اللهم صباح غائم بألطافك لا وقوع فيه ولا تعثر ،إنما غيثاً من لدنك يروينا ..

مقدمة في المتجهات

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

مقدمة في المتجهات

فيما سبق:

درست استعمال حساب المثلثات في حل المثلث. (مهارة سابقة)

والآن:

- أجري العمليات على المتجهات باستعمال مقياس الرسم، وأمثِّلها هندسيًا .
- أحلل المتجه إلى مركبتَيه المتعامدتين.
- أحلُّ مسائل تطبيقية على المتجهات.

المفردات:

كمية قياسية (عددية)
solar quantity

متجه
vector

الكمية المتجهة
vector quantity

قطعة مستقيمة متجهة
directed line segment

نقطة البداية
initial point

نقطة النهاية
terminal point

الوضع القياسي
standard position

اتجاه المتجه
direction

طول المتجه (المقدار)
magnitude

الاتجاه الربعي
quadrant bearing

الاتجاه الحقيقي
true bearing

المتجهات المتوازية
parallel vectors

المتجهات المتساوية
equal vectors

المتجهان المتعاكسان
opposite vectors

المحصلة
resultant

قاعدة المثلث
triangle method

قاعدة متوازي الأضلاع
parallelogram method

المتجه الصفري
zero vector

المركبات
components

المركبات المتعامدة
rectangular components

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

مقدمة في المتجهات

لماذا:

المحاولة الناجحة لتسجيل هدف في كرة القدم تعتمد على عدة عوامل؛ منها سرعة الكرة بعد ضربها، واتجاه حركتها. ويمكنك وصف كلٍّ من هذين العاملين باستعمال كمية واحدة تُسمى متجهًا.

الكميات القياسية والكميات المتجهة يمكن وصف الكثير من الكميات الفيزيائية مثل الكتلة بقيمة عددية واحدة، وعندئذٍ تُسمى **كمية قياسية (عددية)**، ويدل هذا العدد على مقدار الكمية أو قياسها. أما **المتجه** فهو كمية لها مقدار واتجاه؛ فمثلًا سرعة الكرة المتجهة نحو المرمى جنوبًا تمثل كلًّا من: مقدار سرعة الكرة، واتجاه حركتها، ولذلك تُعتبر متجه والعدد المرتبط بمتجه يسمى **كمية متجهة**.

مثال ١ تحديد الكميات المتجهة

حدِّد الكميات المتجهة، والكميات القياسية (العددية) في كلٍّ مما يأتي:

a) يسير قارب بسرعة **15 mi/h** في اتجاه الجنوب الغربي.

بما أن لهذه الكمية اتجاهًا، إذن هي كميةٌ متجهةٌ.

b) يسير شخص على قدميه بسرعة **75 m/min** جهة الغرب.

بما أن لسرعة الشخص قيمة هي 75 m/min، واتجاهًا للغرب؛ لذا فهي كمية متجهة.

c) قطعت سيارة مسافة قدرها **20 km**.

بما أن لهذه الكمية قيمة وهي 20 km، وليس لها اتجاه؛ إذن هذه المسافة كمية قياسية.

مقدمة في المتجهات

تحقق من فهمك

حدّد الكميات المتجهة ، والكميات القياسية (العددية) في كلٍّ مما يأتي:

1A) تسير سيارة بسرعة 60 mi / h ، وبزاوية $15°$ جهة الجنوب الشرقي.

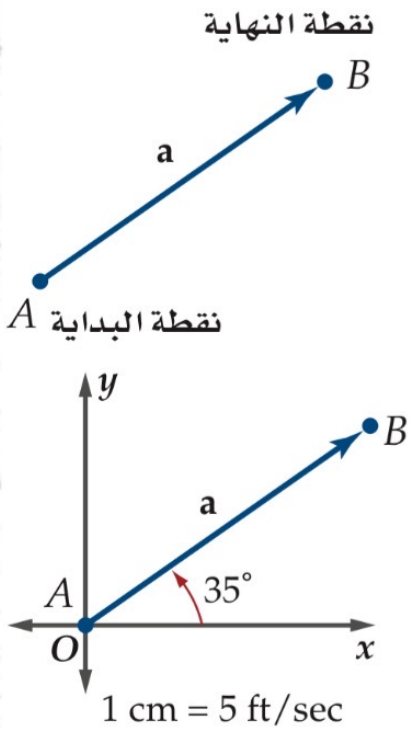
1B) هبوط مظلّي رأسيًّا إلى أسفل بسرعة 12.5 mi / h .

1C) طول قطعةٍ مستقيمةٍ 5cm .

مقدمة في المتجهات

المتجهات

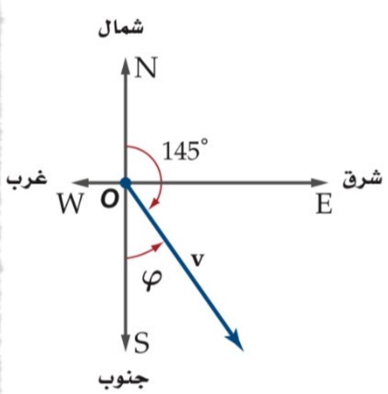
يمكن تمثيل المتجه هندسيًّا بقطعةٍ مستقيمةٍ لها اتجاه **(قطعة مستقيمة متجهة)**، أو سهم يُظهر كلًّا من المقدار والاتجاه. ويمثِّل الشكل المجاور القطعة المستقيمة المتجهة التي لها **نقطة البداية** A، **ونقطة النهاية** B. ويرمز لهذا المتجه بالرمز $\overrightarrow{AB}$ أو $\vec{a}$ أو **a** .



أما **طول المتجه** فهو عبارة عن طول القطعة المستقيمة التي تمثله، ففي الشكل المجاور، إذا كان مقياس الرسم هو $1\text{ cm} = 5\text{ ft/s}$، فإن طول المتجه **a** ، ويُرمز له بالرمز $|\mathbf{a}|$ ، يساوي 5×2.6 أو 13 ft/s .

يكون المتجه في **الوضع القياسي**. إذا كانت نقطة بداية المتجه هي نقطة الأصل ويعبّر عن **اتجاه المتجه** بالزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الأفقي (الاتجاه الموجب للمحور x). فمثلًا: اتجاه المتجه **a** هو $35°$.

ويمكن التعبير عن اتجاه المتجه أيضًا باستعمال زاوية **الاتجاه الربعي** φ ، وتُقرأ فاي، وهي زاوية قياسها بين $0°$ و $90°$ شرق أو غرب الخط الرأسي (خط شمال – جنوب). فمثلًا زاوية الاتجاه الربعي للمتجه **v** في الشكل المجاور هي $35°$ جنوب شرق، وتُكتب $S\ 35°\ E$.



كما يمكن استعمال زاوية **الاتجاه الحقيقي** ، حيث تُقاس الزاوية مع عقارب الساعة بدءًا من الشمال. ويُقاس الاتجاه الحقيقي بثلاثة أرقام، فمثلًا يُكتب الاتجاه الذي يحدّد زاوية قياسها $25°$ من الشمال مع عقارب الساعة باستعمال الاتجاه الحقيقي على الصورة $025°$.

إرشادات للدراسة

زاوية الاتجاه الحقيقي

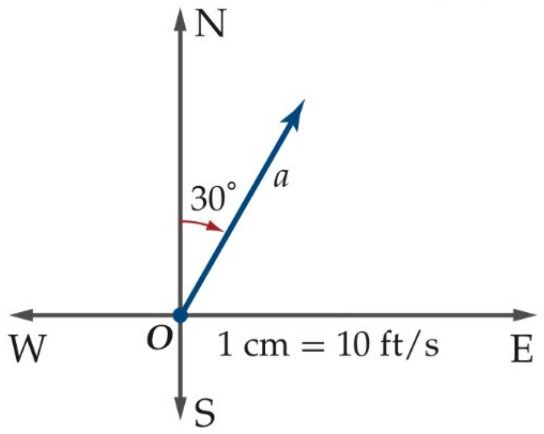
إذا أُعطي قياس زاوية بثلاثة أرقام، ولم تعطَ أي مركبات اتجاهية إضافية، فإنها زاوية اتجاه حقيقي. فمثلًا زاوية الاتجاه الحقيقي للمتجه **v** في الشكل المجاور هي $145°$.

مثال ٢ تمثيل المتجه هندسياً

استعمل مسطرةً ومنقلةً؛ لرسم متجه لكلٍّ من الكميات الآتية، واكتب مقياس الرسم في كل حالة:

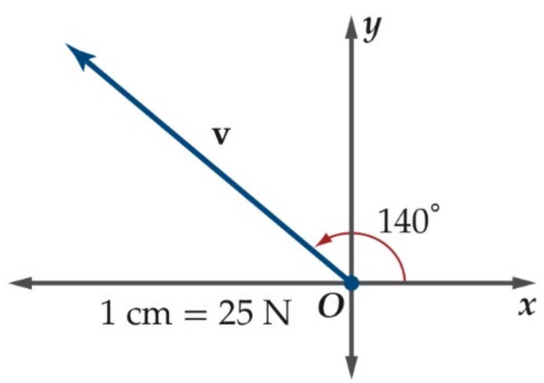
a) $a = 20$ ft/s باتجاه °030 .

استعمل مقياس الرسم $1\,\text{cm} = 10\,\text{ft/s}$ ، وارسم سهمًا طوله $20 \div 10$ ، أو 2 cm بزاوية قياسها °30 من الشمال، وفي اتجاه عقارب الساعة.



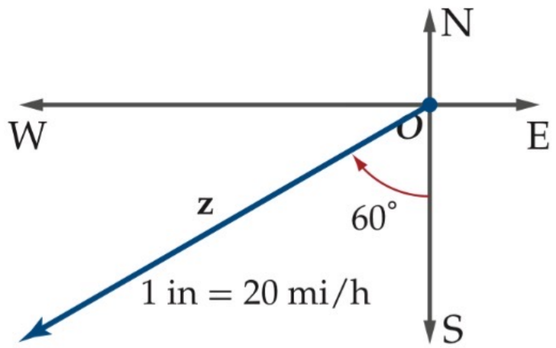
b) $v = 75$ N ، بزاوية قياسها °140 مع الاتجاه الأفقي.

استعمل مقياس الرسم $1\text{ cm} = 25\text{ N}$ ، وارسم سهمًا طوله $75 \div 25$ ، أو 3 cm في الوضع القياسي، وبزاويةٍ قياسها °140 مع الاتجاه الموجب للمحور x .



c) $z = 30$ mi/h ، باتجاه S 60° W .

استعمل مقياس الرسم $1\text{ in} = 20\text{ mi / h}$ ، وارسم سهمًا طوله $30 \div 20 = 1.5$ in ، بزاوية قياسها °60 في اتجاه جنوب غرب .



إرشادات للدراسة

النيوتن

وحدةٌ لقياس القوّة، ويرمز له بالحرف N، وهو عبارة عن القوّة التي تؤثر في جسم كتلته 1kg؛ لتكسبه تسارعًا مقداره $1\,\text{m/s}^2$.

تنبيه!

الطول

يمكن أن يمثل طول المتجه مسافة، أو سرعة، أو قوة. وإذا مثل المتجه سرعة، فإن طوله لا يمثّل المسافة المقطوعة .

تحقق من فهمك

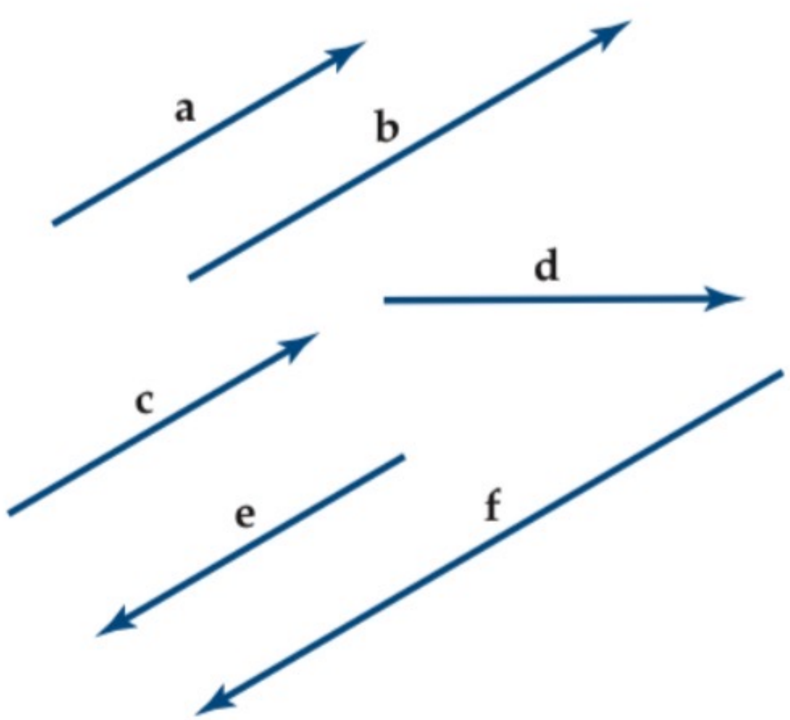
استعمل مسطرة ومنقلة؛ لرسم متجه لكلٍّ من الكميات الآتية، واكتب مقياس الرسم في كل حالة:

2A) $\mathbf{t} = 20\ \text{ft/s}$ ، باتجاه $065°$.

2B) $\mathbf{u} = 15\ \text{mi/h}$ ، باتجاه $S\ 25°\ E$.

2C) $\mathbf{m} = 60\,\text{N}$ ، بزاوية قياسها $80°$ مع الاتجاه الأفقي.

أنواع المتجهات:



عند إجرائك العمليات على المتجهات، فإنك تحتاج إلى الأنواع الشائعة الآتية من المتجهات:

- **المتجهات المتوازية** لها الاتجاه نفسه، أو اتجاهان متعاكسان، وليس بالضرورة أن يكون لها الطول نفسه. فمثلًا في الشكل المجاور $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \parallel \mathbf{c} \parallel \mathbf{e} \parallel \mathbf{f}$.
- **المتجهات المتساوية** لها الاتجاه نفسه، والطول نفسه. ففي الشكل المجاور $\mathbf{a}, \mathbf{c}$ ؛ لهما الطول والاتجاه نفساهما، لذا هما متساويان، ويعبَّر عنه بالرموز: $\mathbf{a} = \mathbf{c}$.
لاحظ أن $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ ؛ لأن $|\mathbf{a}| \neq |\mathbf{b}|$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{d}$ ؛ لأن لهما اتجاهين مختلفين.
- **المتجهان المتعاكسان** لهما الطول نفسه، لكن اتجاهيهما متعاكسان. يكتب المتجه المعاكس للمتجه $\mathbf{a}$ على الصورة $-\mathbf{a}$ ، ففي الشكل المجاور $\mathbf{e} = -\mathbf{a}$.

مقدمة في المتجهات

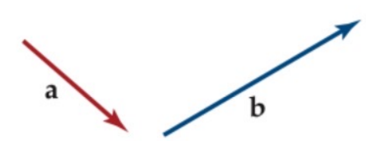
مفهوم اساسي

عند جمع متجهين أو أكثر يكون الناتج متجهًا،و يسمى **المحصّلة**. ويكون لمتجه المحصّلة التأثير نفسه الناتج عن تأثير المتجهين الأصليين عند تطبيقهما واحدًا تلو الآخر. ويمكن إيجاد المحصّلة هندسيًّا باستعمال **قاعدة المثلث**، أو **قاعدة متوازي الأضلاع**.

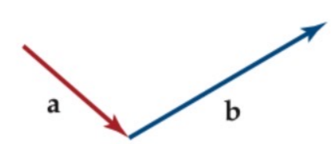
مفهوم أساسي — إيجاد المحصلة

قاعدة المثلث

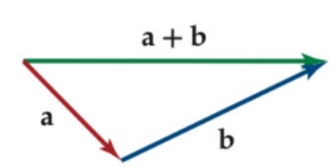
لإيجاد محصّلة المتجهين **a, b** ، اتّبع الخطوتين الآتيتين:



الخطوة 1 أجرِ انسحابًا للمتجه **b**، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة نهاية المتجه **a** .

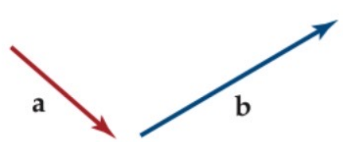


الخطوة 2 محصلة المتجهين **a, b** هي المتجه المرسوم من نقطة بداية **a** إلى نقطة نهاية **b** .



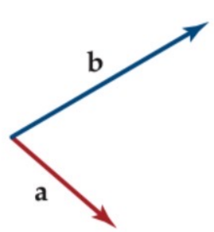
قاعدة متوازي الأضلاع

لإيجاد محصّلة المتجهين **a, b** ، اتّبع الخطوات الآتية :

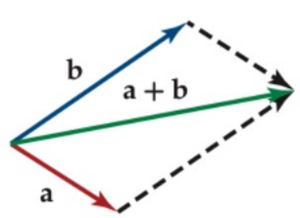


الخطوة 1 أجرِ انسحابًا للمتجه **b** ، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة بداية المتجه **a** .

الخطوة 2 أكمل رسم متوازي الأضلاع الذي ضلعاه **a, b** .



الخطوة 3 محصلة المتجهين هي المتجه الذي يُمثّله قطر متوازي الأضلاع .



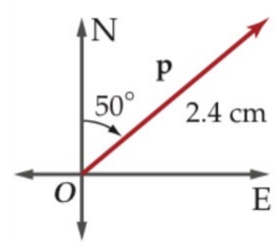
مقدمة في المتجهات

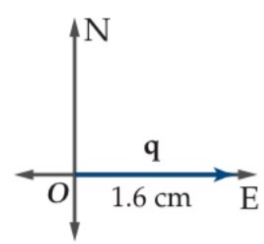
ايجاد محصلة متجهين

مثال ٣ من واقع الحياة

رياضة المشي: قطع عبد اللّه في سباق للمشي، مسافة $120\,m$ باتجاه $N\ 50°\ E$ ، ثم مسافة $80\,m$ في اتجاه الشرق. كم يبعُد عبد الله عن نقطة البداية، وما هي زاوية الاتجاه الربعي؟

افترض أن المتجه $\mathbf{p}$ يمثِّل المشي $120\,m$ في الاتجاه $N\,50°\,E$ ، وأن المتجه $\mathbf{q}$ يمثِّل المشي $80\,m$ باتجاه الشرق. ارسم شكلًا يمثّل $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ باستعمال مقياس الرسم $1cm = 50\,m$.

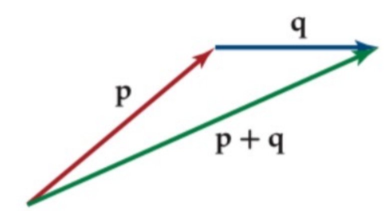




استعمل مسطرة ومنقلة؛ لرسم سهم طوله $120 \div 50 = 2.4\,cm$ ؛ ويصنع زاوية قياسها $50°$ شمال شرق؛ ليُمثّل المتجه $\mathbf{p}$ ، وارسم سهمًا آخر طوله $80 \div 50 = 1.6\,cm$ في اتجاه الشرق؛ ليُمثّل المتجه $\mathbf{q}$.

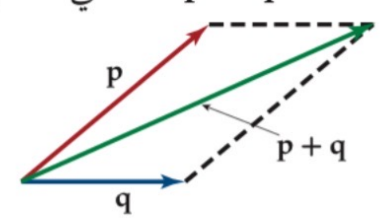
الطريقة 1 قاعدة المثلث

اعمل انسحابًا للمتجه $\mathbf{q}$ ، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة نهاية المتجه $\mathbf{p}$ ، ثم ارسم متجه المحصلة $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ كما في الشكل أدناه.

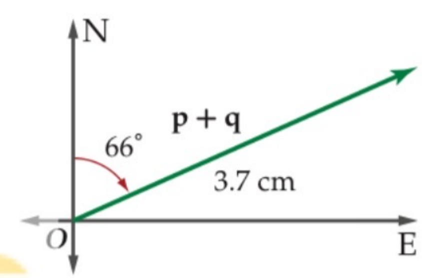


الطريقة 2 قاعدة متوازي الأضلاع

اعمل انسحابًا للمتجه $\mathbf{q}$ ، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة بداية $\mathbf{p}$، ثم أكمل متوازي الأضلاع، وارسم قطره الذي يمثّل المحصلة $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ ، كما في الشكل أدناه.



نحصل في كلتا الطريقتين على متجه المحصلة $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ نفسه. قِس طول $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ باستعمال المسطرة، ثم قِس الزاوية التي يصنعها هذا المتجه مع الخط الرأسي كما في الشكل المجاور.

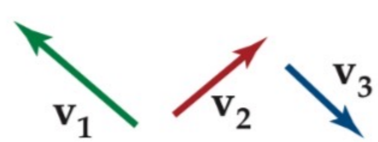


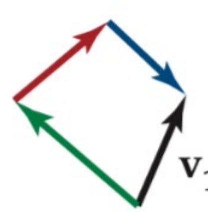
تجد أن طول المتجه يساوي $3.7\,cm$ تقريبًا، ويُمثّل $3.7 \times 50 = 185\,m$.
وعليه يكون عبد الله على بعد $185\,m$ من نقطة البداية باتجاه $N\ 66°\ E$.

إرشادات للدراسة

المحصلة

لإيجاد محصلة أكثر من متجهين باستعمال قاعدة متوازي الأضلاع، يلزم إعادة الرسم أكثر من مرة؛ لذا من الأسهل في هذه الحالة استعمال طريقة مشابهة لقاعدة المثلث، وذلك بوضع نقطة بداية متجه عند نقطة نهاية المتجه الذي يسبقه وهكذا.

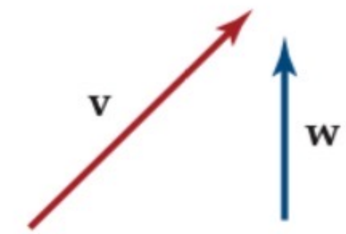




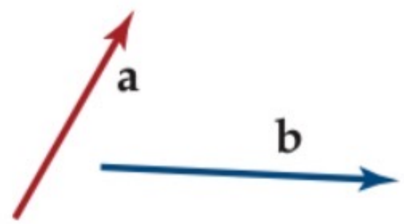
تحقق من فهمك

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية مستعملًا قاعدة المثلث، أو متوازي الأضلاع. ثمّ حدّد اتجاهها بالنسبة للأفقي.

(3A



(3B



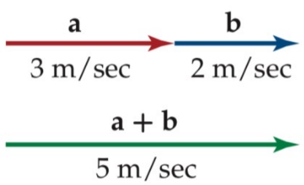
تحقق من فهمك

3C) لعبة أطفال: رمى طفل كرةً صغيرةً في لعبة مخصصة للأطفال بسرعة $7\,in/s$ ، باتجاه $310°$ ، فارتدت باتجاه $055°$ ، وبسرعة $4\,in/s$. أوجد مقدار محصلة حركة الكرة واتجاهها.
(قرب طول المحصلة إلى أقرب بوصة، والاتجاه إلى أقرب درجة)

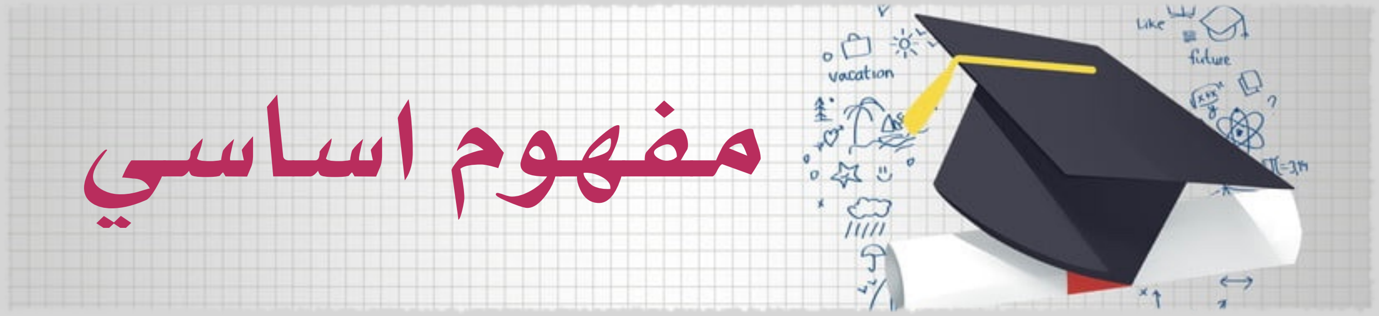
إرشادات للدراسة

المتجهات المتوازية في الاتجاه نفسه

محصّلة ناتج جمع متجهين أو أكثر لها الاتجاه نفسه، هو متجه طوله يساوي مجموع أطوال هذه المتجهات، واتجاهه هو اتجاه المتجهات الأصلية نفسه.



مقدمة في المتجهات



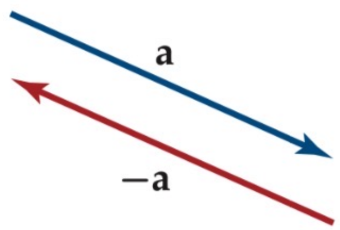
قراءة الرياضيات

$|k|$ تقرأ القيمة المطلقة للعدد الحقيقي k.

$|v|$ تمثل طول المتجه v.

عند جمع متجهين متعاكسين لهما الطول نفسه، فإن المحصلة هي **المتجه الصفري**. ويرمز له بالرمز $\vec{0}$ أو $\mathbf{0}$ ، وطوله صفر ، وليس له اتجاه. وعملية طرح المتجهات تشبه عملية طرح الأعداد. لإيجاد $\mathbf{p} - \mathbf{q}$ ، اجمع معكوس $\mathbf{q}$ إلى $\mathbf{p}$ ؛ أي أن: $\mathbf{p} - \mathbf{q} = \mathbf{p} + (-\mathbf{q})$.

و كذلك يمكن ضرب المتجه في عددٍ حقيقيٍّ.



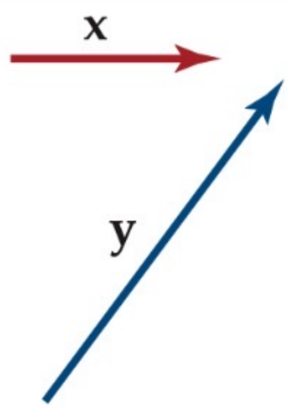
$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = 0$

مفهوم أساسي — ضرب المتجه في عدد حقيقي

إذا ضُرب المتجه $\mathbf{v}$ في عدد حقيقي k ، فإن طول المتجه $k\mathbf{v}$ هو $|k|\ |\mathbf{v}|$. ويتحدّد اتجاهه بإشارة k .

- إذا كانت $k > 0$ ، فإن اتجاه $k\mathbf{v}$ هو اتجاه $\mathbf{v}$ نفسه.
- إذا كانت $k < 0$ ، فإن اتجاه $k\mathbf{v}$ هو عكس اتجاه $\mathbf{v}$.

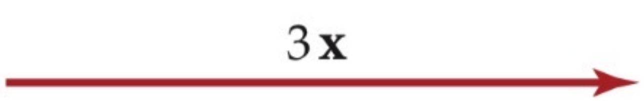
مثال ٤ العمليات على المتجهات



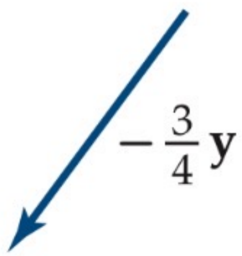
ارسم المتجه $3\mathbf{x}-\frac{3}{4}\mathbf{y}$ ، حيث $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ متجهان كما في الشكل المجاور.

أعد كتابة المتجه $3\mathbf{x}-\frac{3}{4}\mathbf{y}$ على صورة حاصل جمع متجهين $3\mathbf{x}+\left(-\frac{3}{4}\mathbf{y}\right)$ ، ثم مثّل المتجه $3\mathbf{x}$ برسم متجه طوله 3 أمثال المتجه $\mathbf{x}$ ، وبالاتجاه نفسه كما في الشكل **1.1.1** .

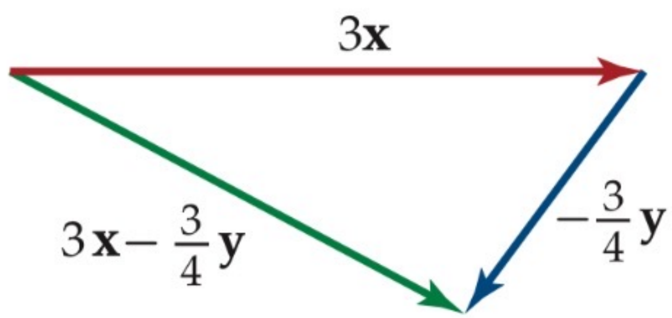
ولتمثيل المتجه $-\frac{3}{4}\mathbf{y}$ ، ارسم متجهًا طوله $\frac{3}{4}$ طول $\mathbf{y}$ ، وفي اتجاه معاكس لاتجاه $\mathbf{y}$ كما في الشكل **1.1.2** ، ثم استعمل قاعدة المثلث؛ لرسم متجه المحصلة كما في الشكل **1.1.3** .



الشكل 1.1.1



الشكل 1.1.2



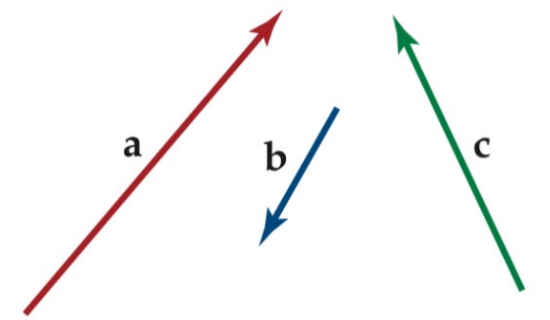
الشكل 1.1.3

مقدمة في المتجهات

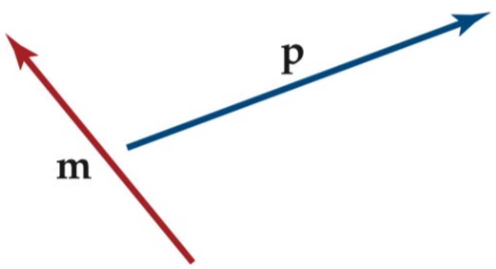
تحقق من فهمك

ارسم المتجه الذي يُمثّل كلًّا مما يأتي :

4A) $a - c + 2b$



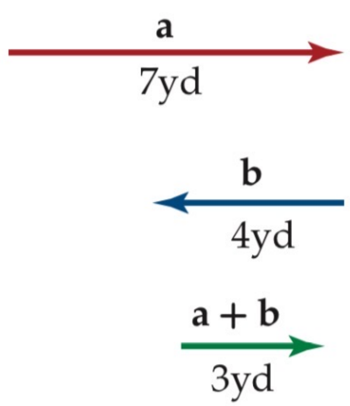
4B) $m - \frac{1}{4}p$



إرشادات للدراسة

المتجهان المتوازيان المتعاكسان

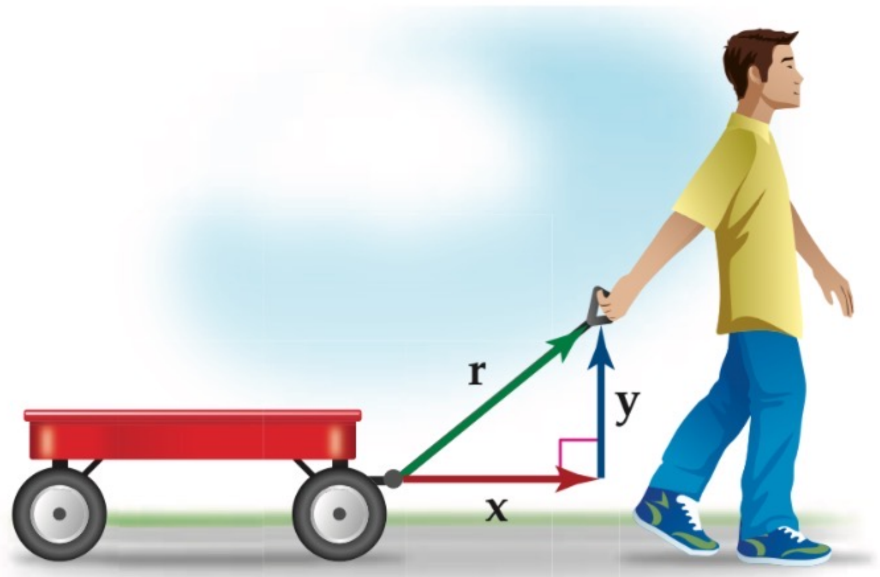
محصلة ناتج جمع متجهين متوازيين متعاكسين، هو متجه طوله يساوي القيمة المطلقة للفرق بين طولي المتجهين، واتجاهه هو اتجاه المتجه الأكبر طولًا.



مقدمة في المتجهات

تطبيقات المتجهات

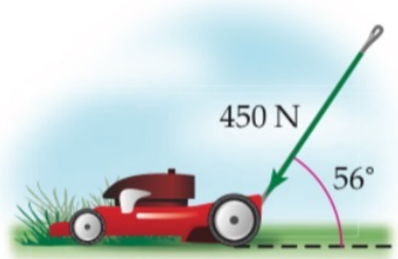
تطبيقات المتجهات: يُسمى المتجهان اللّذان ناتج جمعهما المتجه **r** ، **مركبتي** **r** . ومع أن مركبتي المتجه يمكن أن تكونا في أي اتجاه، إلا أنه من المفيد غالبًا تحليل المتجه إلى **مركبتين متعامدتين،** واحدة أفقية، والأخرى رأسية. ففي الشكل المجاور، يمكن اعتبار القوة **r** المبذولة لسحب العربة بصفتها مجموع مركبتين هما أفقية **x** تحرك العربة إلى الأمام، ورأسية **y** تسحب العربة إلى أعلى.



مثال ٥ من واقع الحياة

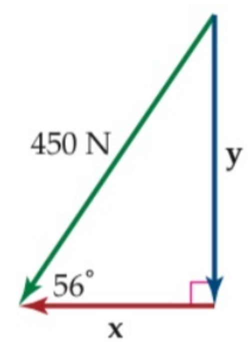
تحليل القوة إلى مركبتين متعامدين

قص العشب: يدفع علي عربة قصّ العشب بقوة مقدارها 450 N ، وبزاوية قياسها °56 مع سطح الأرض.



a) ارسم شكلًا يوضّح تحليل القوة التي يبذلها علي إلى مركبتين متعامدتين.

يمكن تحليل قوة الدفع إلى مركبتين؛ أفقية x إلى الأمام ورأسية y إلى أسفل كما في الشكل أدناه.



b) أوجد مقدار كلٍّ من المركبتين؛ الأفقية والرأسية للقوة.

تكوّن كلٌّ من القوة ومركبتاها الأفقية والرأسية مثلثًا قائمَ الزاوية. استعمل تعريف الجيب، أو جيب التمام؛ لإيجاد مقدار كل قوة منهما.

$\cos 56° = \frac{\|x\|}{450}$	تعريف الجيب، وجيب التمام	$\sin 56° = \frac{\|y\|}{450}$
$\|x\| = 450 \cos 56°$	حُل بالنسبة إلى x ، y	$\|y\| = 450 \sin 56°$
$\|x\| \approx 252$	استعمل الآلة الحاسبة	$\|y\| \approx 373$

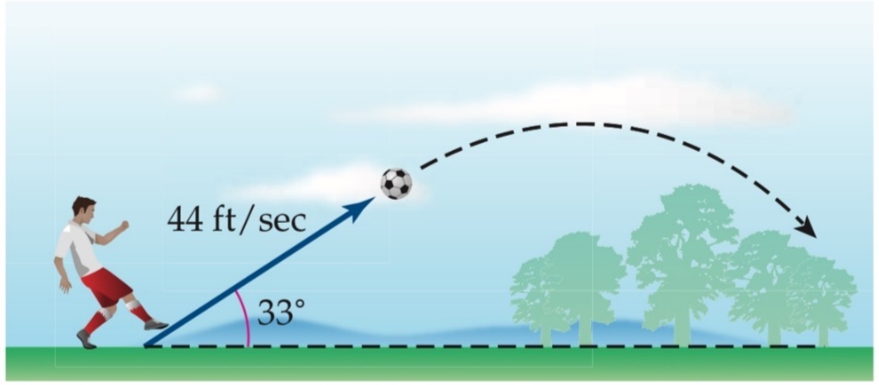
مقدار المركبة الأفقية 252 N تقريبًا، ومقدار المركبة الرأسية 373 N تقريبًا.

الربط مع الحياة

يتطلب الضغط على مفتاح الكهرباء، لإشعال الضوء قوة مقدارها 3 N .
والقوة التي تؤثر بها الجاذبية الأرضية في الشخص تعادل 600 N تقريبًا.
والقوة المبذولة من لاعب رفع أثقال تساوي 2000 N تقريبًا .

تحقق من فهمك

5) **كرة قدم:** يركل لاعبٌ كرةَ قدمٍ من سطح الأرض بسرعةٍ مقدارها 44 ft/s ، وبزاويةٍ قياسها °33 مع سطح الأرض كما في الشكل أدناه.



A) ارسم شكلًا يوضِّح تحليل هذه السرعة إلى مركبتين متعامدتين.

B) أوجد مقدار كلٍّ من المركبتين الأفقية والرأسية للسرعة .

مقدمة في المتجهات

(41 **تبرير:** حدّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا أو ليست صحيحة أبدًا، وبرِّر إجابتك.

"من الممكن إيجاد مجموع متجهين متوازيين باستعمال طريقة متوازي الأضلاع".

مسائل مهارات التفكير العليا

43) **اكتشف الخطأ:** حاول كلٌّ من حسين ومصطفى إيجاد محصلة المتجهين $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك.