrt{5}-6\cdot 5\cdot\sqrt{5}$ بتبسيط العبارات الجذرية

$= 10\sqrt{2}+40\sqrt{5}-30\sqrt{5}$ بالضرب

$= 10\sqrt{2}+10\sqrt{5}$ بدمج الحدود المتشابهة

مثال 2 **بَسِّط $(2\sqrt{3}-4\sqrt{2})(\sqrt{3}+2\sqrt{2})$**

$$(2\sqrt{3}-4\sqrt{2})(\sqrt{3}+2\sqrt{2})$$
$$= 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{2}-4\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}-4\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}$$
$$= 6+4\sqrt{6}-4\sqrt{6}-16$$
$$= -10$$

مثال 3 **بَسِّط $\dfrac{2-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$**

$$\frac{2-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{2-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$$
$$= \frac{6-2\sqrt{5}-3\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2}{3^2-(\sqrt{5})^2}$$
$$= \frac{6-5\sqrt{5}+5}{9-5}$$
$$= \frac{11-5\sqrt{5}}{4}$$

تمارين:

بَسِّط كلًّا مما يأتي:

1) $3\sqrt{2}+\sqrt{50}-4\sqrt{8}$

2) $\sqrt{20}+\sqrt{125}-\sqrt{45}$

3) $\sqrt{300}-\sqrt{27}-\sqrt{75}$

4) $\sqrt[3]{81}\cdot\sqrt[3]{24}$

5) $\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{12})$

6) $2\sqrt{3}(\sqrt{15}+\sqrt{60})$

7) $(2+3\sqrt{7})(4+\sqrt{7})$

8) $(6\sqrt{3}-4\sqrt{2})(3\sqrt{3}+\sqrt{2})$

9) $(4\sqrt{2}-3\sqrt{5})(2\sqrt{8}+\sqrt{5})$

10) $\dfrac{5\sqrt{48}+\sqrt{75}}{5\sqrt{3}}$

11) $\dfrac{4+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$

12) $\dfrac{5-3\sqrt{3}}{1+2\sqrt{3}}$

4-5 تدريبات المهارات

العمليات على العبارات الجذرية

بَسِّط كلًا مما يأتي:

1) $\sqrt{24}$

2) $\sqrt{75}$

3) $\sqrt[3]{16}$

4) $-\sqrt[4]{48}$

5) $4\sqrt{50x^5}$

6) $\sqrt[4]{64a^4b^4}$

7) $\sqrt[3]{-8d^2f^5}$

8) $\sqrt{\frac{25}{36}r^2t}$

9) $-\sqrt{\frac{3}{7}}$

10) $\sqrt[3]{\frac{2}{9}}$

11) $\sqrt{\frac{2g^3}{5z}}$

12) $(3\sqrt{3})(5\sqrt{3})$

13) $(4\sqrt{12})(3\sqrt{20})$

14) $\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{50}$

15) $\sqrt{12}-2\sqrt{3}+\sqrt{108}$

16) $8\sqrt{5}-\sqrt{45}-\sqrt{80}$

17) $2\sqrt{48}-\sqrt{75}-\sqrt{12}$

18) $(2+\sqrt{3})(6-\sqrt{2})$

19) $(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})$

20) $(3-\sqrt{7})(5+\sqrt{2})$

21) $(\sqrt{2}-\sqrt{6})^2$

22) $\frac{3}{7-\sqrt{2}}$

23) $\frac{4}{3+\sqrt{2}}$

24) $\frac{5}{8-\sqrt{6}}$

4-5 تدريبات حل المسألة

العمليات على العبارات الجذرية

1) مكعبات: يملك عمر صندوقًا على شكل متوازي مستطيلات أبعاده 20 بوصة، 35 بوصة، 40 بوصة. ويُريد أن يصنع صندوقًا جديدًا مكعب الشكل له حجم الصندوق السابق نفسه. فما طول ضلع الصندوق الجديد؟ اكتب إجابتك في أبسط صورة.

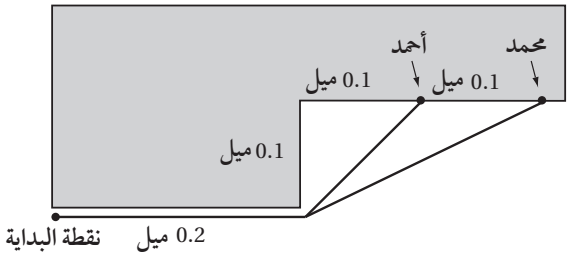
2) فيزياء: سرعة موجة تنتقل عبر خيط تُعطى بالعبارة $\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{u}}$ حيث t قوة شد الخيط، و u كثافة مادة الخيط. اكتب العبارة في أبسط صورة بإنطاق المقام.

3) إنارة: افرض أن شدة إنارة ضوء I_1 عندما كان مصدره على بُعد d_1، وشدة إنارة ضوء I_2 عندما كان مصدره على بُعد d_2 . هذه الكميات ترتبط بالمعادلة:

$$\frac{d_2}{d_1}=\sqrt{\frac{I_1}{I_2}}$$

افرض أن I_1 تساوي 50 وحدة. و I_2 تساوي 24 وحدة. فما قيمة $\frac{d_2}{d_1}$ ؟ اكتب إجابتك في أبسط صورة.

4) سباق: يريد محمد أن يتسابق مع أخيه الأصغر أحمد. وبعد عددٍ من السباقات توصلا إلى أن السباق العادل بينهما يتمثل في قطعهما مسافات مختلفة. انطلق محمد وأحمد من نقطة واحدة، وركضا 0.2 ميلًا معًا، ثم اتخذا مسارين مختلفين. ويبيِّن الشكل التالي نقطتي النهاية المختلفتين لهما. وعند وصولهما تبيَّن أن كلًّا منهما استغرق وقتًا مقداره 4 دقائق منذ انطلاق السباق.



إذا حافظ كل من محمد وأحمد خلال السباق على معدل سرعته ثابتًا. فكم دقيقة سيستغرق كل منهما لقطع مسافة ميل واحد؟ اكتب إجابتك في أبسط صورة.

4-5 التدريبات الإثرائية

نواتج ضرب خاصة في الجذور

لاحظ أن $(\sqrt{3})(\sqrt{3})=3$ أو $(\sqrt{3})^2=3$. وعمومًا، $(\sqrt{x})^2=x$ حيث $x \geq 0$.
ولاحظ أيضًا أن $\sqrt{4}.\sqrt{9}=\sqrt{36}$، وعمومًا، $(\sqrt{x})(\sqrt{y})=\sqrt{xy}$ حيث x و y ليسا سالبين.
يمكنك استخدام هذه الأفكار لإيجاد حواصل الضرب الخاصة الآتية.

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=a-b$$
$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2+2\sqrt{ab}+(\sqrt{b})^2=a+2\sqrt{ab}+b$$
$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2-2\sqrt{ab}+(\sqrt{b})^2=a-2\sqrt{ab}+b$$

مثال 1 **أوجد ناتج الضرب: $(\sqrt{2}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{5})$**

$$(\sqrt{2}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{5})=(\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2=2-5=-3$$

مثال 2 **أوجد قيمة: $(\sqrt{2}+\sqrt{8})^2$**

$$(\sqrt{2}+\sqrt{8})^2=(\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}\sqrt{8}+(\sqrt{8})^2$$
$$=2+2\sqrt{16}+8=2+2(4)+8=2+8+8=18$$

تمارين:

أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي:

1) $(\sqrt{3}-\sqrt{7})(\sqrt{3}+\sqrt{7})$

2) $(\sqrt{10}+\sqrt{2})(\sqrt{10}-\sqrt{2})$

3) $(\sqrt{2x}-\sqrt{6})(\sqrt{2x}+\sqrt{6})$

4) $(\sqrt{3}-(-7))^2$

5) $(\sqrt{1000}+\sqrt{10})^2$

6) $(\sqrt{y}+\sqrt{5})(\sqrt{y}-\sqrt{5})$

7) $(\sqrt{50}-\sqrt{x})^2$

8) $(\sqrt{x}+20)^2$

يمكنك توسيع الأفكار السابقة لتشمل أنماط مجموع وفرق مكعبين. ادرس النمط التالي، ثم أكمل الأسئلة 12–9.

$$(\sqrt[3]{8}-\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{8^2}+\sqrt[3]{8x}+\sqrt[3]{x^2})=\sqrt[3]{8^3}-\sqrt[3]{x^3}=8-x$$

9) $(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{5})(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{5^2})$

10) $(\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{w})(\sqrt[3]{y^2}-\sqrt[3]{yw}+\sqrt[3]{w^2})$

11) $(\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{20})(\sqrt[3]{7^2}-\sqrt[3]{140}+\sqrt[3]{20^2})$

12) $(\sqrt[3]{11}-\sqrt[3]{8})(\sqrt[3]{11^2}+\sqrt[3]{88}+\sqrt[3]{8^2})$

4-6 تدريبات إعادة التعليم

الأسس النسبية

الأسس النسبية والجذور

تعريف $b^{\frac{1}{n}}$	لأي عدد حقيقي b، وأي عدد صحيح موجب n، يكون $b^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{b}$ ما عدا عندما $b<0$ و n عدد صحيح زوجي.
تعريف $b^{\frac{m}{n}}$	لأي عدد حقيقي b، $b\neq 0$ ، وأي عددين صحيحين m، n و $n>1$. $b^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{b^m}=(\sqrt[n]{b})^m$ ، ما عدا عندما $b<0$ و n عدد صحيح زوجي.

مثال 1

اكتب $28^{\frac{1}{2}}$ على الصورة الجذرية

لاحظ أن $28>0$

$$28^{\frac{1}{2}}=\sqrt{28}$$
$$=\sqrt{2^2\cdot 7}$$
$$=\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{7}$$
$$=2\sqrt{7}$$

مثال 2

أوجد قيمة $\left(\frac{-8}{-125}\right)^{\frac{1}{3}}$

لاحظ أن 3 عدد فردي و $-125<0$ و $-8<0$

$$\left(\frac{-8}{-125}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt[3]{-8}}{\sqrt[3]{-125}}$$
$$=\frac{-2}{-5}$$
$$=\frac{2}{5}$$

تمارين:

اكتب كل عبارة أسية على الصورة الجذرية، وكل عبارة جذرية على الصورة الأسية.

1) $11^{\frac{1}{7}}$ 2) $15^{\frac{1}{3}}$ 3) $300^{\frac{3}{2}}$

4) $\sqrt{47}$ 5) $\sqrt[3]{3a^5b^2}$ 6) $\sqrt[4]{2p^5}$

أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي:

7) $-27^{\frac{2}{3}}$ 8) $216^{\frac{1}{3}}$ 9) $(0.0004)^{\frac{1}{2}}$

الاسم: _____ التاريخ: _____

(تتمة)

4-6 تدريبات إعادة التعليم

الأسس النسبية

تبسيط العبارات: يمكنك تطبيق جميع خصائص وقوانين الأسس التي تعلمتها سابقًا على الأسس النسبية. وعندما تبسط عبارات تحتوي على أسسٍ نسبية، أبقِ على الأسس النسبية، واكتب العبارة بأسس موجبة، وأي أسسٍ في المقام يتعيّن أن تكون صحيحة موجبة.

عندما تبسِّط عبارات جذرية قد تستعمل أسسًا نسبية، ولكن إجابتك النهائية يتعيّن أن تكون بالصورة الجذرية وبأصغر دليل ممكن للجذر.

مثال 1

بَسِّط $y^{\frac{2}{3}} \cdot y^{\frac{3}{8}}$

$$y^{\frac{2}{3}} \cdot y^{\frac{3}{8}} = y^{\frac{2}{3}+\frac{3}{8}} = y^{\frac{25}{24}}$$

مثال 2

بَسِّط $\sqrt[4]{144x^6}$

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{144x^6} &= (144x^6)^{\frac{1}{4}} \\ &= (2^4 \cdot 3^2 \cdot x^6)^{\frac{1}{4}} \\ &= (2^4)^{\frac{1}{4}} \cdot (3^2)^{\frac{1}{4}} \cdot (x^6)^{\frac{1}{4}} \\ &= 2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{3}{2}} = 2x \cdot (3x)^{\frac{1}{2}} = 2x\sqrt{3x}\end{aligned}$$

تمارين:

بسِّط كل عبارة فيما يأتي:

1) $x^{\frac{4}{5}} \cdot x^{\frac{6}{5}}$

2) $\left(y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$

3) $p^{\frac{4}{5}} \cdot p^{\frac{7}{10}}$

4) $\left(m^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{2}{5}}$

5) $x^{\frac{3}{8}} \cdot x^{\frac{4}{3}}$

6) $\left(s^{\frac{1}{6}}\right)^{\frac{4}{3}}$

7) $\dfrac{p}{p^{\frac{1}{3}}}$

8) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}$

9) $\sqrt[6]{128}$

10) $\sqrt[4]{49}$

11) $\sqrt[5]{288}$

12) $\sqrt{32} \cdot 3\sqrt{16}$

4-6 تدريبات المهارات

الأسس النسبية

اكتب كل عبارة أسية على الصورة الجذرية، وكل عبارة جذرية على الصورة الأسية فيما يأتي.

1) $3^{\frac{1}{6}}$

2) $8^{\frac{1}{5}}$

3) $\sqrt{51}$

4) $\sqrt[4]{15^3}$

5) $12^{\frac{2}{3}}$

6) $\sqrt[3]{37}$

7) $(c^3)^{\frac{3}{5}}$

8) $\sqrt[3]{6xy^2}$

أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي:

9) $32^{\frac{1}{5}}$

10) $81^{\frac{1}{4}}$

11) $27^{\frac{1}{3}}$

12) $16^{\frac{3}{2}}$

13) $27^{\frac{1}{3}} \cdot 27^{\frac{5}{3}}$

14) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}}$

بسِّط كل عبارة مما يأتي:

15) $c^{\frac{12}{5}} \cdot c^{\frac{3}{5}}$

16) $m^{\frac{2}{9}} \cdot m^{\frac{16}{9}}$

17) $\left(q^{\frac{1}{2}}\right)^3$

18) $p^{\frac{1}{5}} \cdot p^{\frac{1}{2}}$

19) $x^{\frac{6}{11}} \cdot x^{\frac{4}{11}}$

20) $\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{4}}}$

21) $\dfrac{y^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{4}}}$

22) $\dfrac{n^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{6}} \cdot n^{\frac{1}{2}}}$

23) $\sqrt[12]{64}$

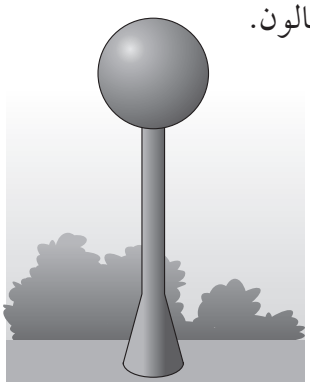
24) $\sqrt[8]{49a^8}$

4-6 تدريبات حل المسألة

الأسس النسبية

1) تربيع المكعب: طول ضلع مكعب (s). ما طول ضلع المربع الذي تكون القيمة العددية لمساحته تساوي القيمة العددية لحجم هذا المكعب؟ اكتب إجابتك مستعملًا الأسس النسبية.

2) برج الماء: يُخزَّنُ ماء الشرب في بعض المدن في أبراج للماء. ويبلغ ارتفاع برج الماء في إحدى المدن 218 قدمًا، ويتسع إلى نصف مليون جالون.



أرادت بلدية المدينة بناء برج جديد للماء تعادل سعة كرته 10 أمثال سعة كرة البرج القديم. كم مرة يساوي نصف قطر الكرة الجديدة نصف قطر الكرة القديمة؟ اكتب إجابتك مستعملًا الأسس النسبية.

3) بالونات: يُنفخ بالون كروي الشكل بالهواء، وكان حجمه كدالة في الزمن $9\pi t^2$. ما طول نصف قطر البالون كدالة في الزمن(t) ؟ اكتب إجابتك مستعملًا الأسس النسبية.

4) خلايا: ينمو عدد الخلايا في مزرعة بصورة أسية. وعدد الخلايا في المزرعة كدالة في الزمن يُعطى بالعبارة $N\left(\frac{6}{5}\right)^t$ ، حيث t الزمن بالساعات، وN عدد الخلايا الأصلي الذي بدأت به المزرعة.

a) أصبح عدد الخلايا بعد 3 ساعات 1728 خلية، ما قيمة N؟

b) ما عدد الخلايا في المزرعة بعد 20 دقيقة؟

c) كم كان عدد الخلايا في المزرعة بعد مرور 2.5 ساعة؟

4-6 التدريبات الإثرائية

صيغ هندسية محدودة الاستعمال

تتضمن كثير من الصيغ الهندسية عبارات جذرية.

ارسم أشكالًا لتوضيح الصيغ الهندسية المعطاة في هذه الصفحة، ثم أوجد قيمة كل صيغة عند القيم المعطاة للمتغيرات.

قرب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.

1) مساحة مثلث متطابق الضلعين (A). طول كل من ضلعية المتطابقين a، وطول الضلع الثالث c، هي: $A=\frac{c}{4}\sqrt{4a^2-c^2}$

أوجد A عندما $a=6$ و $c=7$.

2) مساحة مثلث متطابق الأضلاع (A) طول ضلعه a، هي: $A=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$

أوجد A عندما $a=8$

3) مساحة خُماسي منتظم (A) طول ضلعه a، هي: $A=\frac{a^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$

أوجد A عندما $a=4$.

4) مساحة سداسي منتظم (A) طول ضلعه a تعطى بالعلاقة: $A=\frac{3a^2}{2}\sqrt{3}$

أوجد A عندما $a=9$.

5) حجم رباعي سطوح منتظم (V) طول حرفه a، هي: $V=\frac{a^3}{12}\sqrt{2}$

أوجد V عندما $a=2$.

6) مساحة السطح المنحني لمخروط قائم (S) ارتفاعه h وطول نصف قطر قاعدته r، هي: $S=\pi r\sqrt{r^2+h^2}$

أوجد S عندما $r=3$ و $h=6$

7) قاعدة هيرون لحساب مساحة مثلث (A) باستعمال نصف محيطه s. حيث $s=\frac{a+b+c}{2}$ و a و b و c هي أطوال أضلاع المثلث، هي:

$A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

أوجد A عندما $a=3$ و $b=4$ و $c=5$

4-7 تدريبات إعادة التعليم

حل المعادلات والمتباينات الجذرية

حل المعادلات الجذرية : تستخدم الخطوات الآتية في حل المعادلات التي تحتوي على متغيرات تحت الجذر. وقد تحتاج أحيانًا إلى إجراء بعض العمليات الجبرية قبل استخدام هذه الخطوات.

الخطوة 1: افصل الجذر في أحد طرفي المعادلة.
الخطوة 2: للتخلص من الجذر، ارفع طرفي المعادلة لأس يساوي دليل الجذر.
الخطوة 3: حل المعادلة الناتجة.
الخطوة 4: تحقق من حلك في المعادلة الأصلية للتأكد من أنك لم تحصل على جذور دخيلة.

مثال 1 **حل المعادلة $2\sqrt{(4x+8)}-4=8$**

$2\sqrt{4x+8}-4=8$	المعادلة الأصلية
$2\sqrt{4x+8}=12$	بجمع 4 للطرفين
$\sqrt{4x+8}=6$	فصل الجذر في طرف المعادلة
$4x+8=36$	بتربيع الطرفين
$4x=28$	بطرح 8 من الطرفين
$x=7$	بقسمة الطرفين على 4

تحقق

$2\sqrt{4(7)+8}-4 \stackrel{?}{=} 8$

$2\sqrt{36}-4 \stackrel{?}{=} 8$

$2(6)-4 \stackrel{?}{=} 8$

$8=8$

مثال 2 **حل المعادلة $\sqrt{(3x+1)}=\sqrt{5x}-1$**

$\sqrt{3x+1}=\sqrt{5x}-1$	المعادلة الأصلية
$3x+1=5x-2\sqrt{5x}+1$	بتربيع الطرفين
$2\sqrt{5x}=2x$	بالتبسيط
$\sqrt{5x}=x$	فصل الجذر في طرف المعادلة
$5x=x^2$	بتربيع الطرفين
$x^2-5x=0$	بطرح $5x$ من الطرفين
$x(x-5)=0$	بالتحليل إلى العوامل
$x=0\ ,\ x=5$	

تحقق

اذن $x=0$ ليس حلًا, $\sqrt{3(0)+1}=1, \sqrt{5(0)}-1=-1$

إذن $x=5$ هو الحل, $\sqrt{3(5)+1}=4, \sqrt{5(5)}-1=4$

تمارين:

حل كل معادلة مما يأتي:

1) $2\sqrt{3x+4}+1=15$ **2)** $8+\sqrt{x+1}=2$ **3)** $\sqrt{5-x}-4=6$

4) $\sqrt{12-x}=0$ **5)** $\sqrt{21}-\sqrt{5x-4}=0$ **6)** $10-\sqrt{2x}=5$

7) $\sqrt{4+7x}=\sqrt{7x-9}$ **8)** $4\sqrt[3]{2x+11}-2=10$ **9)** $(9x-11)^{\frac{1}{2}}=x+1$

4-7 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

حل المعادلات والمتباينات الجذرية

حل المتباينات الجذرية : المتباينة الجذرية هي متباينة تحتوي متغيرًا في الصورة الجذرية، ولحل متباينة جذرية، اتبع الخطوات الآتية:

الخطوة 1: إذا كان دليل الجذر عددًا زوجيًا، فعيِّن قيم المتغير التي لا تجعل ما تحت الجذر سالبًا.
الخطوة 2: حل المتباينة جبريًا.
الخطوة 3: اختبر القيم للتأكد من صحة الحل.

مثال **حل المتباينة $5-\sqrt{20x+4} \geq -3$**

بما أن ما تحت الجذر التربيعي يتعيّن أن يكون موجبًا أو صفرًا. فحل أولًا $20x+4 \geq 0$.

$$20x + 4 \geq 0$$
$$20x \geq -4$$
$$x \geq -\frac{1}{5}$$

الآن حل المتباينة $5-\sqrt{20x+4} \geq -3$

$5 - \sqrt{20x+4} \geq -3$	المتباينة الأصلية
$\sqrt{20x+4} \leq 8$	فصل الجذر في طرف المتباينة
$20x + 4 \leq 64$	بتربيع الطرفين
$20x \leq 60$	بطرح 4 من الطرفين
$x \leq 3$	بقسمة الطرفين على 20

يتضح أن الحل هو $-\frac{1}{5} \leq x \leq 3$. اختبر بعض القيم في المتباينة الأصلية.

تمارين:

حل كل متباينة مما يأتي:

1) $\sqrt{c-2}+4 \geq 7$ **2)** $3\sqrt{2x-1}+6 < 15$ **3)** $\sqrt{10x+9}-2 > 5$

4) $8-\sqrt{3x+4} \geq 3$ **5)** $\sqrt{2x+8}-4 > 2$ **6)** $9-\sqrt{6x+3} \geq 6$

7) $2\sqrt{5x-6}-1 < 5$ **8)** $\sqrt{2x+12}+4 \geq 12$

4-7 تدريبات المهارات

حل المعادلات والمتباينات الجذرية

حل كل معادلة مما يأتي:

1) $\sqrt{x} = 5$

2) $\sqrt{x} + 3 = 7$

3) $5\sqrt{j} = 1$

4) $v^{\frac{1}{2}} + 1 = 0$

5) $18 - 3y^{\frac{1}{2}} = 25$

6) $\sqrt[3]{2w} = 4$

7) $\sqrt{b-5} = 4$

8) $\sqrt{3n+1} = 5$

9) $\sqrt[3]{3r-6} = 3$

10) $2 + \sqrt{3p+7} = 6$

11) $\sqrt{k-4} - 1 = 5$

12) $(2d+3)^{\frac{1}{3}} = 2$

13) $(t-3)^{\frac{1}{3}} = 2$

14) $4 - (1-7u)^{\frac{1}{3}} = 0$

15) $\sqrt{3z-2} = \sqrt{z-4}$

16) $\sqrt{g+1} = \sqrt{2g-7}$

حل كل متباينة مما يأتي:

17) $4\sqrt{x+1} \geq 12$

18) $5 + \sqrt{c-3} \leq 6$

19) $-2 + \sqrt{3x+3} < 7$

20) $-\sqrt{2a+4} \geq -6$

21) $2\sqrt{4r-3} > 10$

22) $4 - \sqrt{3x+1} > 3$

23) $\sqrt{y+4} - 3 \geq 3$

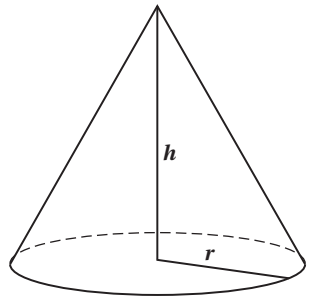
24) $-3\sqrt{11r+3} \geq -15$

4-7 تدريبات حل المسألة

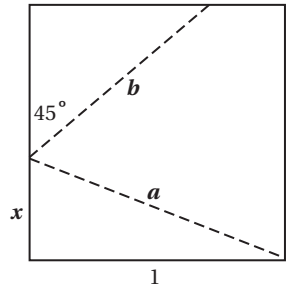
حل المعادلات والمتباينات الجذرية

1) لوحات: ينفق رسام $(400+8n^{\frac{2}{3}})$ ريالًا لرسم n لوحة. كم لوحة يمكنه رسمها بمبلغ 1200 ريال؟

2) المساحة الجانبية: المساحة الجانبية لمخروط ارتفاعه h ونصف قطر قاعدته r تُعطى بالصيغة $L=\pi r\sqrt{r^2+h^2}$. إذا كانت المساحة الجانبية تساوي 65π وحدة مربعة، وطول نصف قطر القاعدة 5 وحدات، فأوجد ارتفاع المخروط.

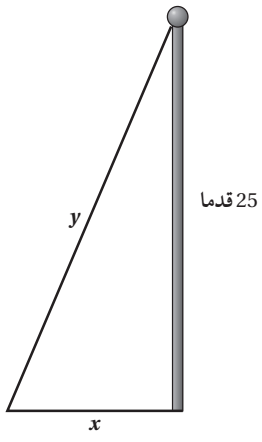


3) الأوريغامي (*ORIGAMI*): يريد صلاح أن يطوي ورقة مربعة الشكل لعمل مثلث متطابق الأضلاع، ويريد أن يحدد x على ضلع الورقة ليقوم بطي الورقة حول الخط المتقطع المبيَّن بالشكل حيث $a=b$.



وباستعمال معلوماته السابقة في الهندسة يعلم صلاح أن $a=\sqrt{1+x^2}$ و $b=\sqrt{2}(1-x)$. وعليه أن يحل المعادلة $\sqrt{1+x^2}=\sqrt{2}(1-x)$. فما قيمة x؟

4) حبال: رُبط طرفا حبل في قاعدة سارية وقمتها على صورة الشكل التالي. وكان $x+y=50$ ، اعتمادًا على نظرية فيثاغورس، المسافة $y=\sqrt{x^2+25^2}$. ما قيمة x؟



5) مدى: تتابع وكالة الفضاء الأمريكية "ناسا" أكثر من 300 كويكب تمر قريبة من الأرض. افترض أن الأرض تمثل نقطة الأصل في مستوى إحداثي، فيكون مسار الكويكب وفق العلاقة $y=\frac{17}{x}$, $x>0$. حيث كل وحدة تقابل مليون ميل. ويقول راصد فلكي أنه يمكنه مشاهدة الكويكب في المنظار الفلكي عندما يكون ضمن مسافة $\frac{145}{12}$ مليون ميل عن الأرض.

a) اكتب عبارة تعطي بُعد الكويكب عن الأرض بدلالة x.

b) ما قيم x التي تجعل الكويكب ضمن مدى المنظار الفلكي للراصد؟

4-7 التدريبات الإثرائية

جداول الصواب

العمليات الأساسية في الرياضيات هي: الجمع، والطرح، والضرب، والقسمة، وإيجاد قيمة جذر، وإيجاد قيمة قوة. وفي المنطق، العمليات الأساسية هي: النفي (~)، و (∧) ، أو (∨)، يتضمن (←).

إذا كانت P و q عبارتين، فإن $\sim P$ تعني نفي العبارة P،و ($p \wedge q$ تعني p و q)، ($p \vee q$ تعني p أو q)، ($p \rightarrow q$ تعني أن العبارة p تتضمن العبارة q). وعمليات المنطق معرَّفة في جداول تسمى جداول الصواب. والجداول التالية تمثل العمليات: $\sim P$ و $p \wedge q$ و $p \vee q$ و $p \rightarrow q$ على الترتيب من اليسار إلى اليمين.

لاحظ في جدول الصواب للعبارة $\sim P$ أنه توجد حالتان ممكنتان للعبارة P هما: صواب (T) وخطأ (F). ويبيِّن الجدول أنه عندما تكون p خطأ تكون $\sim P$ صائبة.

p	$\sim p$
T	F
F	T

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

يمكنك أن تحدد الشروط والحالات التي تكون فيها عبارة مركبة صائبة، مستعملًا المعلومات المتوافرة في الجداول السابقة.

مثال **ما الشروط التي تجعل العبارة ($\sim p \vee q$) صائبة.**

اعمل جدول الصواب للعبارة، مستعملًا المعلومات المتوافرة في جدول الصواب للعبارة $p \vee q$ السابقة لإكمال العمود الأخير في الجدول.

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

يدل جدول الصواب على أن العبارة $\sim p \wedge q$ صائبة في جميع الحالات باستثناء الحالة التي تكون فيها p صائبة و q خطأ.

استعمل جداول الصواب لتحديد الشروط التي تكون عندها كل من العبارات الآتية صائبة.

1) $\sim p \vee \sim q$

2) $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$

3) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

4) $(\sim p \wedge \sim q) \rightarrow \sim (p \vee q)$

ملحق الإجابات

الاسم: _____ التاريخ: _____

4-1 تدريبات إعادة التعليم

العمليات على الدوال

العمليات الحسابية

الجمع	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
الطرح	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$
الضرب	$(f\bullet g)(x)=f(x)\bullet g(x)$
القسمة	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}, g(x)\neq 0$

مثال أوجد $(f+g)(x)$ و $(f-g)(x)$ و $(f\bullet g)(x)$ و $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ حيث $f(x)=x^2+3x-4$ و $g(x)=3x-2$.

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	جمع الدوال
$=(x^2+3x-4)+(3x-2)$	بالتعويض بدل $f(x)$ و $g(x)$.
$=x^2+6x-6$	بالتبسيط
$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$	طرح الدوال
$=(x^2+3x-4)-(3x-2)$	بالتعويض بدل $f(x)$ و $g(x)$
$=x^2-2$	بالتبسيط
$(f\bullet g)(x)=f(x)\bullet g(x)$	ضرب الدوال
$=(x^2+3x-4)(3x-2)$	بالتعويض بدل $f(x)$ و $g(x)$
$=x^2(3x-2)+3x(3x-2)-4(3x-2)$	خاصية التوزيع
$=3x^3-2x^2+9x^2-6x-12x+8$	خاصية التوزيع
$=3x^3+7x^2-18x+8$	بالتبسيط
$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}, g(x)\neq 0$	قسمة الدوال
$=\frac{x^2+3x-4}{3x-2}, x\neq\frac{2}{3}$	بالتعويض بدل $f(x)$ و $g(x)$

تمارين:

أوجد $(f+g)(x)$ و $(f-g)(x)$ و $(f\bullet g)(x)$ و $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ للدالتين $f(x)$، $g(x)$ فيما يأتي:

1) $f(x)=8x-3; g(x)=4x+5$
$12x+2$; $4x-8$; $32x^2+28x-15$; $\frac{8x-3}{4x+5}, x\neq -\frac{5}{4}$

2) $f(x)=x^2+x-6; g(x)=x-2$
x^2+2x-8; x^2-4; $x^3-x^2-8x+12$; $x+3, x\neq 2$

3) $f(x)=3x^2-x+5; g(x)=2x-3$
$3x^2+x+2$; $3x^2-3x+8$; $6x^3-11x^2+13x-15$; $\frac{3x^2-x+5}{2x-3}, x\neq\frac{3}{2}$

4) $f(x)=2x-1; g(x)=3x^2+11x-4$
$3x^2+13x-5$; $-3x^2-9x+3$; $6x^3+19x^2-19x+4$; $\frac{2x-1}{(3x-1)(x+4)}, x\neq\frac{1}{3}, -4$

5) $f(x)=x^2-1; g(x)=\frac{1}{x+1}$
$x^2-1+\frac{1}{x+1}, x\neq -1$; $x^2-1-\frac{1}{x+1}, x\neq -1$; $x-1, x\neq -1$; $x^3+x^2-x-1, x\neq -1$

4-1 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

العمليات على الدوال

تركيب دالتين: لتكن f و g دالتين بحيث أن مدى g مجموعة جزئية من مجال f. فإن تركيب الدالتين $f\circ g$ يعرف بالمعادلة: $[f\circ g](x)=f[g(x)]$.

مثال 1 إذا كانت $f=\{(1,2),(3,3),(2,4),(4,1)\}$ و $g=\{(1,3),(3,4),(2,2),(4,1)\}$ فأوجد $f\circ g$ و $g\circ f$ إذا كان ذلك ممكنًا.

$f[g(4)]=f(1)=2$ $f[g(3)]=f(4)=1$ $f[g(2)]=f(2)=4$ $f[g(1)]=f(3)=3$

أي أن: $f\circ g=\{(1,3),(2,4),(3,1),(4,2)\}$

$g[f(4)]=g(1)=3$ $g[f(3)]=g(3)=4$ $g[f(2)]=g(4)=1$ $g[f(1)]=g(2)=2$

أي أن: $g\circ f=\{(1,2),(2,1),(3,4),(4,3)\}$

مثال 2 أوجد $[h\circ g](x)$ و $[g\circ h](x)$ للدالتين $g(x)=3x-4$ و $h(x)=x^2-1$

$[h\circ g](x)=h[g(x)]$	$[g\circ h](x)=g[h(x)]$
$=h(3x-4)$	$=g(x^2-1)$
$=(3x-4)^2-1$	$=3(x^2-1)-4$
$=9x^2-24x+16-1$	$=3x^2-7$
$=9x^2-24x+15$	

تمارين:

أوجد $f\circ g$ و $g\circ f$ لكل زوج من الدوال، إذا كان ذلك ممكنًا:

1) $f=\{(-1,2),(5,6),(0,9)\}$, $g=\{(6,0),(2,-1),(9,5)\}$
$f\circ g=\{(2,2),(6,9),(9,6)\}$; $g\circ f=\{(-1,-1),(0,5),(5,0)\}$

2) $f=\{(5,-2),(9,8),(-4,3),(0,4)\}$, $g=\{(3,7),(-2,6),(4,-2),(8,10)\}$
$f\circ g$ غير موجودة
$g\circ f=\{(-4,7),(0,-2),(5,6),(9,10)\}$

أوجد $[f\circ g](x)$ و $[g\circ f](x)$ في كل مما يأتي، إذا كان ذلك ممكنًا.

3) $f(x)=2x+7; g(x)=-5x-1$
$[f\circ g](x)=-10x+5$, $[g\circ f](x)=-10x-36$

4) $f(x)=x^2-1; g(x)=-4x^2$
$[f\circ g](x)=16x^4-1$, $[g\circ f](x)=-4x^4+8x^2-4$

5) $f(x)=x^2+2x; g(x)=x-9$
$[f\circ g](x)=x^2-16x+63$, $[g\circ f](x)=x^2+2x-9$

6) $f(x)=5x+4; g(x)=3-x$
$[f\circ g](x)=19-5x$, $[g\circ f](x)=-1-5x$

4-1 تدريبات المهارات

العمليات على الدوال

أوجد $(f+g)(x)$ و $(f-g)(x)$ و $(f\cdot g)(x)$ و $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ للدالتين $f(x)$ و $g(x)$ في كل مما يأتي:

1) $f(x)=x+5$, $g(x)=x-4$; $2x+1$; 9; x^2+x-20; $\frac{x+5}{x-4}, x\neq 4$

2) $f(x)=3x+1$, $g(x)=2x-3$; $5x-2$; $x+4$; $6x^2-7x-3$; $\frac{3x+1}{2x-3}, x\neq\frac{3}{2}$

3) $f(x)=x^2$, $g(x)=4-x$; x^2-x+4; x^2+x-4; $4x^2-x^3$; $\frac{x^2}{4-x}, x\neq 4$

4) $f(x)=3x^2$, $g(x)=\frac{5}{x}$; $\frac{3x^3+5}{x}, x\neq 0$; $\frac{3x^3-5}{x}, x\neq 0$; $15x, x\neq 0$; $\frac{3x^3}{5}, x\neq 0$

أوجد $f\circ g$ و $g\circ f$ لكل زوج من الدوال الآتية، إذا كان ذلك ممكنًا:

5) $f=\{(0,0),(4,-2)\}$, $g=\{(0,4),(-2,0),(5,0)\}$; $\{(0,-2),(-2,0),(5,0)\}$; $\{(0,4),(4,0)\}$

6) $f=\{(0,-3),(1,2),(2,2)\}$, $g=\{(-3,1),(2,0)\}$; $\{(-3,2),(2,-3)\}$; $\{(0,1),(1,0),(2,0)\}$

7) $f=\{(-4,3),(-1,1),(2,2)\}$, $g=\{(1,-4),(2,-1),(3,-1)\}$; $\{(1,3),(2,1),(3,1)\}$; $\{(-4,-1),(-1,-4),(2,-1)\}$

8) $f=\{(6,6),(-3,-3),(1,3)\}$, $g=\{(-3,6),(3,6),(6,-3)\}$; $\{(-3,6),(3,6),(6,-3)\}$; $\{(6,-3),(-3,6),(1,6)\}$

أوجد $[g\circ h]$ و $[h\circ g](x)$ في كل مما يأتي، إذا كان ذلك ممكنًا:

9) $g(x)=2x$, $h(x)=x+2$; $2x+4$; $2x+2$

10) $g(x)=-3x$, $h(x)=4x-1$; $-12x+3$; $-12x-1$

11) $g(x)=x-6$, $h(x)=x+6$; x; x

12) $g(x)=x-3$, $h(x)=x^2$; x^2-3; x^2-6x+9

13) $g(x)=5x$, $h(x)=x^2+x-1$; $5x^2+5x-5$; $25x^2+5x-1$

14) $g(x)=x+2$, $h(x)=2x^2-3$; $2x^2-1$; $2x^2+8x+5$

إذا كان $f(x)=3x$ و $g(x)=x+4$ و $h(x)=x^2-1$، فأوجد قيمة كل مما يأتي:

15) $f[g(1)]$ **15**

16) $g[h(0)]$ **3**

17) $g[f(-1)]$ **1**

18) $h[f(5)]$ **224**

19) $g[h(-3)]$ **12**

20) $h[f(10)]$ **899**

21) $f[h(8)]$ **189**

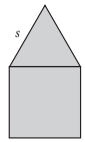
22) $[f\circ(h\circ g)](1)$ **72**

23) $[f\circ(g\circ h)](-2)$ **21**

4-1 تدريبات حل المسألة

العمليات على الدوال

1) **المساحة:** يريد خالد إيجاد مساحة الشكل التالي المكون من مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه (s) ومربع طول ضلعه (s). الدالة التي تعطي مساحة المثلث هي: $f(s)=\frac{\sqrt{3}}{4}s^2$، والدالة التي تعطي مساحة المربع هي $g(s)=s^2$. ما الدالة $h(s)$ التي تعطي مساحة الشكل كاملًا بدلالة (s)؟



$$h(s)=(f+g)(s)=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+1\right)s^2$$

2) **أسعار:** قررت شركة حاسوب ضبط الأسعار والخصومات لتبقى لديها القدرة على المنافسة. الدالة $p(t)$ تعطي سعر البيع بالريال للحاسوب من الفئة A بدلالة الزمن (t). والدالة $D(t)$ تعطي قيمة خصم خاص لتشجيع الزبائن الدائمين. فكم ريالًا سيدفع زبون دائم ثمنًا لشراء حاسوب من الفئة A بدلالة الزمن (t)؟

$$(P-D)(t)$$

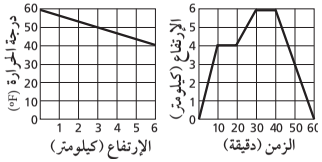
3) **حمم:** قيست درجة حرارة حمم فكانت $2000^\circ F$، بدأت الحمم تبرد بحيث أن درجة حرارتها بعد زمن (t) تعطى بالدالة $T(t)$. إذا كانت $C(F)$ دالة تعطي درجة الحرارة السيليزية بدلالة الدرجة الفهرنهايتية. فما الدالة التي تعطي حرارة الحمم بالدرجات السيليزية بدلالة الزمن (t)؟

$$C\,[T(t)]$$

4) **هندسة:** صممت مجموعة مهندسين آلة تدبيس ورق، وكانت سرعة غرز الدبابيس (s) (بالأقدام لكل ثانية) بدلالة طول ذراع الآلة (l) (بالبوصة) تعطى بالعلاقة $s(l)=40+3l$. وحددت مجموعة أخرى من المهندسين عدد الأوراق N التي يمكن تدبيسها بدلالة السرعة (s) بالدالة $N(s)=\frac{s-10}{3}$.
ما الدالة التي تعطي N بدلالة l؟

$$N[s(\ell)]=10+\ell$$

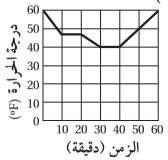
5) **منطاد:** ركب أحمد ومصعب منطادًا يسير بالهواء الساخن لمدة ساعة واحدة. لتكن $T(A)$ درجة حرارة الهواء الخارجي بدلالة ارتفاع المنطاد (A). و $A(t)$ الدالة التي تعطي ارتفاع المنطاد بدلالة الزمن (t).



a) ما الدالة التي تعطي درجة حرارة الهواء (T) بدلالة الزمن (t)؟

$$T\,[A(t)]$$

b) ارسم الدالة التي حصلت عليها في الفرع **a** معتمدًا على الشكلين السابقين اللذين يمثلان الدالتين $T(A)$ و $A(t)$.



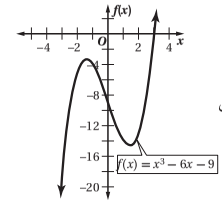
الاسم: _____ التاريخ: _____

4-1 التدريبات الإثرائية

قيم عظمى محلية

يبيّن منحنى الدالة $f(x)=x^3-6x-9$ المجاور وجود قيمة عظمى محلية للدالة بين القيمتين $f(-2)$ و $f(-1)$، ويمكنك الحصول على قيمة أكثر قربًا لهذه القيمة العظمى المحلية بمقارنة القيم في الجدول المجاور.

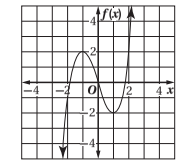
القيمة العظمى المحلية هي -3.3 لأقرب جزء من عشرة.



x	$f(x)$
-2	-5
-1.5	-3.375
-1.4	-3.344
-1.3	-3.397
-1	-4

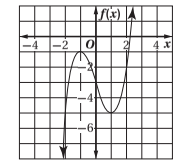
أوجد قيمة عظمى محلية لكل دالة ممثلة فيما يأتي مقربة إلى أقرب جزء من عشرة.

1) $f(x)=x(x^2-3)$



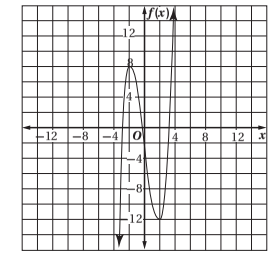
عظمى محلية = 2.0

2) $f(x)=x^3-3x-3$



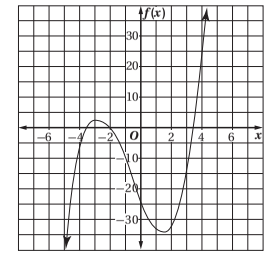
عظمى محلية = −1.0

3) $f(x)=x^3-9x-2$



عظمى محلية = 8.4

4) $f(x)=x^3+2x^2-12x-24$



عظمى محلية = 3.3

الاسم: _____ التاريخ: _____

4-2 تدريبات إعادة التعليم

العلاقات والدوال العكسية

إيجاد الدالة العكسية

العلاقات العكسية	تكون كل من العلاقتين عكسية للأخرى، إذا وفقط إذا كان كل زوج مرتب مثل (a, b) ينتمي لإحداهما، فإن الزوج (b, a) ينتمي للأخرى.
خصائص الدوال العكسية	افرض أن f، f^{-1} دالتان كل منهما عكسية للأخرى، فإن: $f(a)=b$، إذا وفقط إذا كان $f^{-1}(b)=a$.

مثال أوجد الدالة العكسية للدالة $f(x)=\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}$، ثم مثّل $f(x)$ ودالتها العكسية بيانيًّا.

الخطوة 1: ضع y بدلًا من $f(x)$ في الدالة الأصلية.

$$f(x)=\frac{2}{5}x-\frac{1}{5} \rightarrow y=\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}$$

الخطوة 2: بدل y، x مع بعضهما

$$x=\frac{2}{5}y-\frac{1}{5}$$

الخطوة 3: حل المعادلة السابقة في y.

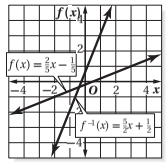
$$x=\frac{2}{5}y-\frac{1}{5}$$ العكسية لـ $y=\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}$

$$5x=2y-1$$ بضرب الطرفين بالعدد 5.

$$5x+1=2y$$ بجمع العدد 1 للطرفين

$$\frac{1}{2}(5x+1)=y$$ بقسمة الطرفين على 2

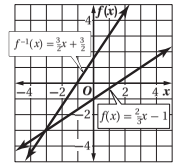
إذن، الدالة العكسية للدالة $f(x)=\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}$ هي $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(5x+1)$



تمارين:

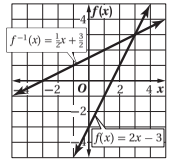
أوجد الدالة العكسية لكل دالة مما يأتي، ثم ارسم منحنى الدالة، ومنحنى الدالة العكسية.

1) $f(x)=\frac{2}{3}x-1$



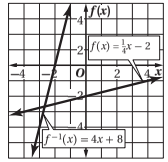
$f^{-1}(x)=\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}$

2) $f(x)=2x-3$



$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

3) $f(x)=\frac{1}{4}x-2$



$f^{-1}(x)=4x+8$

4-2 تدريبات إعادة التعليم

(تتمة)

العلاقات والدوال العكسية

التحقق من الدالة العكسية

الدوال العكسية	تكون كل من الدالتين $f(x)$ و$g(x)$ عكسية للأخرى إذا وفقط إذا كان: $[g\circ f](x)=x$ و $[f\circ g](x)=x$

مثال 1 حدد إن كانت $f(x)=2x-7$ و$g(x)=\frac{1}{2}(x+7)$ كل منهما دالة عكسية للأخرى أم لا.

$$[f\circ g](x)=f[g(x)]$$
$$=f[\tfrac{1}{2}(x+7)]$$
$$=2[\tfrac{1}{2}(x+7)]-7$$
$$=x+7-7$$
$$=x$$

$$[g\circ f](x)=g[f(x)]$$
$$=g(2x-7)$$
$$=\tfrac{1}{2}(2x-7+7)$$
$$=x$$

إذن، الدالتان $f(x)$ و$g(x)$ كل منهما عكسية للأخرى.

مثال 2 حدد إن كانت $f(x)=4x+\frac{1}{3}$ و$g(x)=\frac{1}{4}x-3$ كل منهما دالة عكسية للأخرى أم لا.

$$[f\circ g](x)=f[g(x)]$$
$$=f\left(\tfrac{1}{4}x-3\right)$$
$$=4\left(\tfrac{1}{4}x-3\right)+\tfrac{1}{3}$$
$$=x-12+\tfrac{1}{3}$$
$$=x-11\tfrac{2}{3}$$

وبما أن $[f\circ g](x)\neq x$ ، فإن الدالتين ليست كل منهما عكسية للأخرى.

تمارين:

حدد إن كانت كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا في كل زوج مما يأتي. اكتب (نعم) أو (لا).

1) $f(x)=3x-1$, $g(x)=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$ — نعم
2) $f(x)=\frac{1}{4}x+5$, $g(x)=4x-20$ — نعم
3) $f(x)=\frac{1}{2}x-10$, $g(x)=2x+\frac{1}{10}$ — لا
4) $f(x)=2x+5$, $g(x)=5x+2$ — لا
5) $f(x)=8x-12$, $g(x)=\frac{1}{8}x+12$ — لا
6) $f(x)=-2x+3$, $g(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ — نعم
7) $f(x)=4x-\frac{1}{2}$, $g(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}$ — نعم
8) $f(x)=2x-\frac{3}{5}$, $g(x)=\frac{1}{10}(5x+3)$ — نعم
9) $f(x)=4x+\frac{1}{2}$, $g(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ — لا
10) $f(x)=10-\frac{x}{2}$, $g(x)=20-2x$ — نعم
11) $f(x)=4x-\frac{4}{5}$, $g(x)=\frac{x}{4}+\frac{1}{5}$ — نعم
12) $f(x)=9+\frac{3}{2}x$, $g(x)=\frac{2}{3}x-6$ — نعم

4-2 تدريبات المهارات

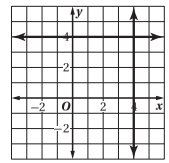
العلاقات والدوال العكسية

أوجد الدالة العكسية لكل دالة مما يأتي:

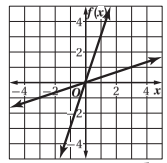
1) $\{(3,1),(4,-3),(8,-3)\}$ — $\{(1,3),(-3,4),(-3,8)\}$
2) $\{(-7,1),(0,5),(5,-1)\}$ — $\{(1,-7),(5,0),(-1,5)\}$
3) $\{(-10,-2),(-7,6),(-4,-2),(-4,0)\}$ — $\{(-2,-10),(6,-7),(-2,-4),(0,-4)\}$
4) $\{(0,-9),(5,-3),(6,6),(8,-3)\}$ — $\{(-9,0),(-3,5),(6,6),(-3,8)\}$
5) $\{(-4,12),(0,7),(9,-1),(10,-5)\}$ — $\{(12,-4),(7,0),(-1,9),(-5,10)\}$
6) $\{(-4,1),(-4,3),(0,-8),(8,-9)\}$ — $\{(1,-4),(3,-4),(-8,0),(-9,8)\}$

أوجد الدالة العكسية لكل دالة مما يأتي، ثم مثل الدالتين الأصلية والعكسية بيانيًا.

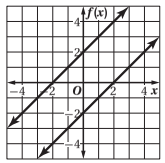
7) $y=4$ — $x=4$



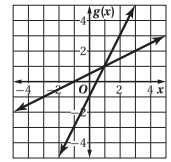
8) $f(x)=3x$ — $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x$



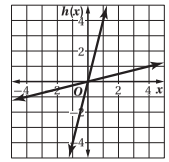
9) $f(x)=x+2$ — $f^{-1}(x)=x-2$



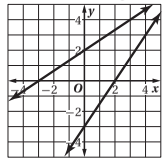
10) $g(x)=2x-1$ — $g^{-1}(x)=\frac{x+1}{2}$



11) $h(x)=\frac{1}{4}x$ — $h^{-1}(x)=4x$



12) $y=\frac{2}{3}x+2$ — $y=\frac{3}{2}x-3$



حدد إن كانت كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا في كل زوج مما يأتي. اكتب (نعم) أو (لا).

13) $f(x)=x-1$, $g(x)=1-x$ — لا
14) $f(x)=2x+3$, $g(x)=\frac{1}{2}(x-3)$ — نعم
15) $f(x)=5x-5$, $g(x)=\frac{1}{5}x+1$ — نعم
16) $f(x)=2x$, $g(x)=\frac{1}{2}x$ — نعم
17) $h(x)=6x-2$, $g(x)=\frac{1}{6}x+3$ — لا
18) $f(x)=8x-10$, $g(x)=\frac{1}{8}x+\frac{5}{4}$ — نعم

الاسم: _____ التاريخ: _____

4-2 تدريبات حل المسألة

العلاقات والدوال العكسية

1) **الحجم:** يريد عامر أن يصنع وعاءً كروي الشكل يتسع لنصف متر مكعب من الماء. ويعلم أن حجمه V بدلالة نصف قطره r يُعطى بالدالة $V=\frac{4}{3}\pi r^3$. ولكنه يريد معرفة r بدلالة V. أوجد هذه الدالة العكسية.

$$r=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

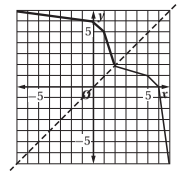
2) **تمارين رياضية:** وضع سالم برنامجًا لممارسة التمارين الرياضية بانتظام، ولتحقيق أكبر فائدة ممكنة، حسب سالم أقصى معدل لعدد ضربات القلب مستعملًا الدالة $f(x)=0.85(220-x)$، حيث x تمثل عمره. أوجد الدالة العكسية للدالة $f(x)$.

$$f^{-1}(x)=220-\frac{x}{0.85}$$

3) **صواريخ:** ارتفاع صاروخ بالأقدام كدالة في الزمن (t) (بالثانية) حيث $t\geq 0$ يُعطى بالدالة $f(t)=49t^2$.
أوجد الدالة العكسية للدالة f. وحدد الزمن عندما كان الارتفاع 10 و20 و1000 قدم. قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة من الثانية.

$$f^{-1}(t)=\frac{\sqrt{t}}{7};$$
عند $t=0.45$ s، 10 ft
وعند $t=1.43$ s، 100 ft
وعند $t=4.52$ s، 1000 ft

4) وجد فهد تمثيلًا بيانيًّا غير مكتمل لدالة ما، ويعلم أن الدالة هي دالة عكسية لنفسها، الشكل التالي يمثل الجزء الذي وجده فهد. أكمل تمثيل جزء المنحنى المقابل لقيم x من -7 إلى 2.



5) **الكواكب:** المسافة التقريبية بين أحد الكواكب والشمس تُعطى بالمعادلة: $d=T^{\frac{2}{3}}$، حيث d المسافة بالوحدات الفلكية، وT مدة دورته بالسنوات على الأرض.
(الوحدة الفلكية هي المسافة بين الأرض والشمس).
أوجد T بدلالة d.

$$T=d^{\frac{3}{2}}$$

4-2 التدريبات الإثرائية

قراءة في الجبر

كلمة زمرة لها معنى خاص في الرياضيات، والعبارات المرقمة التالية توضح فكرة الزمرة، وهي مثال ممتع للزمرة أيضًا.

1) إن أي مجموعة من العناصر مع عملية ثنائية عليها تشكل زمرة إذا تحققت الشروط الأربعة الآتية: المجموعة مغلقة تحت تأثير العملية، والعملية تجميعية، ويوجد في المجموعة عنصر محايد، وكل عنصر في المجموعة له نظير في المجموعة نفسها.

2) والدوال الست التالية مع عملية تركيب الدوال تشكل زمرة:
$f_1(x)=x$ ، $f_2(x)=\frac{1}{x}$ ، $f_3(x)=1-x$ ، $f_4(x)=\frac{(x-1)}{x}$ ، $f_5(x)=\frac{x}{(x-1)}$ ، $f_6(x)=\frac{1}{(1-x)}$.

3) هذه الزمرة مثال للزُمر غير التبديلية. فمثلًا f_6 بينما $f_2\circ f_3=f_4$ $f_3\circ f_2=f_5$.

4) يمكن تجريب بعض الحالات للتحقق من أن f_1 عنصر محايد لهذه الزمرة.

5) كل دالة هي دالة عكسية لنفسها باستثناء الدالتين f_4 وf_6 اللتين كل منهما دالة عكسية للأخرى.

أجب عن كل من الأسئلة الآتية:

1) اشرح المقصود بالقول "مجموعة مغلقة تحت تأثير عملية". هل مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة مغلقة تحت تأثير عملية الطرح؟
إجابة الطرح: على أي عنصرين في المجموعة ينتج عنه عنصر في المجموعة نفسها، لا، 3 و4 أعداد صحيحة موجبة، في حين 4−3 ليس موجبًا.

2) الطرح عملية غير إبدالية على مجموعة الأعداد الصحيحة. اكتب تعريفًا من عندك للعملية غير الإبدالية.
تغيير مكاني عددين بالنسبة للعملية يغير الناتج.

3) ما العنصر المحايد لعملية الضرب على الأعداد الصحيحة؟ برر إجابتك.
1؛ لأنه لكل عدد صحيح a يكون $a.1=a$, $1.a=a$

4) اشرح كيف ترتبط العبارة الآتية مع العبارة رقم (5) السابقة.

$$(f_6\circ f_4)(x)=f_6[f_4(x)]=f_6\left(\frac{(x-1)}{x}\right)=\frac{1}{1-\frac{(x-1)}{x}}=x=f_1(x)$$

هذا يبين أن f_4 نظير لـ f_6

الاسم: _____ التاريخ: _____

4-3 تدريبات إعادة التعليم

دوال ومتباينات الجذر التربيعي

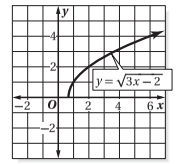
دوال الجذر التربيعي: الدالة التي تحتوي على الجذر التربيعي تسمى **دالة الجذر التربيعي**، ومجالها جميع القيم التي يكون عندها ما تحت الجذر موجبًا أو صفرًا.

مثال **مثل الدالة $y=\sqrt{3x-2}$ بيانيًا، وأوجد مجالها ومداها.**

بما أن ما تحت الجذر التربيعي لا يكون سالبًا، فإن مجال الدالة هو $3x-2\geq 0$ ، ومنه تكون $x\geq \frac{2}{3}$. ومقطع المنحنى مع المحور x هو $\frac{2}{3}$، والمدى هو $y\geq 0$.

صمّم جدولًا لبعض قيم x,y ، واستعمله في تمثيل الدالة.

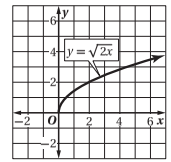
x	y
$\frac{2}{3}$	0
1	1
2	2
3	$\sqrt{7}$



تمارين:

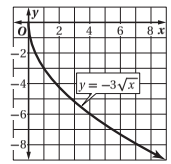
مثّل كل دالة بيانيًا، وأوجد مجالها ومداها.

1) $y=\sqrt{2x}$



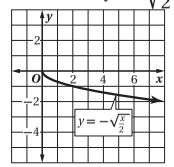
المجال: $x\geq 0$ ، المدى: $y\geq 0$

2) $y=-3\sqrt{x}$



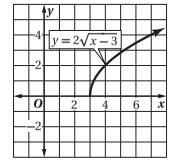
المجال: $x\geq 0$ ، المدى: $y\leq 0$

3) $y=-\sqrt{\frac{x}{2}}$



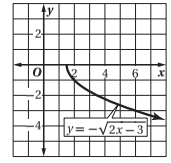
المجال: $x\geq 0$ ، المدى: $y\leq 0$

4) $y=2\sqrt{x-3}$



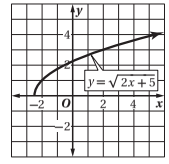
المجال: $x\geq 3$ ، المدى: $y\geq 0$

5) $y=-\sqrt{2x-3}$



المجال: $x\geq \frac{3}{2}$ ، المدى: $y\leq 0$

6) $y=\sqrt{2x+5}$



المجال: $x\geq -\frac{5}{2}$ ، المدى: $y\geq 0$

4-3 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

دوال ومتباينات الجذر التربيعي

متباينات الجذر التربيعي: المتباينة التي تحتوي الجذر التربيعي لمتغير تسمى **متباينة الجذر التربيعي.** استعمل معلوماتك حول تمثيل دوال الجذر التربيعي، والمتباينات بيانيًّا، في تمثيل متباينات الجذر التربيعي.

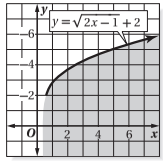
مثال 1 **مثل المتباينة $y\leq \sqrt{2x-1}+2$ بيانيًا.**

مثل المعادلة المرتبطة بالمتباينة: $y=\sqrt{2x-1}+2$

المنحنى متضمن في حل المتباينة كما هو في الشكل المجاور.

يتضمن مجال الدالة القيم $x\geq \frac{1}{2}$

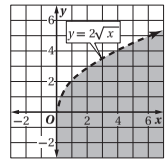
لذا يكون التمثيل البياني للمتباينة واقعًا على يمين المستقيم $x=\frac{1}{2}$



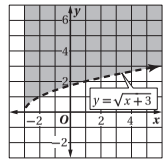
تمارين:

مثل كل متباينة بيانيًا:

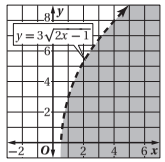
1) $y<2\sqrt{x}$



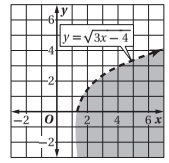
2) $y>\sqrt{x+3}$



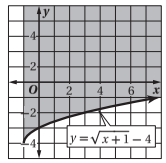
3) $y<3\sqrt{2x-1}$



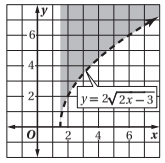
4) $y<\sqrt{3x-4}$



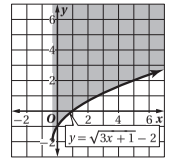
5) $y\geq \sqrt{x+1}-4$



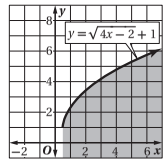
6) $y>2\sqrt{2x-3}$



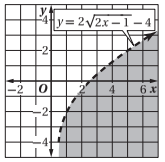
7) $y\geq \sqrt{3x+1}-2$



8) $y\leq \sqrt{4x-2}+1$



9) $y<2\sqrt{2x-1}-4$

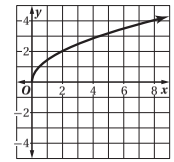


4-3 تدريبات المهارات

دوال ومتباينات الجذر التربيعي

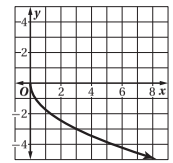
مثِّل كل دالة بيانيًّا، وأوجد مجالها ومداها

1) $y=\sqrt{2x}$



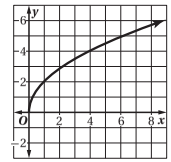
المجال : $x \geq 0$
المدى : $y \geq 0$

2) $y=-\sqrt{3x}$



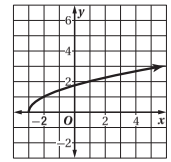
المجال : $x \geq 0$
المدى : $y \leq 0$

3) $y=2\sqrt{x}$



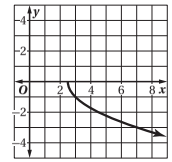
المجال : $x \geq 0$
المدى : $y \geq 0$

4) $y=\sqrt{x+3}$



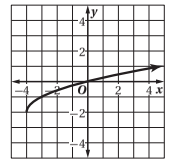
المجال : $x \geq -3$
المدى : $y \geq 0$

5) $y=-\sqrt{2x-5}$



المجال : $x \geq 2.5$
المدى : $y \leq 0$

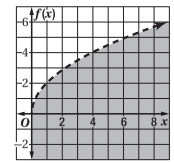
6) $y=\sqrt{x+4}-2$



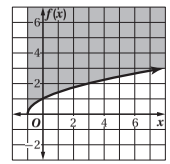
المجال : $x \geq -4$
المدى : $y \geq -2$

مثل كل متباينة بيانيًّا:

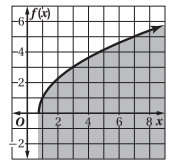
7) $f(x) < \sqrt{4x}$



8) $f(x) \geq \sqrt{x+1}$



9) $f(x) \leq \sqrt{4x-3}$



4-3 تدريبات حل المسألة

دوال ومتباينات الجذر التربيعي

1) **مربعات:** يريد محمود إنشاء حديقة منزلية مربعة الشكل مساحتها $625 ft^2$. ما أبعاد الحديقة؟

$25 ft \times 25 ft$

2) **البندول:** الزمن الذي يستغرقه بندول للتحرك اهتزازة كاملة يُعطى بالعلاقة:

$$p = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

حيث L طول البندول بالأمتار، و g تسارع الجاذبية الأرضية $(g=9.8 m/s^2)$.

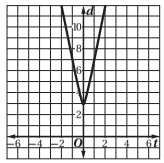
أوجد زمن اهتزازة بندول طوله 0.65 m، قرب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

1.6 s

3) **ردة الفعل:** يريد صالح وسعد قياس ردات فعل بعضهما بعضًا. يُسقط صالح مسطرة من ارتفاع معين لتسقط بين، إصبعي يد سعد (الإبهام والسبابة). ويحاول سعد الإمساك بالمسطرة قبل أن تسقط من يده. الزمن المتطلب للإمساك بالمسطرة يُعطى بالعلاقة $t=\frac{\sqrt{d}}{4}$ ، حيث d مقاسة بالأقدام. أكمل الجدول التالي. قرب إجابتك لأقرب جزء من مئة.

المسافة (بالبوصة)	زمن ردة الفعل (بالثواني)
3	**0.13**
6	**0.18**
9	**0.22**
12	**0.25**

4) **مسافات:** يقف مدرب فريق درَّاجات على جانب طريق يراقب أحد الدراجين الذين يدربهم أثناء سيره على الطريق، والمسافة بين المدرب والدرَّاج تُعطى بالعلاقة $d=\sqrt{9+36t^2}$. مثل هذه الدالة بيانيًّا. وأوجد المسافة بين المدرب والدرَّاج بعد 3 ثواني. قرب إجابتك لأقرب جزء من مئة



18.25 مترًا

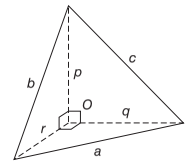
5) **النجوم:** تتناسب كثافة الضوء المنبعث من مصدر عكسيًّا مع مربع المسافة، وبالرموز $I=\frac{k}{d^2}$ ، حل المعادلة لإيجاد d بدلالة I

$$d=\sqrt{\frac{k}{I}}$$

4-3 التدريبات الإثرائية

قراءة في الجبر

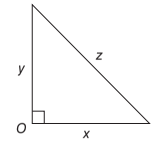
إذا تشابهت مسألتان رياضيتان في البنية فيقال أنهما متماثلتان.
واستعمال المُماثل إحدى الطرق للاستكشاف، وبرهنة النظريات الجديدة.
والعبارات المرقمة التالية تبيِّن المُماثل ثلاثي الأبعاد لنظرية فيثاغورس.



1) افرض أن لديك مجسمًا رباعي السطوح فيه ثلاثة أوجه متعامدة تلتقي في الرأس O.

2) وافرض أنك تريد معرفة ارتباط المساحات C,B,A للأوجه الثلاثة المتعامدة بمساحة السطح الرابع (D) المقابل للرأس O.

3) من الطبيعي أن تتوقع صيغة مماثلة لنظرية فيثاغورس $z^2=x^2+y^2$، وتكون صحيحة للحالات المشابهة ذات البعدين.



4) لتكتشف الصيغة في حالة الأشكال ثلاثية الأبعاد، عليك أن تقترح صيغة، وتبرهن صحتها.

5) الاقتراحان التاليان معقولان:
$D^3=A^3+B^3+C^3$ و $D^2=A^2+B^2+C^2$

بالرجوع إلى العبارات المرقمة السابقة، أجب عن الأسئلة التالية:

1) استعمل العبارة رقم 1 والشكل العلوي. اكتب تعريفًا من عندك للشكل رباعي السطوح.
شكل ثلاثي الأبعاد بأربعة أوجه.

2) استعمل العبارة رقم 2 والشكل العلوي. ما أطوال أضلاع كل سطح في الشكل رباعي السطوح؟
$a, b, c ; a, q, r ; b, p, r ; c, p, q$

3) أعد كتابة العبارة رقم 1 لتناسب وضعًا مماثلًا ذا بعدين.
مثلث له ضلعان متعامدان ويلتقيان في الرأس C

4) بالرجوع إلى الشكل العلوي، اكتب عبارات للمساحات A و B و C المذكورة في العبارة رقم 2.
$A=\frac{1}{2}pr,\ B=\frac{1}{2}pq,\ C=\frac{1}{2}rq$

5) اكتب عبارات للمتغيرات a و b و c بدلالة p و q و r، ولتكتشف حالة مماثلة ذات ثلاثة أبعاد، استعمل نظرية فيثاغورس للحصول على هذه العبارات.
$a^2=q^2+r^2,\ b^2=r^2+p^2,\ c^2=p^2+q^2$

6) أي اقتراح في العبارة رقم 5 يبدو أكثر معقولية؟ برِّر إجابتك.

تابع تبريرات الطلاب.

4-4 تدريبات إعادة التعليم

الجذر النوني

تبسيط الجذور

الجذر التربيعي	لأي عددين حقيقيين a, b، إذا كان $a^2=b$، فإن a جذر تربيعي لِـ b
الجذر النوني	لأي عددين حقيقيين a, b، وأي عدد صحيح موجب n، إذا كان $a^n=b$، فإن a جذر نوني للعدد b.
الجذور النونية الحقيقية $\sqrt[n]{b}$ و $-\sqrt[n]{b}$	إذا كان n عددًا زوجيًّا، و $b>0$، فإن b له جذر حقيقي واحد موجب، وجذر حقيقي واحد سالب، الجذر الموجب هو الجذر الرئيس. إذا كان n عددًا فرديًا و $b>0$، فإن b له جذر حقيقي واحد موجب. إذا كان n عددًا زوجيًا و $b<0$، فإنه لا يوجد للعدد b جذور حقيقية. إذا كان n عددًا فرديًا و $b<0$، فإنه يوجد للعدد b جذر حقيقي واحد سالب.

مثال 1 بَسِّط $\sqrt{49z^8}$

$\sqrt{49z^8}=\sqrt{(7z^4)^2}=7z^4$

z^4 عدد موجب، فلا داعي لأخذ القيمة المطلقة

مثال 2 بَسِّط $-\sqrt[3]{(2a-1)^6}$

$-\sqrt[3]{(2a-1)^6}=-\sqrt[3]{[(2a-1)^2]^3}=-(2a-1)^2$

تمارين:

بَسِّط كلًا مما يأتي:

1) $\sqrt{81}$ → **9**
2) $\sqrt[3]{-343}$ → **-7**
3) $\sqrt{144p^6}$ → **$12|p^3|$**
4) $\pm\sqrt{4a^{10}}$ → **$\pm 2a^5$**
5) $\sqrt[5]{243p^{10}}$ → **$3p^2$**
6) $-\sqrt[3]{m^6n^9}$ → **$-m^2n^3$**
7) $\sqrt[3]{-b^{12}}$ → **$-b^4$**
8) $\sqrt{16a^{10}b^8}$ → **$4|a^5|b^4$**
9) $\sqrt{121x^6}$ → **$11|x^3|$**
10) $\sqrt{(4k)^4}$ → **$16k^2$**
11) $\pm\sqrt{169r^4}$ → **$\pm 13r^2$**
12) $-\sqrt[3]{-27p^6}$ → **$3p^2$**
13) $-\sqrt{625y^2z^4}$ → **$-25|y|z^2$**
14) $\sqrt{36q^{34}}$ → **$6|q^{17}|$**
15) $\sqrt{100x^2y^4z^6}$ → **$10|x|y^2|z^3|$**
16) $\sqrt[3]{-0.027}$ → **-0.3**
17) $-\sqrt{-0.36}$ → **ليس عددًا حقيقيًا**
18) $\sqrt{0.64p^{10}}$ → **$0.8|p^5|$**
19) $\sqrt[4]{(2x)^8}$ → **$4x^2$**
20) $\sqrt{(11y^2)^4}$ → **$121y^4$**
21) $\sqrt[3]{(5a^2b)^6}$ → **$25a^4b^2$**
22) $\sqrt{(3x-1)^2}$ → **$|3x-1|$**
23) $\sqrt[3]{(m-5)^6}$ → **$(m-5)^2$**
24) $\sqrt{36x^2-12x+1}$ → **$|6x-1|$**

الاسم: _____ التاريخ: _____

4-4 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

الجذر النوني

تقريب الجذور باستعمال الآلة الحاسبة

العدد غير النسبي	هو العدد الذي لا يمكن التعبير عنه بكسر عشري منتهٍ أو دوري.

الجذور مثل $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ أمثلة للأعداد غير النسبية. ويُستعمل تقريب الكسور العشرية في تقريب قيم الأعداد غير النسبية في التطبيقات عادة. ويمكنك إيجاد هذه القيم التقريبية بسهولة بوساطة الآلة الحاسبة.

مثال استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة $\sqrt[5]{18.2}$ مقربة لأقرب جزء من ألف.

$\sqrt[5]{18.2} \approx 1.787$

تمارين:

استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقربة إلى أقرب جزء من ألف.

1) $\sqrt{62}$ — **7.874**
2) $\sqrt{1050}$ — **32.404**
3) $\sqrt[3]{0.054}$ — **0.378**
4) $-\sqrt[4]{5.45}$ — **−1.528**
5) $\sqrt{5280}$ — **72.664**
6) $\sqrt{18600}$ — **136.382**
7) $\sqrt{0.095}$ — **0.308**
8) $\sqrt[3]{-15}$ — **−2.466**
9) $\sqrt[5]{100}$ — **2.512**
10) $\sqrt[6]{856}$ — **3.081**
11) $\sqrt{3200}$ — **56.569**
12) $\sqrt{0.05}$ — **0.224**
13) $\sqrt{12500}$ — **111.803**
14) $\sqrt{0.60}$ — **0.775**
15) $-\sqrt[4]{500}$ — **−4.729**
16) $\sqrt[3]{0.15}$ — **0.531**
17) $\sqrt[6]{4200}$ — **4.017**
18) $\sqrt{75}$ — **8.660**

19) **الانزلاق:** تستعمل شرطة السير الصيغة $r=2\sqrt{5L}$ لتقدير سرعة سيارة (r) بالأميال لكل ساعة، عندما تنزلق مسافة (L) بالأقدام. قدِّر سرعة سيارة بالأميال لأقرب جزء من عشرة إذا انزلقت مسافة 300 ft قبل أن تتوقف.
77.5 mil/h

20) **رحلات الفضاء:** تُقدر المسافة الأفقية (d) بالأميال من مركبة فضائية تدور على ارتفاع (h) ميلًا فوق سطح الأرض بالمعادلة $d=\sqrt{8000h+h^2}$. ما المسافة الأفقية المُقدرة من مركبة تدور على ارتفاع 150 ميلًا فوق سطح الأرض؟
1106 mil

4-4 تدريبات المهارات

الجذر النوني

استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقربة لثلاث منازل عشرية.

1) $\sqrt{230}$ — **15.166**
2) $\sqrt{38}$ — **6.164**
3) $-\sqrt{152}$ — **−12.329**
4) $\sqrt{5.6}$ — **2.366**
5) $\sqrt[3]{88}$ — **4.448**
6) $\sqrt[3]{-222}$ — **−6.055**
7) $-\sqrt[4]{0.34}$ — **−0.764**
8) $\sqrt[5]{500}$ — **3.466**

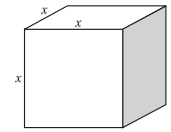
بَسِّط كلًا مما يأتي:

9) $\pm\sqrt{81}$ — **±9**
10) $\sqrt{144}$ — **12**
11) $\sqrt{(-5)^2}$ — **5**
12) $\sqrt{-5^2}$ — **ليس عددًا حقيقيًا**
13) $\sqrt{0.36}$ — **0.6**
14) $-\sqrt{\frac{4}{9}}$ — $-\frac{2}{3}$
15) $\sqrt[3]{-8}$ — **−2**
16) $-\sqrt[3]{27}$ — **−3**
17) $\sqrt[3]{0.064}$ — **0.4**
18) $\sqrt[5]{32}$ — **2**
19) $\sqrt[4]{81}$ — **3**
20) $\sqrt{y^2}$ — $|y|$
21) $\sqrt[3]{125c^3}$ — $5c$
22) $\sqrt{64x^6}$ — $8|x^3|$
23) $\sqrt[3]{-27a^6}$ — $-3a^2$
24) $\sqrt{m^8p^4}$ — m^4p^2
25) $-\sqrt{100p^4t^2}$ — $-10p^2|t|$
26) $\sqrt[4]{16w^4v^8}$ — $2|w|v^2$
27) $\sqrt{(-3c)^4}$ — $9c^2$
28) $\sqrt{(a+b)^2}$ — $|a+b|$

4-4 تدريبات حل المسألة

الجذر النوني

1) **مكعبات:** يريد سعود بناء مخزن مكعب الشكل سعته 1728 قدمًا مكعبًا. كم ستكون أبعاد المخزن؟



$12\,ft \times 12\,ft \times 12\,ft$

2) **الفلك:** تمثل المعادلة $a=\sqrt[3]{p^2}$ حالة خاصة لقانون كبلر الثالث المتعلق بحركة الكواكب. حيث a معدل بُعد الكوكب عن الشمس بالوحدات الفلكية، و p الفترة الزمنية بالسنوات لدورة الكوكب. إذا كانت دورة كوكب المشتري تستغرق 12 سنة. فما بُعده عن الشمس بالوحدات الفلكية؟

5.24 وحدة فلكية.

3) **هامش الربح:** تبلغ تكاليف سلعة لدى تاجر جملة D ريالًا، ويبيعها لتاجر توزيع بربح $P\%$. ويبيعها تاجر التوزيع لتاجر تجزئة بربح $P\%$. ويبيعها تاجر التجزئة للمستهلك بربح $P\%$. ما السعر الذي يشتري به المستهلك؟ وإذا اشترى المستهلك السلعة بمبلغ 80 ريالًا، وكانت تكلفتها على تاجر الجملة 29.15 ريالًا. فما نسبة الربح $P\%$.

$D(1+\frac{P}{100})^3$; 40%

4) **البندول:** يتحرك بندول طوله (L) قدمًا على أن يكون زمن الاهتزازة الواحدة (T) يُعطى بالعلاقة $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$، g تسارع الجاذبية الأرضية وهي $32\,ft/s^2$.

a) إذا كان طول البندول $2\,ft$. فما زمن اهتزازته؟

1.57 s.

b) إذا كان زمن اهتزازة بندول $1.74\,s$، فما طول البندول بالأقدام.

2.5 ft

4-4 التدريبات الإثرائية

تقريب الجذور التربيعية

لديك المفكوك التالي:

$$\left(a+\frac{b}{2a}\right)^2 = a^2+\frac{2ab}{2a}+\frac{b^2}{4a^2}$$
$$= a^2+b+\frac{b^2}{4a^2}$$

افترض أن قيمة a كبيرة جدًا مقارنة بقيمة b. عندها تكون القيمة $\frac{b^2}{4a^2}$ صغيرة جدًا، لدرجة أنه يمكن إهمالها في التقريب.

أي ان $\left(a+\frac{b}{2a}\right)^2 \approx a^2+b$

$$a+\frac{b}{2a} \approx \sqrt{a^2+b}$$

افترض أن عددًا يمكن التعبير عنه على الصورة a^2+b، حيث $a>b$، فإن القيمة التقريبية للجذر التربيعي للمقدار a^2+b تساوي $a+\frac{b}{2a}$. وكذلك يمكنك التوصل إلى القيمة التقريبية

$$a-\frac{b}{2a} \approx \sqrt{a^2-b}$$

مثال استخدم الصيغة $\sqrt{a^2\pm b} \approx a \pm \frac{b}{2a}$ لتقريب قيمتي $\sqrt{101}$ و $\sqrt{622}$.

a) $\sqrt{101}=\sqrt{100+1}=\sqrt{10^2+1}$

لتكن $a=10$ و $b=1$

$\sqrt{101} \approx 10+\frac{1}{2(10)}$

≈ 10.05

b) $\sqrt{622}=\sqrt{625-3}=\sqrt{25^2-3}$

لتكن $a=25$ و $b=3$

$\sqrt{622} \approx 25-\frac{3}{2(25)}$

≈ 24.94

تمارين:

استعمل الصيغة السابقة لتقريب كل قيمة مما يأتي إلى أقرب جزء من مئة. تحقق من إجابتك مستعملًا الآلة الحاسبة.

1) $\sqrt{626}$ **25.02**
2) $\sqrt{99}$ **9.95**
3) $\sqrt{402}$ **20.05**
4) $\sqrt{1604}$ **40.05**
5) $\sqrt{223}$ **14.93**
6) $\sqrt{80}$ **8.94**
7) $\sqrt{4890}$ **69.93**
8) $\sqrt{2505}$ **50.05**
9) $\sqrt{3575}$ **59.79**
10) $\sqrt{1441100}$ **1200.46**
11) $\sqrt{290}$ **17.03**
12) $\sqrt{260}$ **16.12**

13) بيِّن أن $a-\frac{b}{2a} \approx \sqrt{a^2-b}$ حيث $a>b$.

$\left(a-\frac{b}{2a}\right)^2 = a^2-b+\frac{b^2}{4a^2}$;

$\sqrt{a^2-b}$; $\left(a-\frac{b}{2a}\right)^2 \approx a^2-b$; $a-\frac{b}{2a} \approx \sqrt{a^2-b}$ **يمكنك إهماله** $\frac{b^2}{4a^2}$;

4-5 تدريبات إعادة التعليم

العمليات على العبارات الجذرية

تبسيط الجذور

خاصية ضرب الجذور	لأي عددين حقيقيين a و b، وأي عدد صحيح $n > 1$: 1) إذا كان n عددًا زوجيًا، a,b غير سالبين، فإن $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$. 2) إذا كان n عددًا فرديًا، فإن $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

اتبع الخطوات التالية لتبسيط الجذور التربيعية:

1) حلل ما تحت الجذور إلى مربعات ما أمكن ذلك.
2) استعمل خاصية ضرب الجذور لفصل المربعات الكاملة.
3) بَسِّط كل جذر.

خاصية قسمة الجذور	لأي عددين حقيقيين a و b، $b \neq 0$، وأي عدد صحيح $n > 1$ فإن $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ إذا كانت جميع الجذور معرَّفة.

للتخلص من الجذور في المقام، والكسور من المقدار تحت الجذور، اضرب كلًّا من البسط والمقام بمقدار يسهل إيجاد الجذر الدقيق (إنطاق المقام).

مثال 1 بَسِّط $\sqrt[3]{-16a^5b^7}$

$$\sqrt[3]{-16a^5b^7} = \sqrt[3]{(-2)^3 \cdot 2 \cdot a^3 \cdot a^2 \cdot (b^2)^3 \cdot b}$$
$$= -2ab^2\sqrt[3]{2a^2b}$$

مثال 2 بَسِّط $\sqrt{\frac{8x^3}{45y^5}}$

$$\sqrt{\frac{8x^3}{45y^5}} = \frac{\sqrt{8x^3}}{\sqrt{45y^5}} \quad \text{خاصية قسمة الجذور}$$
$$= \frac{\sqrt{(2x)^2 \cdot 2x}}{\sqrt{(3y^2)^2 \cdot 5y}} \quad \text{بالتحليل إلى مربعات}$$
$$= \frac{\sqrt{(2x)^2} \cdot \sqrt{2x}}{\sqrt{(3y^2)^2} \cdot \sqrt{5y}} \quad \text{خاصية الضرب}$$
$$= \frac{2|x|\sqrt{2x}}{3y^2\sqrt{5y}} \quad \text{بالتبسيط}$$
$$= \frac{2|x|\sqrt{2x}}{3y^2\sqrt{5y}} \cdot \frac{\sqrt{5y}}{\sqrt{5y}} \quad \text{بإنطاق المقام}$$
$$= \frac{2|x|\sqrt{10xy}}{15y^3} \quad \text{بالتبسيط}$$

تمارين:

بَسِّط كلًّا مما يأتي:

1) $5\sqrt{54}$ — 2) $15\sqrt{6}$ — 3) $\mathbf{5x^2y^3\sqrt{3y}}\ \sqrt{75x^4y^7}$

4) $\sqrt{\frac{36}{125}}$ — $\mathbf{\frac{6\sqrt{5}}{25}}$ — 5) $\frac{|a^3|b\sqrt{2b}}{14}\sqrt{\frac{a^6b^3}{98}}$ — 6) $\sqrt[3]{\frac{p^5q^3}{40}}$ — $\mathbf{\frac{pq\sqrt[3]{25p^2}}{10}}$

4-5 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

العمليات على العبارات الجذرية

العمليات على الجذور: يمكنك جمع الجذور المتشابهة فقط عند جمع عبارات تحتوي على جذور. ويكون جذران متشابهين إذا كان لهما الدليل نفسه، وما تحت الجذر نفسه.

تستعمل خصائص الضرب والقسمة في ضرب الجذور، ولإيجاد ناتج $(a\sqrt{b}+c\sqrt{d})\cdot(e\sqrt{f}+g\sqrt{h})$ استعمل خاصية التوزيع. ولإنطاق المقام استعمل المرافق. تُعدُّ كل من ثنائيتي الحد اللتين على الصورة $a\sqrt{b}-c\sqrt{d}$ و $a\sqrt{b}+c\sqrt{d}$ حيث a, b, c, d أعداد نسبية، مرافقة للأخرى. وحاصل ضرب المقدار بمرافقه عدد نسبي دائمًا.

مثال 1 بَسِّط $2\sqrt{50}+4\sqrt{500}-6\sqrt{125}$.

$$2\sqrt{50}+4\sqrt{500}-6\sqrt{125} = 2\sqrt{5^2\cdot 2}+4\sqrt{10^2\cdot 5}-6\sqrt{5^2\cdot 5} \quad \text{التحليل باستعمال المربعات}$$
$$= 2\cdot 5\cdot\sqrt{2}+4\cdot 10\cdot\sqrt{5}-6\cdot 5\cdot\sqrt{5} \quad \text{بتبسيط العبارات الجذرية}$$
$$= 10\sqrt{2}+40\sqrt{5}-30\sqrt{5} \quad \text{بالضرب}$$
$$= 10\sqrt{2}+10\sqrt{5} \quad \text{بدمج الحدود المتشابهة}$$

مثال 2 بَسِّط $(2\sqrt{3}-4\sqrt{2})(\sqrt{3}+2\sqrt{2})$

$$(2\sqrt{3}-4\sqrt{2})(\sqrt{3}+2\sqrt{2})$$
$$= 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{2}-4\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}-4\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}$$
$$= 6+4\sqrt{6}-4\sqrt{6}-16$$
$$= -10$$

مثال 3 بَسِّط $\frac{2-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$

$$\frac{2-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{2-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$$
$$= \frac{6-2\sqrt{5}-3\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2}{3^2-(\sqrt{5})^2}$$
$$= \frac{6-5\sqrt{5}+5}{9-5}$$
$$= \frac{11-5\sqrt{5}}{4}$$

تمارين:

بَسِّط كلًّا مما يأتي:

1) $3\sqrt{2}+\sqrt{50}-4\sqrt{8}$ — $\mathbf{0}$
2) $\sqrt{20}+\sqrt{125}-\sqrt{45}$ — $\mathbf{4\sqrt{5}}$
3) $\sqrt{300}-\sqrt{27}-\sqrt{75}$ — $\mathbf{2\sqrt{3}}$
4) $\sqrt[3]{81}\cdot\sqrt[3]{24}$ — $\mathbf{6\sqrt[3]{9}}$
5) $\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{12})$ — $\mathbf{2+2\sqrt[3]{3}}$
6) $2\sqrt{3}(\sqrt{15}+\sqrt{60})$ — $\mathbf{18\sqrt{5}}$
7) $(2+3\sqrt{7})(4+\sqrt{7})$ — $\mathbf{29+14\sqrt{7}}$
8) $(6\sqrt{3}-4\sqrt{2})(3\sqrt{3}+\sqrt{2})$ — $\mathbf{46-6\sqrt{6}}$
9) $(4\sqrt{2}-3\sqrt{5})(2\sqrt{8}+\sqrt{5})$ — $\mathbf{17-8\sqrt{10}}$
10) $\frac{5\sqrt{48}+\sqrt{75}}{5\sqrt{3}}$ — $\mathbf{5}$
11) $\frac{4+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$ — $\mathbf{5+3\sqrt{2}}$
12) $\frac{5-3\sqrt{3}}{1+2\sqrt{3}}$ — $\mathbf{\frac{13\sqrt{3}-23}{11}}$

الاسم: _____ التاريخ: _____

4-5 تدريبات المهارات

العمليات على العبارات الجذرية

بَسِّط كلًّا مما يأتي:

1) $\sqrt{24}$ $\quad 2\sqrt{6}$

2) $\sqrt{75}$ $\quad 5\sqrt{3}$

3) $\sqrt[3]{16}$ $\quad 2\sqrt[3]{2}$

4) $-\sqrt[4]{48}$ $\quad -2\sqrt[4]{3}$

5) $4\sqrt{50x^5}$ $\quad 20x^2\sqrt{2x}$

6) $\sqrt[4]{64a^4b^4}$ $\quad 2|ab|\sqrt{4}$

7) $\sqrt[3]{-8d^2f^5}$ $\quad -2f\sqrt[3]{d^2f^2}$

8) $\sqrt{\frac{25}{36}r^2t}$ $\quad \frac{5}{6}|r|\sqrt{t}$

9) $-\sqrt{\frac{3}{7}}$ $\quad -\frac{\sqrt{21}}{7}$

10) $\sqrt[3]{\frac{2}{9}}$ $\quad \frac{\sqrt[3]{6}}{3}$

11) $\sqrt{\frac{2g^3}{5z}}$ $\quad \frac{g\sqrt{10gz}}{5z}$

12) $(3\sqrt{3})(5\sqrt{3})$ $\quad 45$

13) $(4\sqrt{12})(3\sqrt{20})$ $\quad 48\sqrt{15}$

14) $\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{50}$ $\quad 8\sqrt{2}$

15) $\sqrt{12}-2\sqrt{3}+\sqrt{108}$ $\quad 6\sqrt{3}$

16) $8\sqrt{5}-\sqrt{45}-\sqrt{80}$ $\quad \sqrt{5}$

17) $2\sqrt{48}-\sqrt{75}-\sqrt{12}$ $\quad \sqrt{3}$

18) $(2+\sqrt{3})(6-\sqrt{2})$ $\quad 12-2\sqrt{2}+6\sqrt{3}-\sqrt{6}$

19) $(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})$ $\quad -4$

20) $(3-\sqrt{7})(5+\sqrt{2})$ $\quad 15+3\sqrt{2}-5\sqrt{7}-\sqrt{14}$

21) $(\sqrt{2}-\sqrt{6})^2$ $\quad 8-4\sqrt{3}$

22) $\frac{3}{7-\sqrt{2}}$ $\quad \frac{21+3\sqrt{2}}{47}$

23) $\frac{4}{3+\sqrt{2}}$ $\quad \frac{12-4\sqrt{2}}{7}$

24) $\frac{5}{8-\sqrt{6}}$ $\quad \frac{40+5\sqrt{6}}{58}$

4-5 تدريبات حل المسألة

العمليات على العبارات الجذرية

1) **مكعبات:** يملك عمر صندوقًا على شكل متوازي مستطيلات أبعاده 20 بوصة، 35 بوصة، 40 بوصة. ويُريد أن يصنع صندوقًا جديدًا مكعب الشكل له حجم الصندوق السابق نفسه. فما طول ضلع الصندوق الجديد؟ اكتب إجابتك في أبسط صورة.

$10\sqrt[3]{28}$ بوصة

2) **فيزياء:** سرعة موجة تنتقل عبر خيط تُعطى بالعبارة $\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{u}}$ حيث t قوة شد الخيط، و u كثافة مادة الخيط. اكتب العبارة في أبسط صورة بإنطاق المقام.

$$\frac{\sqrt{tu}}{u}$$

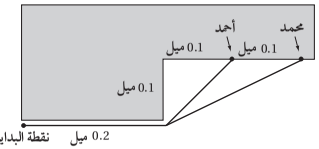
3) **إنارة:** افرض أن شدة إنارة ضوء I_1 عندما كان مصدره على بُعد d_1، وشدة إنارة ضوء I_2 عندما كان مصدره على بُعد d_2 . هذه الكميات ترتبط بالمعادلة:

$$\frac{d_2}{d_1}=\sqrt{\frac{I_1}{I_2}}$$

افرض أن I_1 تساوي 50 وحدة. و I_2 تساوي 24 وحدة. فما قيمة $\frac{d_2}{d_1}$ ؟ اكتب إجابتك في أبسط صورة.

$$\frac{5\sqrt{3}}{6}$$

4) **سباق:** يريد محمد أن يتسابق مع أخيه الأصغر أحمد. وبعد عددٍ من السباقات توصلا إلى أن السباق العادل بينهما يتمثل في قطعهما مسافات مختلفة. انطلق محمد وأحمد من نقطة واحدة، وركضا 0.2 ميلًا معًا، ثم اتخذا مسارين مختلفين. ويبيِّن الشكل التالي نقطتي النهاية المختلفتين لهما. وعند وصولهما تبيَّن أن كلًّا منهما استغرق وقتًا مقداره 4 دقائق منذ انطلاق السباق.



إذا حافظ كل من محمد وأحمد خلال السباق على معدل سرعته ثابتًا. فكم دقيقة سيستغرق كل منهما لقطع مسافة ميل واحد؟ اكتب إجابتك في أبسط صورة.

أحمد: $\frac{0.8-4\sqrt{0.02}}{0.02}$

أو $40-20\sqrt{2}$ دقيقة

محمد: $\frac{0.8-4\sqrt{0.05}}{-0.01}$

أو $40\sqrt{5}-80$ دقيقة

الاسم: _____ التاريخ: _____

4-5 التدريبات الإثرائية

نواتج ضرب خاصة في الجذور

لاحظ أن $(\sqrt{3})(\sqrt{3})=3$ أو $(\sqrt{3})^2=3$. وعمومًا، $(\sqrt{x})^2=x$ حيث $x \geq 0$.
ولاحظ أيضًا أن $\sqrt{9}\cdot\sqrt{4}=\sqrt{36}$، وعمومًا، $(\sqrt{x})(\sqrt{y})=\sqrt{xy}$ حيث x و y ليسا سالبين.
يمكنك استخدام هذه الأفكار لإيجاد حواصل الضرب الخاصة الآتية.

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=a-b$$
$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2+2\sqrt{ab}+(\sqrt{b})^2=a+2\sqrt{ab}+b$$
$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2-2\sqrt{ab}+(\sqrt{b})^2=a-2\sqrt{ab}+b$$

مثال 1 أوجد ناتج الضرب: $(\sqrt{2}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{5})$

$$(\sqrt{2}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{5})=(\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2=2-5=-3$$

مثال 2 أوجد قيمة: $(\sqrt{2}+\sqrt{8})^2$

$$(\sqrt{2}+\sqrt{8})^2=(\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}\sqrt{8}+(\sqrt{8})^2$$
$$=2+2\sqrt{16}+8=2+2(4)+8=2+8+8=18$$

تمارين:

أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي:

1) $(\sqrt{3}-\sqrt{7})(\sqrt{3}+\sqrt{7})$ — -4
2) $(\sqrt{10}+\sqrt{2})(\sqrt{10}-\sqrt{2})$ — 8
3) $(\sqrt{2x}-\sqrt{6})(\sqrt{2x}+\sqrt{6})$ — $2x-6$
4) $(\sqrt{3}-(-7))^2$ — $52+14\sqrt{3}$
5) $(\sqrt{1000}+\sqrt{10})^2$ — 1210
6) $(\sqrt{y}+\sqrt{5})(\sqrt{y}-\sqrt{5})$ — $y-5$
7) $(\sqrt{50}-\sqrt{x})^2$ — $50-10\sqrt{2x}+x$
8) $(\sqrt{x}+20)^2$ — $x+40\sqrt{x}+400$

يمكنك توسيع الأفكار السابقة لتشمل أنماط مجموع وفرق مكعبين. ادرس النمط التالي، ثم أكمل الأسئلة 12–9.

$$(\sqrt[3]{8}-\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{8^2}+\sqrt[3]{8x}+\sqrt[3]{x^2})=\sqrt[3]{8^3}-\sqrt[3]{x^3}=8-x$$

9) $(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{5})(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{5^2})$ — -3
10) $(\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{w})(\sqrt[3]{y^2}-\sqrt[3]{yw}+\sqrt[3]{w^2})$ — $y+w$
11) $(\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{20})(\sqrt[3]{7^2}-\sqrt[3]{140}+\sqrt[3]{20^2})$ — 27
12) $(\sqrt[3]{11}-\sqrt[3]{8})(\sqrt[3]{11^2}+\sqrt[3]{88}+\sqrt[3]{8^2})$ — 3

4-6 تدريبات إعادة التعليم

الأسس النسبية

الأسس النسبية والجذور

تعريف $b^{\frac{1}{n}}$	لأي عدد حقيقي b، وأي عدد صحيح موجب n، يكون $b^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{b}$ ما عدا عندما $b<0$ و n عدد صحيح زوجي.
تعريف $b^{\frac{m}{n}}$	لأي عدد حقيقي b، $b\neq 0$ ، وأي عددين صحيحين m، n و $n>1$. $b^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{b^m}=(\sqrt[n]{b})^m$ ، ما عدا عندما $b<0$ و n عدد صحيح زوجي.

مثال 1 اكتب $28^{\frac{1}{2}}$ على الصورة الجذرية

لاحظ أن $28>0$

$$28^{\frac{1}{2}}=\sqrt{28}$$
$$=\sqrt{2^2\cdot 7}$$
$$=\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{7}$$
$$=2\sqrt{7}$$

مثال 2 أوجد قيمة $\left(\frac{-8}{-125}\right)^{\frac{1}{3}}$

لاحظ أن 3 عدد فردي و $0>-125$ و $0>-8$

$$\left(\frac{-8}{-125}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt[3]{-8}}{\sqrt[3]{-125}}$$
$$=\frac{-2}{-5}$$
$$=\frac{2}{5}$$

تمارين:

اكتب كل عبارة أسية على الصورة الجذرية، وكل عبارة جذرية على الصورة الأسية.

1) $11^{\frac{1}{7}}$ — $\sqrt[7]{11}$
2) $15^{\frac{1}{3}}$ — $\sqrt[3]{15}$
3) $300^{\frac{3}{2}}$ — $\sqrt{(300)^3}$
4) $\sqrt{47}$ — $47^{\frac{1}{2}}$
5) $\sqrt[3]{3a^5b^2}$ — $3^{\frac{1}{3}}a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{2}{3}}$
6) $\sqrt[4]{2p^5}$ — $2^{\frac{1}{4}}\cdot p^{\frac{5}{4}}$

أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي:

7) $-27^{\frac{2}{3}}$ — 9
8) $216^{\frac{1}{3}}$ — 6
9) $(0.0004)^{\frac{1}{2}}$ — 0.02

الاسم: _____ التاريخ: _____ (تتمة)

4-6 تدريبات إعادة التعليم

الأسس النسبية

تبسيط العبارات: يمكنك تطبيق جميع خصائص وقوانين الأسس التي تعلمتها سابقًا على الأسس النسبية. وعندما تبسط عبارات تحتوي على أسسٍ نسبية، أبقِ على الأسس النسبية، واكتب العبارة بأسس موجبة، وأي أسسٍ في المقام يتعيّن أن تكون صحيحة موجبة.

عندما تبسِّط عبارات جذرية قد تستعمل أسسًا نسبية، ولكن إجابتك النهائية يتعيّن أن تكون بالصورة الجذرية وبأصغر دليل ممكن للجذر.

مثال 1 بَسِّط $y^{\frac{2}{3}} \cdot y^{\frac{3}{8}}$

$y^{\frac{2}{3}} \cdot y^{\frac{3}{8}} = y^{\frac{2}{3}+\frac{3}{8}} = y^{\frac{25}{24}}$

مثال 2 بَسِّط $\sqrt[4]{144x^6}$

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{144x^6} &= (144x^6)^{\frac{1}{4}} \\ &= (2^4 \cdot 3^2 \cdot x^6)^{\frac{1}{4}} \\ &= (2^4)^{\frac{1}{4}} \cdot (3^2)^{\frac{1}{4}} \cdot (x^6)^{\frac{1}{4}} \\ &= 2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{3}{2}} = 2x \cdot (3x)^{\frac{1}{2}} = 2x\sqrt{3x}\end{aligned}$$

تمارين:

بسِّط كل عبارة فيما يأتي:

1) $x^{\frac{4}{5}} \cdot x^{\frac{6}{5}}$ — x^2

2) $\left(y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$ — $y^{\frac{1}{2}}$

3) $p^{\frac{4}{5}} \cdot p^{\frac{7}{10}}$ — $p^{\frac{3}{2}}$

4) $\left(m^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{2}{5}}$ — $m^{\frac{12}{25}}$

5) $x^{\frac{3}{8}} \cdot x^{\frac{4}{3}}$ — $x^{\frac{41}{24}}$

6) $\left(s^{\frac{1}{6}}\right)^{\frac{4}{3}}$ — $s^{\frac{2}{9}}$

7) $\dfrac{p}{p^{\frac{1}{3}}}$ — $p^{\frac{2}{3}}$

8) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}$ — $x^{\frac{1}{6}}$

9) $\sqrt[6]{128}$ — $2\sqrt[6]{2}$

10) $\sqrt[4]{49}$ — $\sqrt{7}$

11) $\sqrt[5]{288}$ — $2\sqrt[5]{9}$

12) $\sqrt{32} \cdot 3\sqrt{16}$ — $48\sqrt{2}$

الاسم: _____ التاريخ: _____

4-6 تدريبات المهارات

الأسس النسبية

اكتب كل عبارة أسية على الصورة الجذرية، وكل عبارة جذرية على الصورة الأسية فيما يأتي.

1) $3^{\frac{1}{6}}$ — $\sqrt[6]{3}$

2) $8^{\frac{1}{5}}$ — $\sqrt[5]{8}$

3) $\sqrt{51}$ — $51^{\frac{1}{2}}$

4) $\sqrt[4]{15^3}$ — $15^{\frac{3}{4}}$

5) $12^{\frac{2}{3}}$ — $\sqrt[3]{12^2}$ أو $(\sqrt[3]{12})^2$

6) $\sqrt[3]{37}$ — $37^{\frac{1}{3}}$

7) $(c^3)^{\frac{3}{5}}$ — $c\sqrt[5]{c^4}$

8) $\sqrt[3]{6xy^2}$ — $6^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$

أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي:

9) $32^{\frac{1}{5}}$ — 2

10) $81^{\frac{1}{4}}$ — 3

11) $27^{\frac{1}{3}}$ — 3

12) $16^{\frac{3}{2}}$ — 64

13) $27^{\frac{1}{3}} \cdot 27^{\frac{5}{3}}$ — 729

14) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}}$ — $\frac{8}{27}$

بسِّط كل عبارة مما يأتي:

15) $c^{\frac{12}{5}} \cdot c^{\frac{3}{5}}$ — c^3

16) $m^{\frac{2}{9}} \cdot m^{\frac{16}{9}}$ — m^2

17) $\left(q^{\frac{1}{2}}\right)^3$ — $q^{\frac{3}{2}}$

18) $p^{\frac{1}{5}} \cdot p^{\frac{1}{2}}$ — $p^{\frac{7}{10}}$

19) $x^{\frac{6}{11}} \cdot x^{\frac{4}{11}}$ — $x^{\frac{10}{11}}$

20) $\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{4}}}$ — $x^{\frac{5}{12}}$

21) $\dfrac{y^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{4}}}$ — $y^{\frac{1}{4}}$

22) $\dfrac{n^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{6}} \cdot n^{\frac{1}{2}}}$ — $n^{\frac{2}{3}}$

23) $\sqrt[12]{64}$ — $\sqrt{2}$

24) $\sqrt[8]{49a^8}$ — $|a|\sqrt[4]{7}$

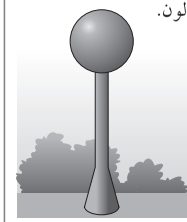
4-6 تدريبات حل المسألة

الأسس النسبية

1) تربيع المكعب: طول ضلع مكعب (s). ما طول ضلع المربع الذي تكون القيمة العددية لمساحته تساوي القيمة العددية لحجم هذا المكعب؟ اكتب إجابتك مستعملًا الأسس النسبية.

$s^{\frac{3}{2}}$

2) برج الماء: يُخزَّنُ ماء الشرب في بعض المدن في أبراج للماء. ويبلغ ارتفاع برج الماء في إحدى المدن 218 قدمًا، ويتسع إلى نصف مليون جالون.



أرادت بلدية المدينة بناء برج جديد للماء تعادل سعة كرته 10 أمثال سعة كرة البرج القديم. كم مرة يساوي نصف قطر الكرة الجديدة نصف قطر الكرة القديمة؟ اكتب إجابتك مستعملًا الأسس النسبية.

$10^{\frac{1}{3}}$

3) بالونات: يُنفخ بالون كروي الشكل بالهواء، وكان حجمه كدالة في الزمن $9\pi t^2$. ما طول نصف قطر البالون كدالة في الزمن (t) ؟ اكتب إجابتك مستعملًا الأسس النسبية.

$3\left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$

4) خلايا: ينمو عدد الخلايا في مزرعة بصورة أسية. وعدد الخلايا في المزرعة كدالة في الزمن يُعطى بالعبارة $N\left(\frac{6}{5}\right)^t$ ، حيث t الزمن بالساعات، وN عدد الخلايا الأصلي الذي بدأت به المزرعة.

a) أصبح عدد الخلايا بعد 3 ساعات 1728 خلية، ما قيمة N؟

1000

b) ما عدد الخلايا في المزرعة بعد 20 دقيقة؟

1063تقريبًا

c) كم كان عدد الخلايا في المزرعة بعد مرور 2.5 ساعة؟

1577تقريبًا

4-6 التدريبات الإثرائية

صيغ هندسية محدودة الاستعمال

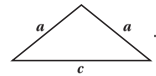
تتضمن كثير من الصيغ الهندسية عبارات جذرية.

ارسم أشكالًا لتوضيح الصيغ الهندسية المعطاة في هذه الصفحة، ثم أوجد قيمة كل صيغة عند القيم المعطاة للمتغيرات.

قرب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.

1) مساحة مثلث متطابق الضلعين (A). طول كل من ضلعية المتطابقين a، وطول الضلع الثالث c، هي: $A=\frac{c}{4}\sqrt{4a^2-c^2}$

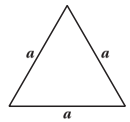
أوجد A عندما $a=6$ و $c=7$.



17.06 وحدة مربعة

2) مساحة مثلث متطابق الأضلاع (A) طول ضلعه a، هي: $A=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$

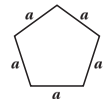
أوجد A عندما $a=8$



27.71 وحدة مربعة

3) مساحة خُماسي منتظم (A) طول ضلعه a، هي: $A=\frac{a^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$

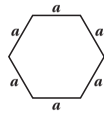
أوجد A عندما $a=4$.



27.53 وحدة مربعة

4) مساحة سداسي منتظم (A) طول ضلعه a تعطى بالعلاقة: $A=\frac{3a^2}{2}\sqrt{3}$

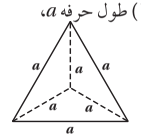
أوجد A عندما $a=9$.



210.44 وحدات مربعة

5) حجم رباعي سطوح منتظم (V) طول حرفه a، هي: $V=\frac{a^3}{12}\sqrt{2}$

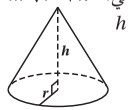
أوجد V عندما $a=2$.



0.94 وحدة مكعبة

6) مساحة السطح المنحني لمخروط قائم (S) ارتفاعه h وطول نصف قطر قاعدته r، هي: $S=\pi r\sqrt{r^2+h^2}$

أوجد S عندما $r=3$ و $h=6$

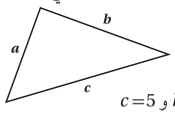


63.22 وحدة مربعة

7) قاعدة هيرون لحساب مساحة مثلث (A) باستعمال نصف محيطه s. حيث $s=\frac{a+b+c}{2}$ و a و b و c هي أطوال أضلاع المثلث، هي:

$A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

أوجد A عندما $a=3$ و $b=4$ و $c=5$



6 وحدات مربعة

الاسم: _____ التاريخ: _____

4-7 تدريبات إعادة التعليم

حل المعادلات والمتباينات الجذرية

حل المعادلات الجذرية : تستخدم الخطوات الآتية في حل المعادلات التي تحتوي على متغيرات تحت الجذر . وقد تحتاج أحيانًا إلى إجراء بعض العمليات الجبرية قبل استخدام هذه الخطوات.

الخطوة 1: افصل الجذر في أحد طرفي المعادلة.
الخطوة 2: للتخلص من الجذر، ارفع طرفي المعادلة لأس يساوي دليل الجذر.
الخطوة 3: حل المعادلة الناتجة.
الخطوة 4: تحقق من حلك في المعادلة الأصلية للتأكد من أنك لم تحصل على جذور دخيلة.

مثال 1 حل المعادلة $2\sqrt{(4x+8)}-4=8$

$2\sqrt{4x+8}-4=8$	المعادلة الأصلية
$2\sqrt{4x+8}=12$	بجمع 4 للطرفين
$\sqrt{4x+8}=6$	فصل الجذر في طرف المعادلة
$4x+8=36$	بتربيع الطرفين
$4x=28$	بطرح 8 من الطرفين
$x=7$	بقسمة الطرفين على 4

تحقق

$2\sqrt{4(7)+8}-4 \stackrel{?}{=} 8$
$2\sqrt{36}-4 \stackrel{?}{=} 8$
$2(6)-4 \stackrel{?}{=} 8$
$8=8$

مثال 2 حل المعادلة $\sqrt{(3x+1)}=\sqrt{5x}-1$

$\sqrt{3x+1}=\sqrt{5x}-1$	المعادلة الأصلية
$3x+1=5x-2\sqrt{5x}+1$	بتربيع الطرفين
$2\sqrt{5x}=2x$	بالتبسيط
$\sqrt{5x}=x$	فصل الجذر في طرف المعادلة
$5x=x^2$	بتربيع الطرفين
$x^2-5x=0$	بطرح $5x$ من الطرفين
$x(x-5)=0$	بالتحليل إلى العوامل
$x=0, x=5$	

تحقق

اذن $x=0$ ليس حلًا, $\sqrt{3(0)+1}=1, \sqrt{5(0)}-1=-1$
إذن $x=5$ هو الحل, $\sqrt{3(5)+1}=4, \sqrt{5(5)}-1=4$

تمارين:

حل كل معادلة مما يأتي:

1) $2\sqrt{3x+4}+1=15$ — **15**
2) $8+\sqrt{x+1}=2$ — **لا يوجد حل**
3) $\sqrt{5-x}-4=6$ — **−95**
4) $\sqrt{12-x}=0$ — **12**
5) $\sqrt{21}-\sqrt{5x-4}=0$ — **5**
6) $10-\sqrt{2x}=5$ — **12.5**
7) $\sqrt{4+7x}=\sqrt{7x-9}$ — **لا يوجد حل**
8) $4\sqrt[3]{2x+11}-2=10$ — **8**
9) $(9x-11)^{\frac{1}{2}}=x+1$ — **3,4**

الاسم: _____ التاريخ: _____

4-7 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

حل المعادلات والمتباينات الجذرية

حل المتباينات الجذرية : المتباينة الجذرية هي متباينة تحتوي متغيرًا في الصورة الجذرية، ولحل متباينة جذرية، اتبع الخطوات الآتية:

الخطوة 1: إذا كان دليل الجذر عددًا زوجيًا، فعيِّن قيم المتغير التي لا تجعل ما تحت الجذر سالبًا.
الخطوة 2: حل المتباينة جبريًا.
الخطوة 3: اختبر القيم للتأكد من صحة الحل.

مثال حل المتباينة $5-\sqrt{20x+4} \geq -3$

بما أن ما تحت الجذر التربيعي يتعيّن أن يكون موجبًا أو صفرًا. فحل أولًا $20x+4 \geq 0$.

$20x+4 \geq 0$
$20x \geq -4$
$x \geq -\frac{1}{5}$

الآن حل المتباينة $5-\sqrt{20x+4} \geq -3$

$5-\sqrt{20x+4} \geq -3$	المتباينة الأصلية
$\sqrt{20x+4} \leq 8$	فصل الجذر في طرف المتباينة
$20x+4 \leq 64$	بتربيع الطرفين
$20x \leq 60$	بطرح 4 من الطرفين
$x \leq 3$	بقسمة الطرفين على 20

يتضح أن الحل هو $-\frac{1}{5} \leq x \leq 3$. اختبر بعض القيم في المتباينة الأصلية.

تمارين:

حل كل متباينة مما يأتي:

1) $\sqrt{c-2}+4 \geq 7$ — $c \geq 11$
2) $3\sqrt{2x-1}+6 < 15$ — $\frac{1}{2} \leq x < 5$
3) $\sqrt{10x+9}-2 > 5$ — $x > 4$
4) $8-\sqrt{3x+4} \geq 3$ — $-\frac{4}{3} \leq x \leq 7$
5) $\sqrt{2x+8}-4 > 2$ — $x > 14$
6) $9-\sqrt{6x+3} \geq 6$ — $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$
7) $2\sqrt{5x-6}-1 < 5$ — $\frac{6}{5} \leq x < 3$
8) $\sqrt{2x+12}+4 \geq 12$ — $x \geq 26$

الاسم: _____ التاريخ: _____

4-7 تدريبات المهارات

حل المعادلات والمتباينات الجذرية

حل كل معادلة مما يأتي:

1) $\sqrt{x}=5$ **25**

2) $\sqrt{x}+3=7$ **16**

3) $5\sqrt{j}=1$ $\frac{1}{25}$

4) $v^{\frac{1}{2}}+1=0$ **لا يوجد حل**

5) $18-3y^{\frac{1}{2}}=25$ **لا يوجد حل**

6) $\sqrt[3]{2w}=4$ **32**

7) $\sqrt{b-5}=4$ **21**

8) $\sqrt{3n+1}=5$ **8**

9) $\sqrt[3]{3r-6}=3$ **11**

10) $2+\sqrt{3p+7}=6$ **3**

11) $\sqrt{k-4}-1=5$ **40**

12) $(2d+3)^{\frac{1}{3}}=2$ $\frac{5}{2}$

13) $(t-3)^{\frac{1}{3}}=2$ **11**

14) $4-(1-7u)^{\frac{1}{3}}=0$ **−9**

15) $\sqrt{3z-2}=\sqrt{z-4}$ **لا يوجد حل**

16) $\sqrt{g+1}=\sqrt{2g-7}$ **8**

حل كل متباينة مما يأتي:

17) $4\sqrt{x+1}\geq 12$ $x\geq 8$

18) $5+\sqrt{c-3}\leq 6$ $3\leq c\leq 4$

19) $-2+\sqrt{3x+3}<7$ $-1\leq x<26$

20) $-\sqrt{2a+4}\geq -6$ $-2\leq a\leq 16$

21) $2\sqrt{4r-3}>10$ $r>7$

22) $4-\sqrt{3x+1}>3$ $-\frac{1}{3}\leq x<0$

23) $\sqrt{y+4}-3\geq 3$ $y\geq 32$

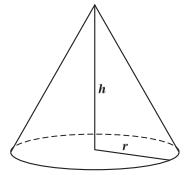
24) $-3\sqrt{11r+3}\geq -15$ $-\frac{3}{11}\leq r\leq 2$

4-7 تدريبات حل المسألة

حل المعادلات والمتباينات الجذرية

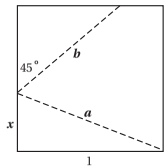
1) **لوحات:** ينفق رسام $(8n^{\frac{2}{3}}+400)$ ريالًا لرسم n لوحة. كم لوحة يمكنه رسمها بمبلغ 1200 ريال؟
1000

2) **المساحة الجانبية:** المساحة الجانبية لمخروط ارتفاعه h ونصف قطر قاعدته r تُعطى بالصيغة $L=\pi r\sqrt{r^2+h^2}$. إذا كانت المساحة الجانبية تساوي 65π وحدة مربعة، وطول نصف قطر القاعدة 5 وحدات، فأوجد ارتفاع المخروط.



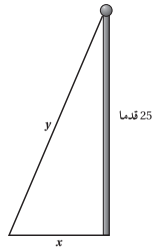
12 وحدة

3) **الأوريغامي** (*ORIGAMI*): يريد صلاح أن يطوي ورقة مربعة الشكل لعمل مثلث متطابق الأضلاع، ويريد أن يحدد x على ضلع الورقة ليقوم بطي الورقة حول الخط المتقطع المبيَّن بالشكل حيث $a=b$.



وباستعمال معلوماته السابقة في الهندسة يعلم صلاح أن $a=\sqrt{1+x^2}$ و $b=\sqrt{2}(1-x)$. وعليه أن يحل المعادلة $\sqrt{1+x^2}=\sqrt{2}(1-x)$. فما قيمة x؟
$2-\sqrt{3}$

4) **حبال:** رُبط طرفا حبل في قاعدة سارية وقمتها على صورة الشكل التالي. وكان $x+y=50$، اعتمادًا على نظرية فيثاغورس، المسافة $y=\sqrt{x^2+25^2}$. ما قيمة x؟



18.75 قدما

5) **مدى:** تتابع وكالة الفضاء الأمريكية "ناسا" أكثر من 300 كويكب تمر قريبة من الأرض. افترض أن الأرض تمثل نقطة الأصل في مستوى إحداثي، فيكون مسار الكويكب وفق العلاقة $y=\frac{17}{x}$, $x>0$. حيث كل وحدة تقابل مليون ميل. ويقول راصد فلكي أنه يمكنه مشاهدة الكويكب في المنظار الفلكي عندما يكون ضمن مسافة $\frac{145}{12}$ مليون ميل عن الأرض.

a) اكتب عبارة تعطي بُعد الكويكب عن الأرض بدلالة x.
$\sqrt{x^2+\frac{289}{x^2}}$

b) ما قيم x التي تجعل الكويكب ضمن مدى المنظار الفلكي للراصد؟
$\frac{17}{12}\leq x\leq 12$

الاسم: _____ التاريخ: _____

4-7 التدريبات الإثرائية

جداول الصواب

العمليات الأساسية في الرياضيات هي: الجمع، والطرح، والضرب، والقسمة، وإيجاد قيمة جذر، وإيجاد قيمة قوة. وفي المنطق، العمليات الأساسية هي: النفي ($\sim$)، و ($\wedge$) ، أو ($\vee$)، يتضمن ($\leftarrow$).

إذا كانت P و q عبارتين، فإن $\sim P$ تعني نفي العبارة P،و ($p \wedge q$ تعني p و q)، ($q \vee p$ تعني p أو q)، ($p \rightarrow q$ تعني أن العبارة p تتضمن العبارة q). وعمليات المنطق معرَّفة في جداول تسمى جداول الصواب. والجداول التالية تمثل العمليات: $\sim P$ و $p \wedge q$ و $p \vee q$ و $p \rightarrow q$ على الترتيب من اليسار إلى اليمين.

لاحظ في جدول الصواب للعبارة $\sim P$ أنه توجد حالتان ممكنتان للعبارة P هما: صواب (T) وخطأ (F). ويبيِّن الجدول أنه عندما تكون p خطأ تكون $\sim P$ صائبة.

p	$\sim p$
T	F
F	T

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

يمكنك أن تحدد الشروط والحالات التي تكون فيها عبارة مركبة صائبة، مستعملًا المعلومات المتوافرة في الجداول السابقة.

مثال **ما الشروط التي تجعل العبارة ($\sim p \vee q$) صائبة.**

اعمل جدول الصواب للعبارة، مستعملًا المعلومات المتوافرة في جدول الصواب للعبارة $p \vee q$ السابقة لإكمال العمود الأخير في الجدول.

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

يدل جدول الصواب على أن العبارة $\sim p \wedge q$ صائبة في جميع الحالات باستثناء الحالة التي تكون فيها p صائبة و q خطأ.

استعمل جداول الصواب لتحديد الشروط التي تكون عندها كل من العبارات الآتية صائبة.

1) $\sim p \vee \sim q$

دائما عدا الحالة : p صحيحة و q صحيحة

2) $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$

كل الحالات

3) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

عندما تكون p صحيحة و q صحيحة،
وكذلك عندما تكون p خطأ و q خطأ

4) $(\sim p \wedge \sim q) \rightarrow \sim (p \vee q)$

كل الحالات