تمثيل الدوال المثلثية بيانياً

قدرات

مربع مساحته ضعف محيطه عددياً فما طول محيطه ؟

أ ٣٠ ب ٢٠ ج ٢٥ د ٣٢

فيما سبق:

درست الدوالّ الدورية. الدرس (6-4)

والآن:

- أصف دوالّ الجيب وجيب التمام والظلّ، وأمثِّلها بيانيًّا.
- أصف دوالّ مثلَّثية أخرى، وأمثِّلها بيانيًّا.

المفردات:

السعة

amplitude

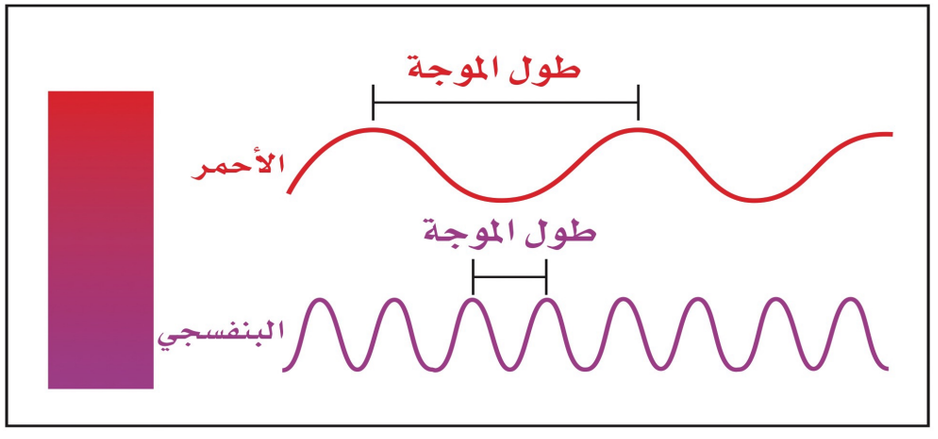
التردد

frequency

لماذا

لموجات الضوء المرئية، أطوال موجات أو ترددات مختلفة.
فاللون الأحمر له أكبر طول موجة، واللون البنفسجي له أقصر طول موجة.

ويمكنك تمثيل الحركة الموجية بالمعادلة:
$y = A \sin \frac{2\pi x}{\lambda}$، حيث تمثِّل A سعة الموجة، λ طول الموجة.



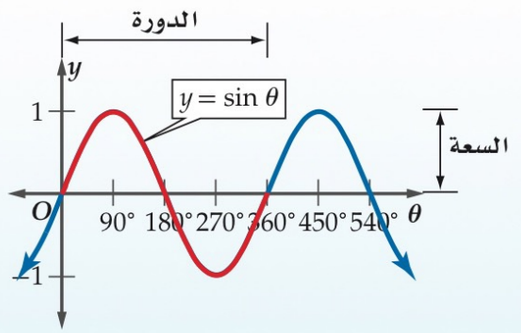
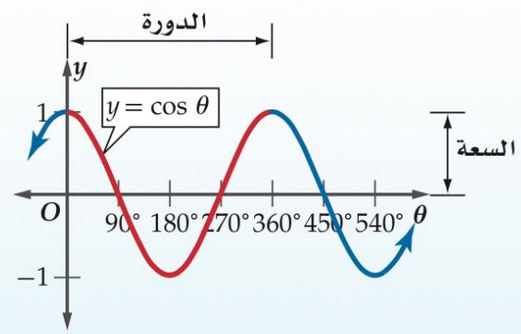
دوالُّ الجيب وجيب التمام والظلّ: يمكنك تمثيل الدوالّ المثلَّثية بيانيًّا في المستوى الإحداثي. تذكّر أن منحنيات الدوالّ الدورية فيها أنماط متكررة أو دورات. وأن الطول الأفقي لكلِّ دورة يُسمّى طول الدورة.

سعة منحنى دالّة الجيب أو دالّة جيب التمام تساوي نصف الفرق بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالّة.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

دالتا الجيب وجيب التمام

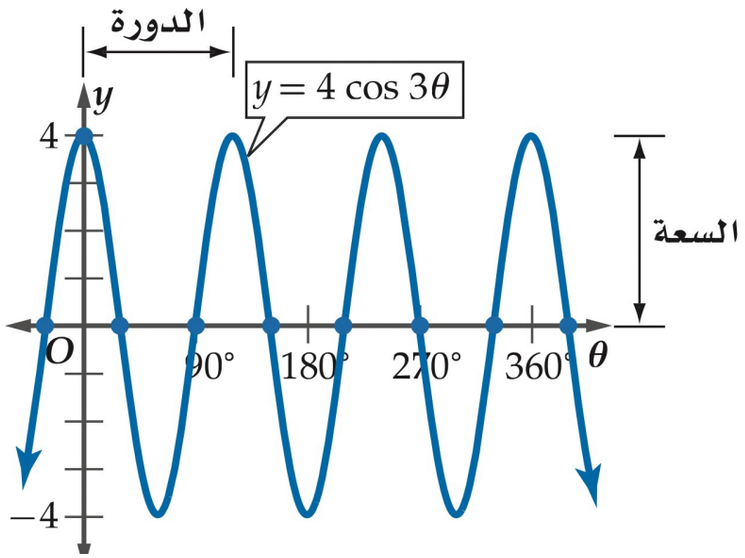
الدالّة المولدة (الأم)	$y = \sin \theta$	$y = \cos \theta$
التمثيل البياني		
المجال	مجموعة الأعداد الحقيقية	مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى	$\{y \mid -1 \le y \le 1\}$	$\{y \mid -1 \le y \le 1\}$
السعة	1	1
طول الدورة	360°	360°

يمكنك تطبيق ما تعلمتهُ في أثناء دراستك لتحويلات التمثيل البياني للدوالّ الأخرى على التمثيل البياني للدوالّ المثلَّثية في صورتها العامة: $y = a \cos b\theta$, $y = a \sin b\theta$، التي سعتها $|a|$، وطول دورتها $\frac{360^\circ}{|b|}$.

إيجاد السعة وطول الدورة

مثال

أوجد السعة وطول الدورة للدالّة $y = 4 \cos 3\theta$.



إرشادات للدراسة

طول الدورة

في الدالّتين:
$y = a \sin b\theta$,
$y = a \cos b\theta$،
b تُمثّل عدد الدورات
في 360°. ففي المثال 1
يدلُّ العدد 3 في الدالّة:
$y = 4 \cos 3\theta$ على
وجود 3 دورات في 360°.
مما يعني وجود دورة
واحدة في 120°.

تحقّق من فهمك

أوجد السعة وطول الدورة لكلِّ دالّة فيما يأتي:

(1A $y = \cos \frac{1}{2}\theta$

(1B $y = 3 \sin 5\theta$

استعمل منحنيات الدوالّ المولّدة (الأم) لتمثيل كلٍّ من الدالّتين: $y = a \cos b\theta$, $y = a \sin b\theta$. ثم استعمل السعة وطول الدورة لرسم منحنى دالّة الجيب أو دالّة جيب التمام المناسبة بيانيًّا. ويمكنك أيضًا استعمال نقاط التقاطع مع المحور θ.

إذا كانت دورة كلٍّ من الدالّتين $y = a \sin b\theta$ و $y = a \cos b\theta$ تبدأ عند $\theta = 0$ ، فإن نقاط تقاطع كلٍّ منهما مع المحور θ هي كما في الجدول الآتي:

$y = a \cos b\theta$	$y = a \sin b\theta$
$\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right), \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right)$	$(0, 0), \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right) \left(\frac{360°}{b}, 0\right)$

إرشادات للدراسة

السعة

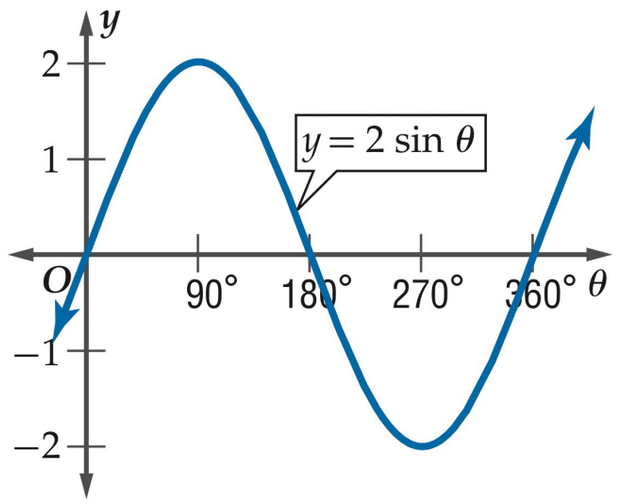
في التمثيل البياني لكلٍّ من الدالّتين $y = a \sin b\theta$, $y = a \cos b\theta$، تكون السعة هي $|a|$ ، والقيمة العظمى هي $y = |a|$، والقيمة الصغرى هي $y = -|a|$.

تمثيل دالَّتي الجيب وجيب التمام بيانيًّا

مثال

مثِّل كلًّا من الدالّتين الآتيتين بيانيًّا:

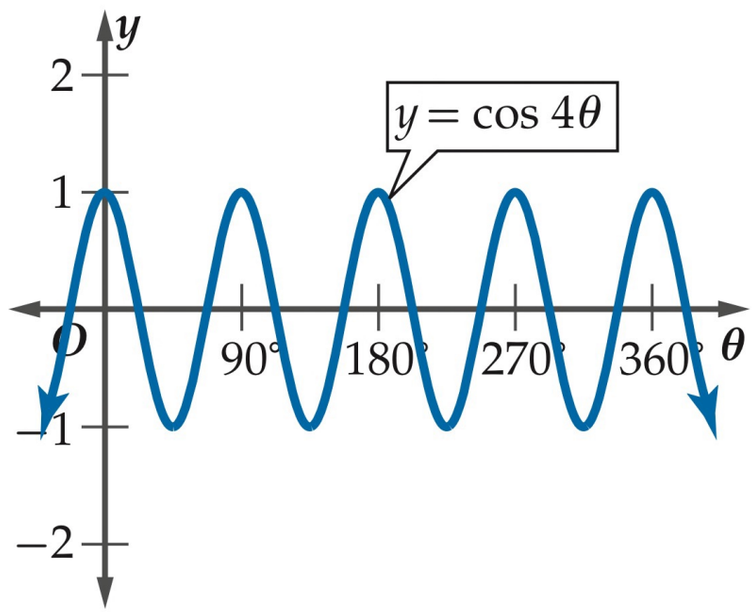
$y = 2\sin\theta$ (a



تمثيل دالَّتي الجيب وجيب التمام بيانيًّا

مثال

$$y = \cos 4\theta \ \text{(b}$$



تحقق من فهمك

$y = 3\cos\theta$ **(2A**

تحقق من فهمك

$y = \frac{1}{2}\sin 2\theta$ **(2B**

تفيد الدوال المثلثية في تمثيل المواقف الحياتية المرتبطة بالحركة الدورية، مثل الموجات الكهرومغناطيسية أو موجات الصوت. ويتم وصف هذه الأمواج عادة باستعمال **التردد** وهو عدد الدورات في وحدة الزمن.

ولإيجاد تردد التمثيل البياني لدالة نجد مقلوب طول الدورة، فمثلًا إذا كان طول الدورة للدالة $\frac{1}{100}$ ثانية، فإن ترددها يساوي 100 دورة في الثانية.

إرشادات للدراسة

السعة وطول الدورة

لاحظ أن السعة تؤثّر في منحنى الدالّة في اتجاه المحور y، أما طول الدورة فيؤثِّر في اتجاه المحور x .

طول الدورة والسعة للدوال الدورية

تعميم لطول الدورة والسعة للدوال المثلثية ..

الدالة	$a \sin b\theta$	$a \cos b\theta$	$a \tan b\theta$
طول دورتها	$\frac{360°}{\lvert b \rvert}$	$\frac{360°}{\lvert b \rvert}$	$\frac{180°}{\lvert b \rvert}$
سعتها	$\lvert a \rvert$	$\lvert a \rvert$	غير معرفة

طول الدورة والسعة للدوال الدورية

طول الدورة والسعة للدوال المثلثية ..

الدالة	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$
طول دورتها	360°	360°	180°
سعتها	1	1	غير معرفة

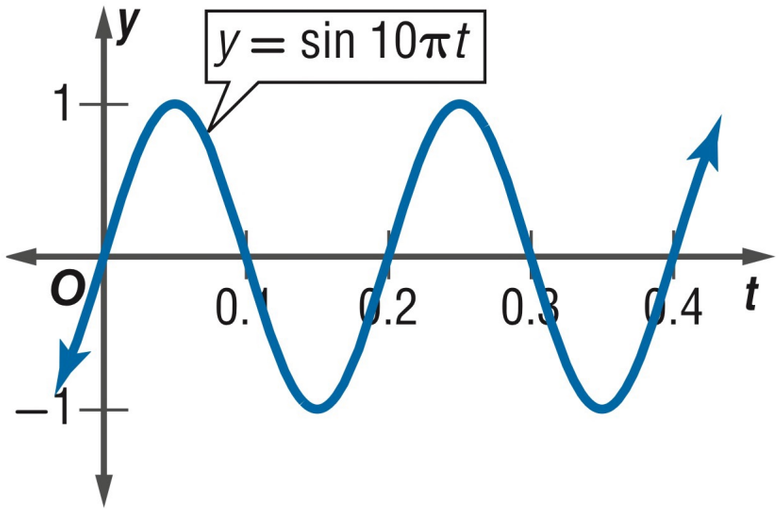
تمثيل موقف بدالّة دورية

مثال

أصوات: تَسمّى الأصوات التي يكون ترددها أقلّ من المستوى الذي يسمعه الإنسان، الأصوات تحت السمعية. ويمكن للفيلة سماع الأصوات تحت السمعية التي يصل ترددها إلى 5 هيرتز أو 5 دورات/ ثانية.

a) أوجد طول دورة الدالة التي تعبر عن موجات الصوت.

b) افترض أن السعة تساوي وحدة واحدة. اكتب دالّة جيب تُمثّل موجة الصوت y باعتبارها دالّة في الزمن t، ثم مثّلها بيانيًّا.



تحقّق من فهمك

3) **أصوات:** يمكن للإنسان سماع أصوات ترددها يصل إلى 20 هيرتز.

A) أوجد طول دورة الدالّة.

B) افترض أن السعة تساوي وحدة واحدة. اكتب دالّة جيب التمام التي تعبِّر عن موجات الصوت، ثم مثِّلها بيانيًّا.

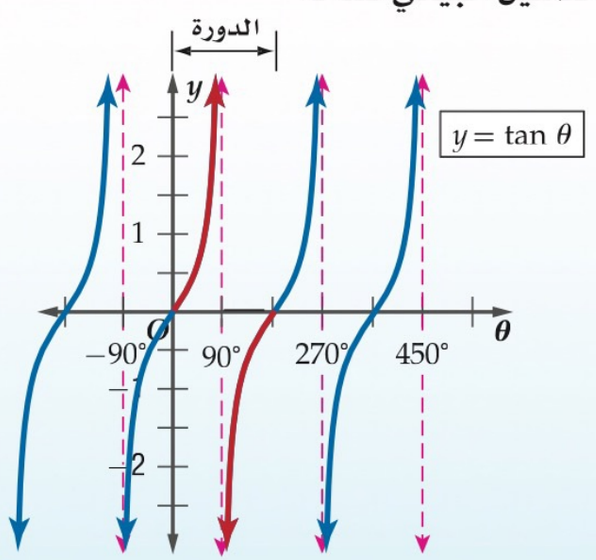
تُعَدّ دالة الظل من الدوال المثلثية التي لها خطوط تقارب.

مفهوم أساسي

دالة الظل

أضف إلى مطويتك

التمثيل البياني للدالة



الدالة المولدة (الأم)	$y = \tan \theta$
المجال	$\{\theta \mid \theta \neq 90^\circ + 180^\circ n, n \in Z\}$
المدى	مجموعة الأعداد الحقيقية
السعة	غير معرَّفة
طول الدورة	180°

طول الدورة لمنحنى الدالة $y = a \tan b\theta$ ، يساوي $\frac{180^\circ}{|b|}$ ، ولا يوجد سعة لهذه الدالة. وخطوط التقارب الرأسية لها عند المضاعفات الفردية للعدد $\frac{1}{2} \cdot \frac{180^\circ}{|b|}$.

تمثيل دوالّ الظلَ بيانيًّا

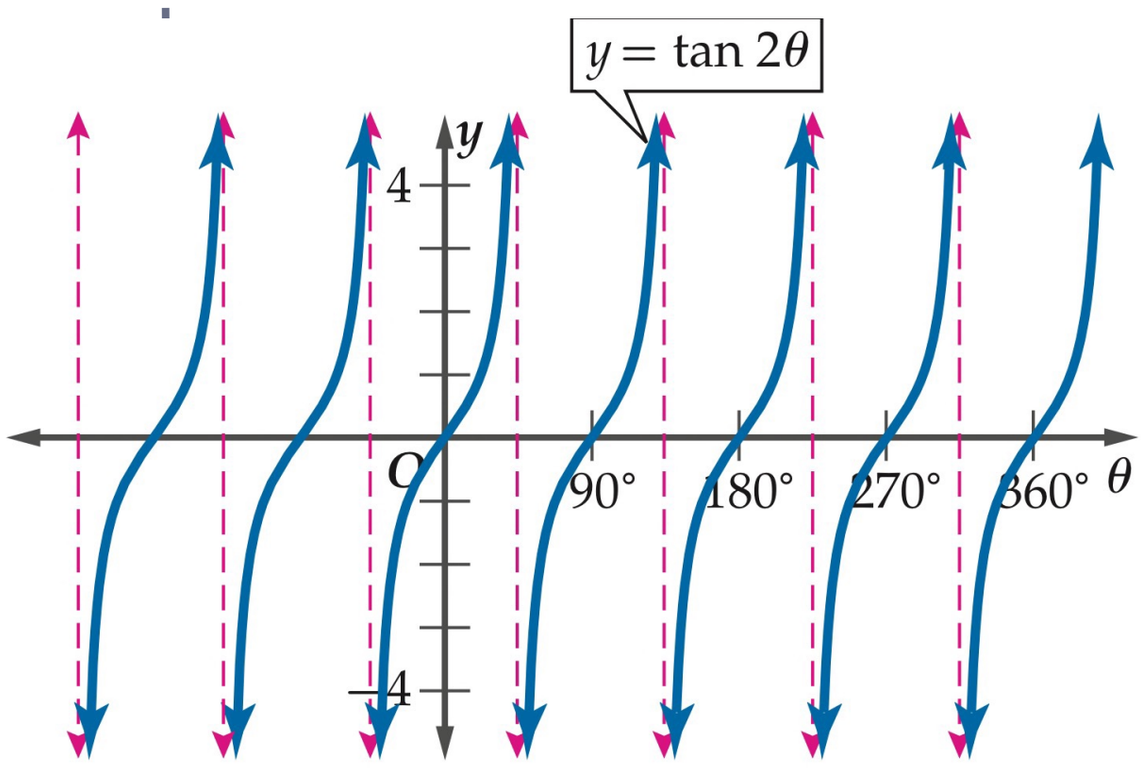
مثال

أوجد طول دورة الدالّة $y = \tan 2\theta$. ومثّل هذه الدالّة بيانيًّا.

إرشادات للدراسة

دالّة الظلِّ

لا يوجد سعة لدالّة الظلِّ بسبب عدم وجود قيم عظمى أو صغرى لها.



تحقّق من فهمك

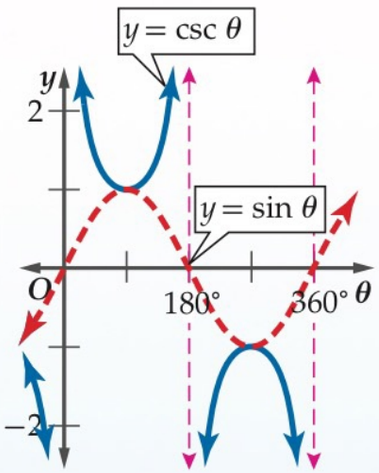
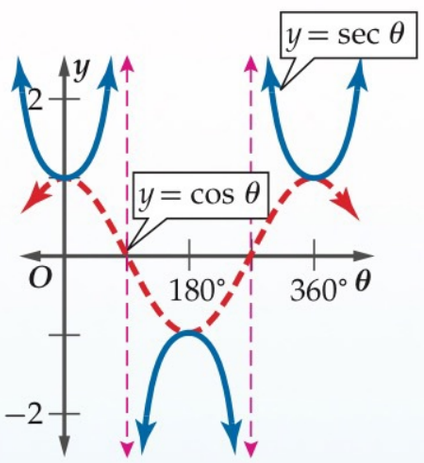
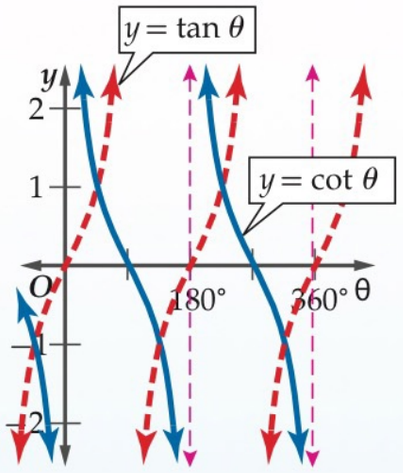
4) أوجد طول دورة الدالّة $y = \frac{1}{2}\tan\theta$. ثم **مثّل** هذه الدالّة بيانيًّا.

تمثيل الدوالّ المثلَّثية الأخرى بيانيًّا: ترتبط منحنيات دوالّ قاطع التمام، والقاطع، وظلِّ التمام بمنحنيات دوالّ الجيب، وجيب التمام، والظلِّ.

مفهوم أساسي

دوالّ قاطع التمام والقاطع وظلّ التمام

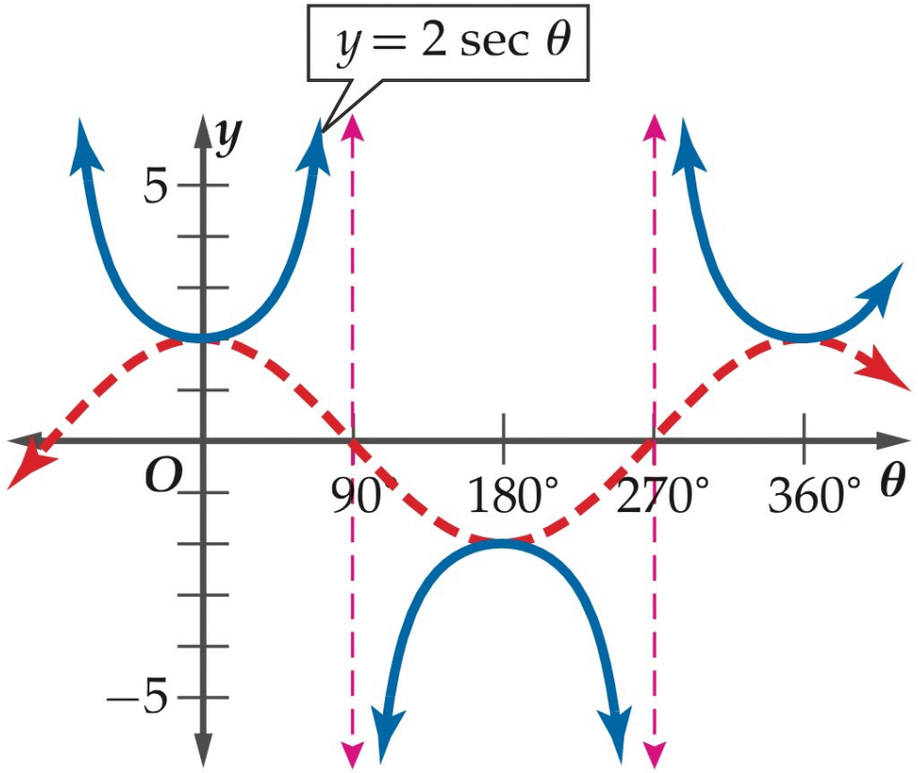
أضف إلى مطويتك

الدالّة المولّدة (الأم)	$y = \csc\theta$	$y = \sec\theta$	$y = \cot\theta$
التمثيل البياني			
المجال	$\{\theta \mid \theta \neq 180n, n \in Z\}$	$\{\theta \mid \theta \neq 90 + 180n, n \in Z\}$	$\{\theta \mid \theta \neq 180n, n \in Z\}$
المدى	$\{y \mid 1 \leq y \vee y \leq -1\}$	$\{y \mid 1 \leq y \vee y \leq -1\}$	مجموعة الأعداد الحقيقية
السعة	غير معرَّفة	غير معرَّفة	غير معرَّفة
طول الدورة	$360°$	$360°$	$180°$

تمثيل الدوالّ المثلَّثية الأخرى بيانيًّا

مثال

أوجد طول دورة الدالّة $y = 2 \sec \theta$. ثم مثِّل هذه الدالّة بيانيًّا.



تحقّق من فهمك

5) أوجد طول دورة الدالة $y = \csc 2\theta$. ثم مثّل الدالة بيانيًّا.

تأكد أوجد السعة وطول الدورة لكلِّ دالّة مما يأتي، ثم مثلها بيانيًّا:

1) $y = 4 \sin \theta$

تأكد أوجد السعة وطول الدورة لكلِّ دالّة مما يأتي، ثم مثلها بيانيًّا:

3) $y = \cos 2\theta$

تأكد

أوجد طول الدورة لكلِّ دالّة مما يأتي، ثم مثّلها بيانيًّا:

(6 $y = 3 \tan \theta$

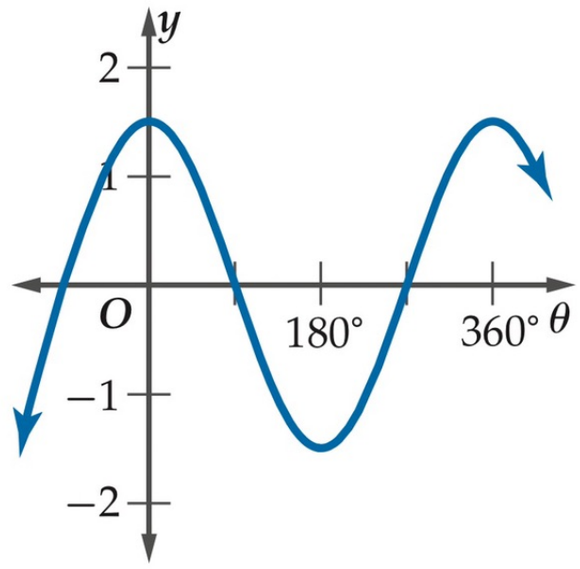
(7 $y = 2 \csc \theta$

(8 $y = \cot 2\theta$

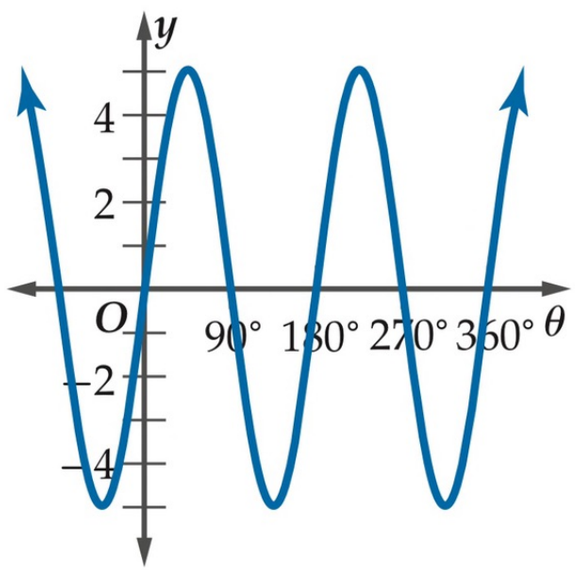
تدرب

حدّد طول دورة كلٍّ من الدوالّ الممثَّلة بيانيًّا فيما يأتي، ثم اكتب قاعدتها:

32)



33)



تحصيلي

أيّ الدوال المثلثية التالية سعتها 3 وطول دورتها $72°$ ؟

$y = 5\cos 3\theta$ (A)

$y = 5\sin 3\theta$ (B)

$y = 3\cos 5\theta$ (C)

$y = 3\tan 5\theta$ (D)