

الفصل ٨ الدوال التربيعية

فيما سبق

درست حل المعادلات التربيعية بالتحليل للعوامل واستعمال خاصية الجذر التربيعي.

والآن

أحل المعادلات التربيعية بيانياً، وبإكمال المربع، وباستعمال القانون العام.

لماذا؟

تكاليف: تقدر التكلفة الكلية "ت" للإنتاج اليومي لمنتج ما في منشأة صناعية بالدالة:
ت(س) = $800 - 10س + \frac{1}{4}س^2$ حيث س عدد الوحدات المنتجة يومياً، ويمكن تمثيل هذه الدالة بيانياً لإيجاد عدد الوحدات المنتجة في اليوم الذي يجعل التكلفة أقل ما يمكن.

المفردات:

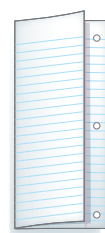
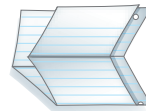
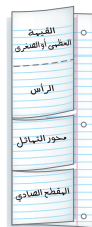
- الدالة التربيعية ص (١٢)
- الجذر المكرر ص (٢٢)
- إكمال المربع ص (٢٨)
- القانون العام ص (٣٤)



المطويات منظم أفكار

الدوال التربيعية: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول التمثيل البياني للدوال التربيعية، مبتدئاً بورقة ملاحظات.

- اطو الورقة طولياً بحيث يتكوّن هامش خارجي دليلاً على المطوية.
- اطو الورقة مرتين عرضياً لتكوين أربعة أقسام.
- افتح الطية وقص على خطوط الطي العرضية.
- سمّ كل قسم كما في الشكل أدناه.





التهيئة للفصل ٨

أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

مراجعة سريعة

مثال ١

استعمل جدول القيم لتمثيل الدالة $ص = ٣س + ١$ بيانيًا.

ص	س
١	٠
٤	١
٧	٢

اختبار سريع

استعمل جدول القيم لتمثيل كل دالة فيما يأتي بيانيًا: (مهارة سابقة)

(١) $ص = ٣س + ٣$ (٢) $ص = ٢س + ٢$

(٣) $ص = ٢س - ٣$ (٤) $ص = ٥, ٠س - ١$

(٥) $ص = ٣س - ١٢$ (٦) $ص = ٦ + ٩س$

(٧) $ص = ١س - ١$ (٨) $ص = ٦س$

(٩) **توفير:** مع محسن ١٠٠ ريال، ويخطط لتوفير ١٠ ريالات أسبوعيًا، مثل بيانيًا معادلة تبين المبلغ الكلي (م) الذي سيوفره محسن في (س) أسبوعًا.

مثال ٢

حدّد إذا كانت ثلاثية الحدود $٢س - ١٠س + ٢٥$ تشكل مربعًا كاملاً، اكتب "نعم" أو "لا"، وإذا كانت كذلك فحلّها:

(١) هل الحد الأول مربع كامل؟

(٢) هل الحد الأخير مربع كامل؟

(٣) هل الحد الأوسط يساوي $٢(١س)(٥س)$ ؟

حدّد إذا كانت كل ثلاثية حدود فيما يأتي تشكل مربعًا كاملاً، اكتب "نعم" أو "لا"، وإذا كانت كذلك فحلّها:

(مهارة سابقة)

(١٠) $٢٥س + ١٢س + ٣٦$ (١١) $٢٥س + ٥س + ٢٥$

(١٢) $١٠٠س + ٢٠س + ١٣$ (١٣) $٣٢س + ١٢س + ٣٦$

(١٤) $٦٤س + ٢٨س + ٤٩$ (١٥) $١٦س + ٢س + ٦٤$

(١٦) $١٢١س + ٢٢س + ١٢١$ (١٧) $١٢س + ٢س + ٢٥$

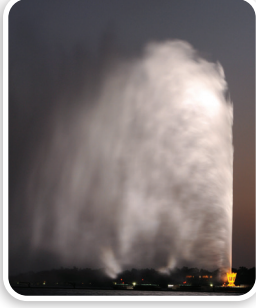
(١٨) $١س + ٢س + ٢$





تمثيل الدوال التربيعية بيانياً

لماذا؟



تُعد نافورة الملك فهد في جدة أعلى نافورة من نوعها في العالم، إذ يصل ارتفاعها إلى ٣١٢ متراً، وتقدم عرضاً رائعاً لحركة المياه والضوء، ويمكن تمثيل حركة المياه بمعادلات تربيعية. كما يمكنك استعمال التمثيلات البيانية لهذه المعادلات لتوضيح مسار المياه.

فيما سبق

درست تمثيل الدوال الخطية بيانياً.

والآن

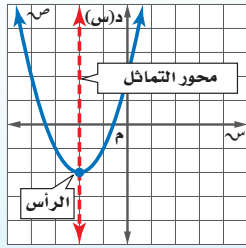
- أحلّ التمثيلات البيانية للدوال التربيعية.
- أمثل الدوال التربيعية بيانياً.

المفردات

- الدالة غير الخطية
- الدالة التربيعية
- الصورة القياسية للدالة التربيعية
- القطع المكافئ
- محور التماثل
- الرأس
- القيمة الصغرى
- القيمة العظمى
- متماثل

أضف إلى

مطوياتك



الدوال التربيعية

مفهوم أساسي

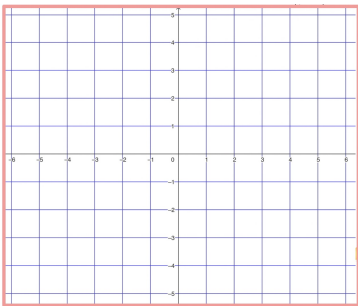
الدالة المولدة (الأم):	$(د) = س^2$
الصورة القياسية:	$(د) = أس^2 + ب س + ج$
شكل التمثيل:	قطع مكافئ
محور التماثل:	$س = -\frac{ب}{٢أ}$
المقطع الصادي:	ج

ويكون التمثيل البياني للدالة $ص = أس^2 + ب س + ج$ مفتوحاً إلى أعلى، إذا كان $أ > ٠$ ، وتمثل أدنى نقطة فيه نقطة **القيمة الصغرى**، ويكون مفتوحاً إلى أسفل، إذا كان $أ < ٠$ ، وتمثل أعلى نقطة فيه نقطة **القيمة العظمى**، وتمثل نقطتا القيمة العظمى أو القيمة الصغرى رأس القطع.

التمثيل البياني للقطع المكافئ

مثال ١

استعمل جدول القيم لتمثيل الدالة $ص = ٣س^2 + ٢س - ٤$ بيانياً، وحدد مجالها ومداها.



س	ص
١	
٠	
-١	
-٢	
-٣	

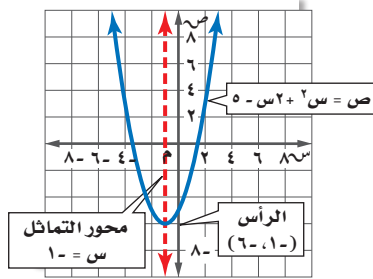
تحقق من فهمك

١) استعمل جدول القيم لتمثيل الدالة $ص = ٣س^2 + ٢س - ٤$ بيانياً، وحدد مجالها ومداها.

مراجعة المفردات

المجال والمدى

المجال هو مجموعة جميع القيم الممكنة للمتغير المستقل س. وأما المدى فهو مجموعة جميع القيم الممكنة للمتغير التابع ص.

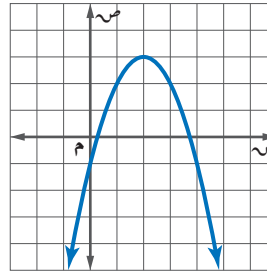


الأشكال **المتماثلة** هي تلك الأشكال التي يكون نصفها متطابقين تمامًا. فالقطع المكافئ هو شكل متماثل وله محور تماثل، وكل نقطة في نصف القطع إلى يسار محور التماثل تقابلها نقطة في النصف الآخر له.

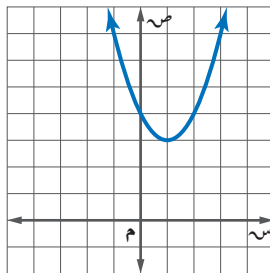
ومن الأسهل عادة تحديد الرأس أولاً عند إيجاد الخصائص من التمثيل البياني، والذي يمثل إما نقطة عظمى أو نقطة صغرى للقطع.

مثال ٢ تحديد خصائص القطع المكافئ من تمثيله البياني

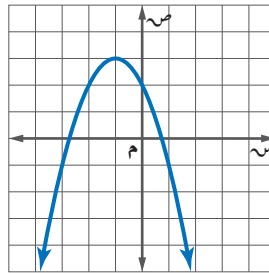
أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل، والمقطع الصادي للتمثيل البياني الآتي:



تحقق من فهمك



(ب)



(أ)

عند تحديد خصائص القطع المكافئ من قاعدة الدالة يكون من الأسهل غالباً إيجاد معادلة محور التماثل أولاً.

مثال ٣ تحديد خصائص القطع المكافئ من قاعدة دالته

أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل، والمقطع الصادي للدالة: $ص = ٢س² + ٤س - ٣$

إرشادات للدراسة

المقطع الصادي

المقطع الصادي هو
 الحد الثابت (جـ) للدالة
 التربيعية في الصورة
 القياسية



تحقق من فهمك

(أ) $ص = 3س - 2س + 6س - 5$ (ب) $ص = 2س + 2س + 2س + 2$

هناك فروق عامة بين الدوال الخطية والدوال التربيعية تظهر في الجدول الآتي:

الدوال الخطية	الدوال التربيعية
الصورة القياسية	ص = أ س + ب
الدرجة	1، لاحظ أن جميع المتغيرات من الدرجة الأولى.
مثال	ص = 2س + 6
التمثيل البياني	خط مستقيم
	ص = 3س + 2س + 5س - 4
	قطع مكافئ

كيف تحدد إن كان القطع المكافئ مفتوحاً إلى الأعلى أم إلى أسفل، وإذا كان الرأس يمثل له نقطة صغرى أم نقطة عظمى؟

مفهوم أساسي

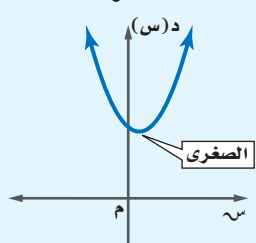
القيم العظمى والقيم الصغرى

يكون التمثيل البياني للدالة: د(س) = أ س + 2س + ب س + ج، حيث أ ≠ 0:

- مفتوحاً إلى أعلى وله قيمة صغرى عندما أ < 0
- مفتوحاً إلى أسفل وله قيمة عظمى عندما أ > 0
- مدى الدالة التربيعية هو جميع الأعداد الحقيقية التي تزيد على أو تساوي القيمة الصغرى إذا كانت أ < 0، أو جميع الأعداد الحقيقية التي تقل عن أو تساوي القيمة العظمى إذا كانت أ > 0.

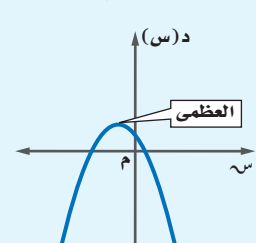
مثال:

أ موجبة



الصغرى

أ سالبة



العظمى

مثال 4 القيم العظمى والقيم الصغرى

لتكن د(س) = 2س - 2س + 6س + 6.

(أ) حدّد إذا كان للدالة قيمة عظمى أم قيمة صغرى.

(ب) أوجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى للدالة.

تنبيه !

القيم الصغرى والقيم العظمى

لا تنس إيجاد كلا الإحداثيين السيني والصادي للرأس (س، ص)، حيث إن القيمة الصغرى أو القيمة العظمى تمثل الإحداثي الصادي له.



(ج) حدد مجال الدالة ومدaha.

تحقق من فهمك

ليكن د (س) = $2س^2 - 4س - 1$.

١٤ (أ) حدّد فيما إذا كان للدالة قيمة عظمى أم قيمة صغرى.

١٤ (ب) أوجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى للدالة.

١٤ (ج) حدد مجال الدالة ومدaha.

تمثيل الدوال التربيعية بيانياً: تعلّمت كيفية إيجاد العديد من الخصائص المهمة للدوال التربيعية.

أضف إلى

مطويتك

تمثيل الدوال التربيعية بيانياً

مفهوم أساسي

- الخطوة ١: أوجد معادلة محور التماثل.
- الخطوة ٢: أوجد الرأس وحدّد إذا كان يمثل نقطة صغرى أم نقطة عظمى.
- الخطوة ٣: أوجد المقطع الصادي.
- الخطوة ٤: استعمل التماثل لإيجاد نقاط أخرى على التمثيل البياني للدالة عند الضرورة.
- الخطوة ٥: صل بين النقاط بمنحنى.

تمثيل الدوال التربيعية بيانياً

مثال ٥

مثّل الدالة د (س) = $س^2 + 4س + 3$ بيانياً.

الخطوة ١:

الخطوة ٢:

الخطوة ٣:

إرشادات للدراسة

التماثل والنقاط

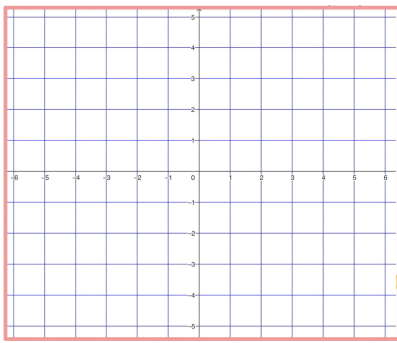
النقاط الواقعة على الطرفين المتقابلين لمحور التماثل تبعد المسافة نفسها عن المحور يميناً ويساراً، كما تبعد بعداً متساوياً من الرأس.



وزارة التعليم

Ministry of Education

الدرس ٨-١: تمثيل الدوال التربيعية بيانياً - ١٤٤٢



الخطوة ٤ :

الخطوة ٥ :

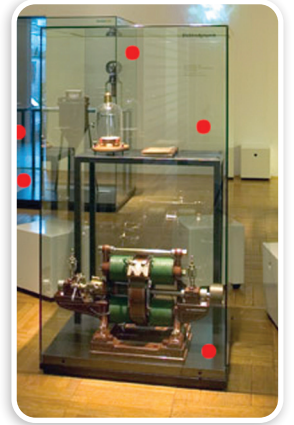
تحقق من فهمك

٥ (أ) د(س) = $-2س^2 + 2س - 1$ ٥ (ب) د(س) = $3س^2 - 6س + 2$

استعملت معلوماتك حول الدوال التربيعية والقطوع المكافئة والتمائل لإنشاء تمثيلات بيانية، ويمكنك تحليل هذه التمثيلات لحل مسائل من واقع الحياة.

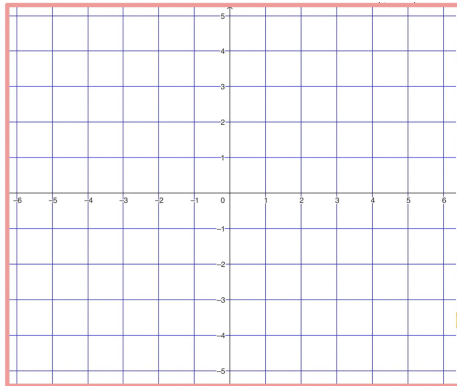
مثال ٦ من واقع الحياة استعمال تمثيل الدوال التربيعية بيانياً

فيزياء: عرضت الجمعية السعودية للعلوم الفيزيائية فيلمًا لإطلاق نموذج صاروخ، حيث يمكن تمثيل ارتفاع الصاروخ عن الأرض بالأقدام بعد (س) ثانية بالدالة $f(س) = -13س^2 + 130س + 312$.
(أ) مثل الدالة بيانيًا.



الربط مع الحياة

أنشئت الجمعية السعودية للعلوم الفيزيائية في جامعة الملك خالد عام ١٤٢٢هـ؛ لتهيئة سبل التواصل بين المهتمين بمجالات العلوم الفيزيائية المختلفة، من خلال عقد وتنظيم الندوات والمؤتمرات في مجال العلوم الفيزيائية.



(ب) ما الارتفاع الذي أُطلق منه الصاروخ؟

(ج) ما أقصى ارتفاع يصله الصاروخ؟



تحقق من فهمك

٦) **رمي الرمح:** يشارك علي في مسابقة رمي الرمح، ويمكن تمثيل ارتفاع الرمح (ص) بالأقدام بعد (س) ثانية، بالمعادلة $ص = -١٦س^٢ + ٦٤س + ٦$.

(أ) مثل مسار هذا الرمح بيانياً.

(ب) ما الارتفاع الذي أطلق منه الرمح؟

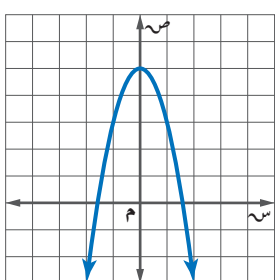
(ج) ما أقصى ارتفاع يصله الرمح؟

تأكد

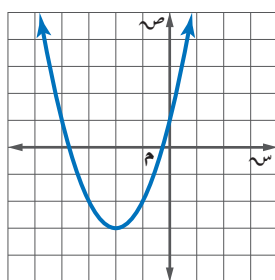
استعمل جدول القيم، لتمثيل كل دالة فيما يأتي بيانياً، وحدّد مجالها ومداهها:

(١) $ص = ٢س^٢ + ٤س - ٦$ (٢) $ص = ٢س^٢ + ٢س - ١$ (٣) $ص = ٣س^٢ - ٦س - ٥$

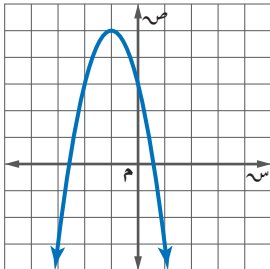
أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل، والمقطع الصادي لكل تمثيل بياني فيما يأتي:



(٦)



(٥)



(٤)

أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل، والمقطع الصادي لكل دالة فيما يأتي:

(٧) $ص = -٢س^٢ + ٢س + ١$ (٨) $ص = ٢س^٢ - ٤س + ٥$ (٩) $ص = ٤س^٢ - ٨س + ٩$

في الأسئلة ١٠-١٢ أجب عما يأتي:

(أ) حدّد فيما إذا كان للدالة قيمة صغرى أم قيمة عظمى.

(ب) أوجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى.

(ج) حدّد مجال الدالة ومداهها.

(١٠) $ص = -٢س^٢ + ٢س + ٢$ (١١) $ص = -٣س^٢ + ٦س + ٣$ (١٢) $ص = -٢س^٢ + ٨س - ٦$

مثل كل دالة فيما يأتي بيانياً:

(١٣) $ص = -٣س^٢ + ٦س + ٣$ (١٤) $ص = -٢س^٢ + ٤س + ١$ (١٥) $ص = ٢س^٢ - ٨س - ٤$

٦) **كرة:** يقذف ياسر كرة في الهواء، وفق المعادلة $ص = -١٦س^٢ + ١٦س + ٥$ حيث تمثّل (ص) ارتفاع الكرة بالأقدام بعد (س) ثانية.

(أ) مثل هذه الدالة بيانياً.

(ب) ما الارتفاع الذي قُذفت منه الكرة؟

(ج) ما أقصى ارتفاع تصله الكرة من سطح الأرض؟



تدرب وحل المسائل

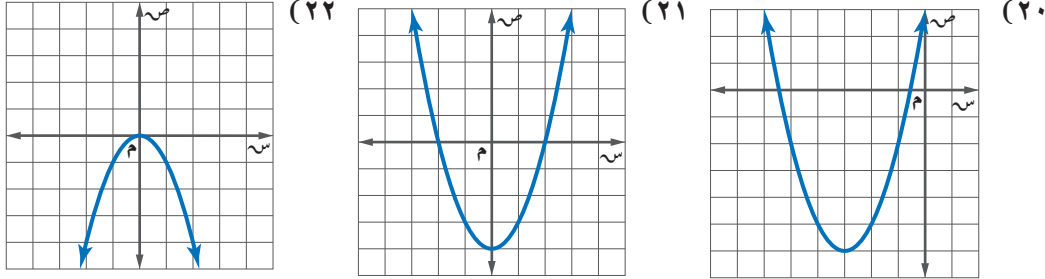
مثال ١

استعمل جدول القيم لتمثيل كل دالة فيما يأتي بيانيًا، وحدد مجالها ومداها.

(١٧) $ص = س^٢ + ٤س + ٦$ (١٨) $ص = س^٢ + ٤س + ٧$ (١٩) $ص = س^٢ - ٨س - ٥$

مثال ٢

أوجد الرأس ومعادلة محور التماثل، والمقطع الصادي لكل تمثيل بياني فيما يأتي:



مثال ٣

تقنية: أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل، والمقطع الصادي لكل دالة فيما يلي، ومثلها بيانيًا باستخدام أحد التطبيقات الحاسوبية.

(٢٣) $ص = س^٢ + ٨س + ١٠$ (٢٤) $ص = س^٢ + ١٢س + ١٠$ (٢٥) $ص = س^٢ - ٦س + ٧$

مثال ٤

في الأسئلة ٢٦-٢٨، أجب عما يأتي:

(أ) حدّد فيما إذا كان للدالة قيمة صغرى أو قيمة عظمى.

(ب) أوجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى.

(ج) حدّد مجال الدالة ومداها؟

(٢٦) $ص = س^٢ - ٨س + ١$ (٢٧) $ص = س^٢ + ٤س - ٥$ (٢٨) $ص = س^٢ + ١٨س - ٢١$

مثال ٥

مثّل كل دالة فيما يأتي بيانيًا:

(٢٩) $ص = س^٢ + ٦س - ٤$ (٣٠) $ص = س^٢ - ٤س - ٣$ (٣١) $ص = س^٢ + ١٢س + ٥$

(٣٢) **كرة قدم:** قذف حارس المرمى الكرة من مستوى سطح الأرض إلى الأعلى بسرعة ابتدائية مقدارها ٩٠ قدمًا في الثانية، والدالة $ص = -١٦ن + ٩٠ن$ تمثل ارتفاع الكرة بعد (ن) ثانية.

(أ) ما ارتفاع الكرة بعد ثانية واحدة؟

(ب) متى تكون الكرة على ارتفاع ١٢٦ قدمًا؟

(ج) ما أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة؟



الربط مع الحياة

عندما ينطلق الجسم أو الأداة في الهواء يسمى مقذوفًا، وقد يكون هذا الجسم أداة جامدة مثل الرمح، قرص، كرة، أو كائن حي مثل الوثب العالي، والوثب الطويل.



(٣٣) **تمثيلات متعددة:** سوف تكتشف في هذه المسألة حل المعادلات التربيعية باستعمال جداول القيم.

(أ) **جبرياً:** حدّد الدالة المرتبطة بكل معادلة فيما يأتي، ثم انسخ الجدول وأكمله.

المعادلة	الدالة المرتبطة	الأصفار
$س^2 - س = ١٢$		
$س^2 + س٨ = ٩$		
$س^2 = ١٤س - ٢٤$		
$س^2 + ١٦س = -٢٨$		

(ب) **بيانياً:** مثل كل دالة مرتبطة باستعمال الحاسبة البيانية.

(ج) **تحليلياً:** استعمل قيم الجدول الموجودة على حاسبتك لتحديد أصفار كل دالة مرتبطة، ثم اكتب الأصفار في الجدول أعلاه.

(د) **لفظياً:** وضح العلاقة بين عدد حلول المعادلة وأصفار الدالة المرتبطة بها؟

إرشادات للدراسة

الأصفار

عدد أصفار الدالة يساوي درجة الدالة مع احتساب الجذر المكرر.

مسائل مهارات التفكير العليا

(٣٤) **مسألة مفتوحة:** اكتب دالة تربيعية معادلة محور التماثل لتمثيلها البياني هي $س = -\frac{٣}{٨}$ ، ملخصاً خطوات عملك.

(٣٥) **اكتشف الخطأ:** تحاول عبير ومنى إيجاد محور التماثل للقطع المكافئ، فأيهما كانت إجابتها صحيحة؟ فسّر إجابتك.

عبير

$$ص = س^2 - ٤س + ٦$$

$$س = \frac{ب}{١٢}$$

$$س = \frac{٤-}{(١-)^٢}$$

$$س = ٢-$$

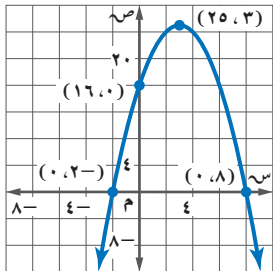
منى

$$ص = س^2 - ٤س + ٦$$

$$س = \frac{ب}{١٢}$$

$$س = \frac{٤-}{(١-)^٢}$$

$$س = ٢$$



(٣٦) **تحّد:** اكتب معادلة التمثيل البياني المجاور باستعمال محور التماثل وأحد المقطعين السينيين.

(٣٧) **تبرير:** إذا كان رأس قطع مكافئ هو النقطة (٠, ٢)، وإحدى نقاطه (٩, ٥)، فأوجد نقطة أخرى عليه، وشرح طريقة إيجادها.

(٣٨) **اكتب:** وضح كيفية إيجاد محور التماثل لمعادلة الدالة التربيعية، ثم فسّر الخصائص الأخرى للتمثيل البياني التي يمكنك اشتقاقها منه، وكيف توصّلت إليها.



تدريب على اختبار

- ٤٠) ما مدى الدالة د (س) = $4 - س^2 - \frac{1}{س}$ ؟
- (أ) جميع الأعداد الصحيحة التي تقل عن أو تساوي $\frac{1}{3}$
- (ب) جميع الأعداد الصحيحة غير السالبة
- (ج) جميع الأعداد الحقيقية
- (د) جميع الأعداد الحقيقية التي تقل عن أو تساوي $-\frac{1}{3}$



$$٣٦ = ر$$

٣٩) هندسة: دائرة مساحتها ٣٦ ط وحدة مربعة، إذا زاد نصف قطرها إلى مثليه، فكم تصبح مساحة الدائرة الجديدة؟

- (أ) ٧٢ ط وحدة مربعة (ج) ١٢٩٦ ط وحدة مربعة
- (ب) ١٤٤ ط وحدة مربعة (د) ٩ ط وحدة مربعة

مراجعة تراكمية

حدّد إذا كانت كل ثلاثية حدود فيما يأتي تشكّل مربعًا كاملاً، اكتب "نعم" أو "لا"، وإذا كانت كذلك فحلّلها: (مهارة سابقة)

٤٣) $٩س + ٨س + ١٦$

٤٢) $٤س^٢ - ٢٠س + ٢٥$

٤١) $٤س^٢ + ٤س + ١$

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

أوجد المقطع السيني للتمثيل البياني لكل معادلة فيما يأتي:

٤٦) $١٨ - ص = ٣س$

٤٥) $١٢ = ٢س - ٣ص$

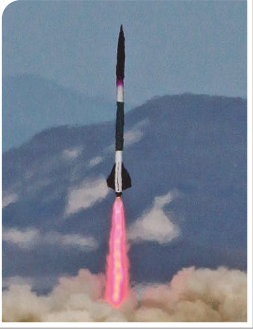
٤٤) $١٠ = ٢ص + س$





٨-١ معدل التغير في الدالة التربيعية

أطلق نموذج صاروخ من الأرض إلى الأعلى بسرعة ١٤٤ قدمًا/ثانية، والدالة $s = -16t^2 + 144t$ تمثل ارتفاع الصاروخ (ص) بعد (س) ثانية، يمكنك استقصاء معدل التغير في ارتفاع الصاروخ باستعمال الدالة التربيعية.

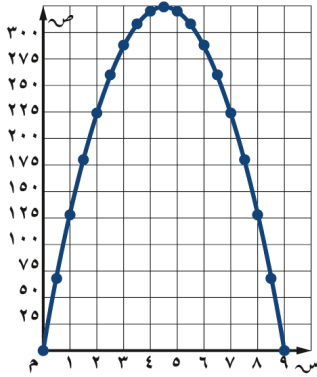


نشاط

الخطوة ١: انسخ الجدول أدناه.

س	٠	٠,٥	١,٠	١,٥	...	٩,٠
ص	٠					
معدل التغير	—					

الخطوة ٢: أوجد قيمة ص عند كل قيمة من قيم س من ٠ إلى ٩.



الخطوة ٣: مثل الأزواج المرتبة (س، ص) على ورقة مربعات، ثم صل بين النقاط بمنحنى، ولاحظ أن الدالة تزايد عندما $s > 0$ ، $s > 4,5$ ، وتتناقص عندما $s > 4,5$.

الخطوة ٤: تذكر أن معدل التغير هو التغير في ص مقسومًا على التغير في س، أوجد معدل التغير عند كل فترة طولها نصف ثانية.

تمارين

استعمل الدالة التربيعية $s = -16t^2 + 144t$

(١) أنشئ جدولاً للدالة مشابهًا للجدول الوارد في النشاط مستعملًا قيم س: -٤، -٣، -٢، -١، ٠، ١، ٢، ٣، ٤، ثم أوجد قيم ص عند كل قيمة من قيم س.

(٢) مثل بيانيًا الأزواج المرتبة على ورقة مربعات، وصل بين النقاط بمنحنى، ثم صف تزايد الدالة وتناقصها.

(٣) أوجد معدل التغير في كل عمود بدءًا من $s = -3$ ، وقارن بين معدلات التغير عندما تزايد الدالة، وعندما تناقص.

(٤) **تحذير:** إذا أسقط جسم من ارتفاع ١٠٠ قدم في الهواء فإنه يسقط بمعدل يمكن تمثيله بالدالة $s = -16t^2 + 100t$ مع تجاهل مقاومة الهواء، حيث تمثل د (س) ارتفاع الجسم بالأقدام بعد (س) ثانية، أنشئ جدولاً للقيم كما في الجدول الوارد في تمرين ١، واختر قيمًا مناسبة لـ (س)، وأكمل الجدول بقيم س، ص ومعدلات التغير، ثم قارن بين هذه المعدلات، وصف الأنماط التي تلاحظها.



حل المعادلات التربيعية بيانياً

لماذا؟

رابط الدرس الرقمي



www.ien.edu.sa



يعبر عن المسار المنحني لكرة قدم رُكّلت داخل ملعب بالدالة $ص = -س^2 + ١٨س$ ؛ حيث (س) المسافة الأفقية التي قطعتها الكرة بالأمتار، (ص) ارتفاع الكرة فوق سطح الأرض بالأمتار.

ويمكن استعمال المقاطع السينية للتمثيل البياني لهذه الدالة لتحديد المسافة الأفقية التي ستقطعها الكرة حتى تلمس الأرض.

فيما سبق

درست حل المعادلات التربيعية بالتحليل إلى العوامل.

والآن

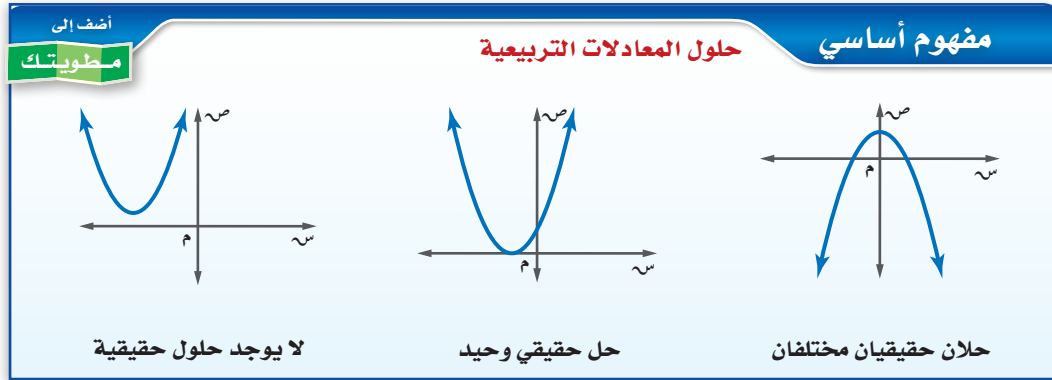
- أحل المعادلات التربيعية بيانياً.
- أقدر حلول المعادلات التربيعية من تمثيلها البياني.

المفردات

الجذر المكرر

حل المعادلة التربيعية بالتمثيل البياني: الصورة القياسية للمعادلة التربيعية هي:

$أس^٢ + ب س + ج = ٠$ ، حيث $أ \neq ٠$ ، ولكتابة الدالة التربيعية على صورة معادلة، استبدل ص أو د (س) بصفر، وتذكر أن حلول المعادلة أو جذورها يمكن تحديدها بإيجاد المقاطع السينية للتمثيل البياني للدالة المرتبطة، ويوجد للمعادلة التربيعية حلان حقيقيان أو حل حقيقي واحد، أو لا يوجد لها حلول حقيقية.



جذران حقيقيان مختلفان

مثال ١

حل المعادلة $س^٢ - ٢س - ٨ = ٠$ بيانياً.

تحقق من فهمك

(أ) $س^٢ - ٣س + ٤ = ٠$

(ب) $س^٢ - ١٨س + ٨٠ = ٠$

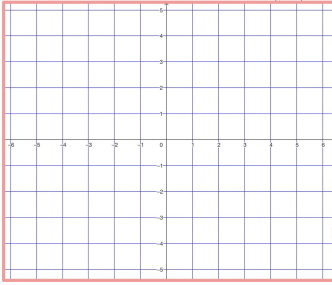
حلول المعادلة في مثال ١ عدنان حقيقيان مختلفان، إلا أنه أحياناً يكون الجذران هما العدد نفسه، ويُسمى حينئذٍ **جذراً مكرراً**.

جذر مكرر

مثال ٢

حل المعادلة $x^2 - 6x = -9$ بيانيًا.

الخطوة ١ :



الخطوة ٢ :

الخطوة ٣ :

تحقق :

تنبيه

الحلول الدقيقة

قد تظهر الحلول التي نتوصل إليها من التمثيل البياني على أنها دقيقة، إلا أنه لا يمكنك التأكد من ذلك ما لم تتحقق منها في المعادلة الأصلية.

تحقق من فهمك

٢ (ب) $x^2 - 8x = -16$

٢ (أ) $x^2 + 25 = 10x$

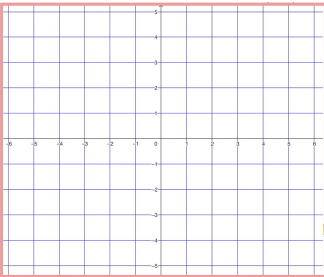
كما أن هناك معادلات تربيعية ليس لها حلول حقيقية.

لا يوجد جذور حقيقية

مثال ٣

حل المعادلة $x^2 - 3x + 5 = 0$ بيانيًا.

الخطوة ١ :



الخطوة ٢ :

الخطوة ٣ :

تحقق :

تحقق من فهمك

٣ (أ) $x^2 - 3x + 5 = 0$

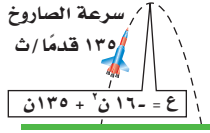
٣ (ب) $x^2 - 8x + 16 = 0$

الأمثلة ١ - ٣ تقنية: حل كل معادلة فيما يلي بياناً باستخدام أحد التطبيقات الحاسوبية.

(١) $س^٢ + ٣س - ١٠ = ٠$ (٢) $س^٢ - ٨س = ٠$ (٣) $س^٢ + ٤س - ٤ = ٠$

مثال ٤ حل كل معادلة فيما يأتي بياناً، وإذا لم تكن الجذور أعداداً صحيحة، فقدّرهما إلى أقرب جزء من عشرة:

(٤) $س^٢ - ٥س + ١ = ٠$ (٥) $س^٢ - ٩س = ٠$ (٦) $س^٢ = ٢٥$



(٧) **معرض العلوم:** إذا صمّم نواف نموذجاً لصاروخ يمكنه أن ينطلق في الهواء وفق المعادلة المبينة في الشكل، حيث (ع) ارتفاع الصاروخ بالأقدام بعد (ن) ثانية من انطلاقه، فكم يبقى الصاروخ في الهواء تقريباً؟

تدرب وحل المسائل

الأمثلة ١ - ٣ حل كل معادلة فيما يأتي بياناً:

(٨) $س^٢ + ٧س + ١٤ = ٠$ (٩) $س^٢ + ٢س - ٢٤ = ٠$ (١٠) $س^٢ - ٢س = ١$

مثال ٤ حل كل معادلة فيما يأتي بياناً، وإذا لم تكن الجذور أعداداً صحيحة، فقدّرهما إلى أقرب جزء من عشرة:

(١١) $س^٢ + ٢س - ٩ = ٠$ (١٢) $س^٢ - ٤س = ٢٠$ (١٣) $س^٢ + ٣س = ١٨$

مثال ٥ (١٤) **أفعوانية:** ترتفع أفعوانية براكبيها إلى الأعلى، ثم تنزل بهم إلى الأسفل وفق المعادلة:

$ع = ١٦ - ١٨٥س + ١٨٥س^٢$ ، حيث (ع) الارتفاع بالأقدام بعد (ن) ثانية، فكم ثانية تستغرق الأفعوانية للعودة إلى الأسفل؟

استعمل التحليل إلى العوامل لتحديد عدد المرات التي يقطع فيها التمثيل البياني محور السينات في كل دالة مما يأتي، ثم حدّد أصفار كل منها:

(١٥) $س^٢ - ٨س + ١٦ = ٠$ (١٦) $س^٢ + ٣س + ٤ = ٠$ (١٧) $س^٢ + ١٢س + ٣٢ = ٠$

(١٨) **نظرية الأعداد:** استعمل معادلة تربيعية لإيجاد عددين مجموعهما ٩، وناتج ضربهما ٢٠.

(١٩) **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذه المسألة كيفية تفسير العلاقة بين الدوال التربيعية وتمثيلاتها البيانية.

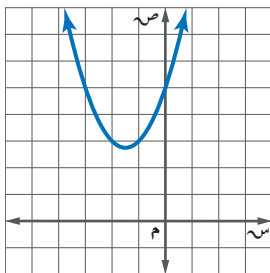
(أ) **بيانياً:** مثل الدالة $س = س^٢$.

(ب) **تحليلياً:** اكتب إحداثيات الرأس وإحداثيات نقطتين على التمثيل.

(ج) **بيانياً:** مثل الدوال $س = س^٢ + ٢$ ، $س = س^٢ + ٤$ ، $س = س^٢ + ٦$ بيانياً على المستوى الإحداثي السابق نفسه.

(د) **تحليلياً:** اكتب إحداثيات الرأس وإحداثيات نقطتين على كل من هذه التمثيلات التي لها إحداثيات السينية نفسها. ماذا تستنتج؟

مسائل مهارات التفكير العليا



(٢٠) **اكتشف الخطأ:** يقوم معاذ وأحمد بإيجاد عدد الأصفار الحقيقية للدالة الممثلة بالشكل المجاور، فيقول معاذ إنه ليس لهذه الدالة أصفار حقيقية؛ لأنه لا يوجد لتمثيلها البياني مقاطع سينية. بينما يقول أحمد: إن لها صفرًا حقيقيًا واحدًا؛ لأن للتمثيل البياني للدالة مقطعًا صاديًا. فأيهما كانت إجابته صحيحة؟ فسر إجابتك.

(٢١) **مسألة مفتوحة:** صف مسألة من واقع الحياة يتم فيها قذف جسم في الهواء، واكتب معادلة تمثل ارتفاع الجسم بالنسبة للزمن، وحدد الفترة الزمنية التي يمكنها الجسم في الهواء.

(٢٢) **تحذّر:** اكتب معادلة تربيعية لها الجذور المذكورة في كل مما يأتي:

(أ) جذر مكرر مرة واحدة.

(ب) جذر نسبي (غير صحيح) واحد، وجذر صحيح واحد.

(ج) جذران صحيحان مختلفان ومتعاكسان جمعياً.

(٢٣) **اكتب:** وضح كيف تقرب جذور المعادلة التربيعية عندما لا تكون أعداداً صحيحة.

تدريب على اختبار

(٢٥) تمثل الصيغة $f = \frac{1}{4}n^2$ المسافة (ف) بالأمتار التي يقطعها جسم يسقط على كوكب سقوطاً حرّاً بعد (ن) ثانية. اكتب الصيغة بدلالة المتغير ج، الذي يمثل تسارع الجاذبية.

(أ) $f = \frac{1}{4}n^2 - 2$ ج (ب) $f = \frac{1}{4}n^2 - 2$ ج (ج) $f = \frac{1}{4}n^2 - 2$ ج (د) $f = \frac{1}{4}n^2 - 2$ ج

(ب) $f = 2 - n^2$ ج (د) $f = \frac{2}{n}$ ج

(٢٤) إذا حصل إبراهيم على الدرجة ٥٠ في اختبار درجته العظمى ٨٠. فما النسبة المئوية لدرجته في الاختبار؟

(أ) ٦٢,٥٪ (ب) ٦٢,٥٪ (ج) ١,٦٪ (د) ١٦,٠٪

(ب) ٦٢,٥٪ (د) ١٦,٠٪

مراجعة تراكمية

أوجد إحداثيات الرأس، ومعادلة محور التماثل، وبيّن إذا كان الرأس يمثل قيمة عظمى أم قيمة صغرى، ثم مثل الدالة بيانياً: (الدرس ٨-١)

(٢٦) $3x^2 = 1$ ص (٢٧) $3x^2 - 6x - 8 = 0$ ص (٢٨) $4x^2 - 8x + 5 = 0$ ص (٢٩) $3x^2 + 2x + 1 = 0$ ص

حلّ كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل: (مهارة سابقة)

(٣٠) $2x^2 = 32$ (٣١) $(x - 4)^2 = 25$ (٣٢) $4x^2 - 2x + 1 = 16$ (٣٣) $2x^2 + 16x - 32 = 0$

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة: حدّد ما إذا كانت كل ثلاثية حدود فيما يأتي تشكل مربعاً كاملاً، اكتب "نعم" أو "لا"، وإذا كانت كذلك فحلّها:

(٣٦) $25x^2 - 60x + 36 = 0$

(٣٥) $9x^2 + 6x + 1 = 0$

(٣٤) $16x^2 - 24x + 9 = 0$

(٣٩) $4x^2 - 3x + 9 = 0$

(٣٨) $36x^2 - 84x + 49 = 0$

(٣٧) $8x^2 - 8x + 1 = 0$



استعمل جدول القيم لتمثيل كل دالة فيما يأتي بيانيًا، وحدّد مجالها ومداها: (الدرس ٨ - ١)

(١) $ص = س^٢ + ٣س + ١$

(٢) $ص = س^٢ - ٤س + ٣$

(٣) $ص = -س^٢ - ٣س - ٣$

(٤) $ص = -س^٣ - ٢س - ١$

إذا كانت: $ص = س^٢ - ٥س + ٤$ (الدرس ٨ - ١)

(٥) اكتب معادلة محور التماثل.

(٦) أوجد الرأس، وحدّد ما إذا كان يمثل نقطة صغرى أو عظمى.

(٧) مثل الدالة بيانيًا.

(٨) **كرة:** تم ركل كرة من على سطح الأرض بسرعة ٩٠ قدمًا/ثانية، إذا كانت المعادلة: $ع = -١٦س^٢ + ٩٠س$ ، تعبّر عن ارتفاع الكرة بعد ن ثانية من إطلاقها. (الدرس ٨ - ١)

(أ) أوجد ارتفاع الكرة بعد ثانية من إطلاقها.

(ب) متى تصل الكرة إلى أقصى ارتفاع؟

(ج) متى يكون ارتفاع الكرة عن سطح الأرض مساويًا للصفر؟ وضح معنى ذلك.

(٩) **اختيار من متعدد:** التمثيل البياني للدالة:

ص = $س^٢ - ٣س + ١$ (الدرس ٨ - ١)

(أ) مفتوح إلى أعلى وله قيمة عظمى.

(ب) مفتوح إلى أعلى وله قيمة صغرى.

(ج) مفتوح إلى أسفل وله قيمة عظمى.

(د) مفتوح إلى أسفل وله قيمة صغرى.

حلّ كل معادلة فيما يأتي بيانيًا، وإذا لم تكن الجذور أعدادًا صحيحة فقدّرهما إلى أقرب جزء من عشرة: (الدرس ٨ - ٢)

(١٠) $س^٢ + ٥س + ٦ = ٠$

(١١) $س^٢ + ٨ = -٦س$

(١٢) $-س^٢ + ٣س - ١ = ٠$

(١٣) $س^٢ = ١٢$

(١٤) **كرة البيسبول:** المعادلة: $ع = -١٦س^٢ + ١٢٠س$ ، تمثل ارتفاع كرة البيسبول بعد ن ثانية من ضربها، أوجد الوقت الذي تبقى فيه الكرة في الهواء. (الدرس ٨ - ٢)

استعمل التحليل إلى عوامل؛ لتحديد عدد المرات التي يقطع فيها التمثيل البياني محور السينات في كل دالة ممّا يأتي، ثم حدّد أصفار كل منها: (الدرس ٨ - ٢)

(١٥) $ص = س^٢ - ٣س + ٢$

(١٦) $ص = س^٢$

(١٧) $ص = س^٢ + ٤س + ٤$

(١٨) $ص = س^٢ + ٣س + ٣$





حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع

لماذا؟



يسدّد لاعبو كرة السلة بعض كراتهم نحو المرمى بمسار يمكن تمثيله بالمعادلة: $x^2 - 9x + 18 = 0$ ، حيث تمثل (ع) ارتفاع الكرة بعد (س) ثانية. ويمكن إيجاد الزمن عند أي ارتفاع معطى للكرة؛ فمثلاً لإيجاد الزمن عندما تكون الكرة على ارتفاع ٤ أمتار، نحتاج إلى حل المعادلة: $x^2 - 9x + 18 = 4$ باستعمال طرق مختلفة منها طريقة إكمال المربع.

إكمال المربع: درست في الدرس ٧-٦ حل معادلات تربيعية بإيجاد الجذر التربيعي لكل طرف منها، والتي تستعمل فقط إذا كان المقدار الواقع على الطرف الأيمن مربعاً كاملاً، أما في العبارات ثلاثية الحدود التربيعية التي تمثل مربعات كاملة والتي يكون معاملها الرئيس ١، فهناك علاقة بين معامل الحد الذي يحتوي س والحد الثابت.

$$(x+5)^2 = x^2 + 2(5)x + 5^2$$

$$x^2 + 10x + 25 =$$

لاحظ أن $\left(\frac{10}{2}\right)^2 = 25$ ، ويمكن الحصول على الحد الثابت، بقسمة معامل الحد الذي يحتوي س على ٢، وتربيع الناتج، يمكن استعمال هذه الفكرة في تحويل أي عبارة تربيعية على الصورة $x^2 + bx + c$ إلى مربع كامل باستعمال طريقة تُسمى **إكمال المربع**.

فيما سبق

درست حل معادلات تربيعية باستعمال خاصية الجذر التربيعي.

والآن

- أكتب العبارة التربيعية على صورة مربع كامل.
- أحل معادلات تربيعية بإكمال المربع.

المفردات

إكمال المربع

أضف إلى

مطويتك

مفهوم أساسي

إكمال المربع

التعبير اللفظي: لإكمال المربع في أي عبارة تربيعية على الصورة $x^2 + bx + c$ ب س، اتبع الخطوات الآتية:

الخطوة ١: أوجد نصف ب (معامل س)

الخطوة ٢: رّبّع الناتج في الخطوة ١.

الخطوة ٣: أضف الناتج من الخطوة ٢ إلى $x^2 + bx + c$ ب س، ثم اكتب العبارة على صورة مربع كامل.

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4}\right)$$

الرموز:

مثال ١ إكمال المربع

أوجد قيمة ج التي تجعل ثلاثية الحدود: $x^2 + 4x + c$ ج مربعاً كاملاً.

الطريقة ١: استعمال بطاقات الجبر.



إرشادات للدراسة

الخوارزمية

الخوارزمية هي سلسلة خطوات لإجراء عملية أو لحل مسألة.

الطريقة ٢ :

الخطوة ١ :

الخطوة ٢ :

الخطوة ٣ :

تحقق من فهمك

(١) أوجد قيمة جـ التي تجعل ثلاثية الحدود $٨ - ٢ر + جـ$ مربعًا كاملاً.

حل المعادلات بإكمال المربع: يمكن استعمال طريقة إكمال المربع لحل المعادلات التربيعية، والتي تتطلب فصل الحدين $٢س$ ، بـ $س$ أولاً.

مثال ٢

حل معادلة بإكمال المربع

حُلِّ المعادلة: $١٩ = ١٢ + ٢س$ بإكمال المربع.

تحقق من فهمك

(٢) حل المعادلة: $١٢ - ٢س + ٣ = ٨$ بإكمال المربع.

لحل معادلة تربيعية معاملها الرئيس لا يساوي ١، اقسم كل حد على هذا المعامل، ثم افصل الحدين اللذين يحتويان $٢س$ ، س ثم أكمل المربع.

مثال ٣

معادلة فيها $١ \neq$

حل المعادلة: $١٨ - ٨س + ٢س = ٠$ بإكمال المربع.

تنبيه

المعامل الرئيس

تذكر أن المعامل الرئيس يجب أن يساوي ١ قبل إجراء عملية إكمال المربع.

تحقق من فهمك

(٣) حُلِّ المعادلة: $٢١ = ٣ - ٩س + ٣س$ بإكمال المربع.



مثال ٤ من واقع الحياة حل مسألة بإكمال المربع

زي رياضي: أراد أحد الفرق الرياضية شراء زي خاص بلاعبي كرة القدم، إذا أمكن تمثيل تكلفة الزي الرياضي بالمعادلة: $ك = ٢, ٠س + ٨, ٤س + ٣٥٠$ ، حيث (ك) ثمن (س) قطعة من هذا الزي، فما عدد القطع التي يمكن شراؤها بمبلغ ٨٦٠ ريالاً؟



الربط مع الحياة

يرتدي لاعبو فريق كرة القدم زيًا موحدًا يشمل: القميص والبنطال والحذاء والجوارب ويزيد حارس المرمى بالقفازات. ويختلف لون الزي والشعار تبعًا لكل فريق؛ للتمييز بينهم.

تحقق من فهمك

(٤) إذا أمكن زيادة المبلغ إلى ٩٨٠ ريالاً، فما عدد قطع الزي التي يمكن شراؤها؟

تأكد

مثال ١

أوجد قيمة ج التي تجعل كل ثلاثية حدود فيما يأتي مربعًا كاملاً:

(١) $س^٢ - ١٨س + ج$

(٢) $س^٢ + ٢٢س + ج$

(٣) $س^٢ + ٩س + ج$

(٤) $س^٢ - ٧س + ج$

المثالان ٢، ٣

حل كل معادلة فيما يأتي بإكمال المربع، مقرباً الحل إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضرورياً:

(٥) $س^٢ + ٤س = ٦$

(٦) $س^٢ - ٨س = ٩$

(٧) $س^٢ + ٩س - ١ = ٠$

(٨) $س^٢ + ١٠س + ٢٢ = ٤$

مثال ٤

(٩) **إنشاءات:** يبني إسماعيل صالة مستطيلة الشكل خلف منزل عائلته، مساحتها ١٤٤ مترًا مربعًا، وطولها يزيد على عرضها بمقدار ١٠ أمتار، فما بُعد الصالة؟

تدرب وحل المسائل

مثال ١

أوجد قيمة جـ التي تجعل كل ثلاثية حدود فيما يأتي مربعًا كاملاً:

- (١٠) $س^٢ + ٢٦س + جـ$ (١١) $س^٢ - ٢٤س + جـ$ (١٢) $س^٢ - ١٩س + جـ$
 (١٣) $س^٢ - ٢٢س + جـ$ (١٤) $س^٢ - ١٥س + جـ$ (١٥) $س^٢ - ١٣س + جـ$

المثالان ٢، ٣

حلّ كل معادلة فيما يأتي بإكمال المربع، مقررًا الحل إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضروريًا:

- (١٦) $س^٢ + ٦س - ١٦ = ٠$ (١٧) $س^٢ - ٢س - ١٤ = ٠$
 (١٨) $س^٢ - ٨س - ١ = ٨$ (١٩) $س^٢ + ٣س + ٢١ = ٢٢$
 (٢٠) $س^٢ - ٢س + ٧ = ٥$ (٢١) $س^٢ + ١٢س + ٨١ = ١٥$

مثال ٤

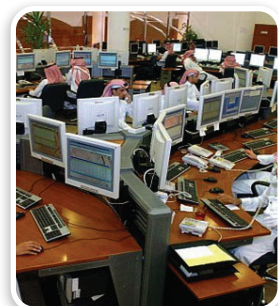
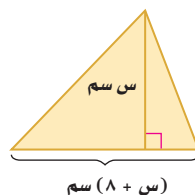
(٢٢) **ثقافة مالية:** يمكن تمثيل سعر سهم معين (س) بالمعادلة التربيعية $س = ٥ - ٣س - ٠,٥س^٢$ ، حيث (ن) عدد الأيام بعد شراء الأسهم، فمتى يصبح سعر السهم ٦٠ ريالاً؟

هندسة: أوجد قيمة س في كل شكل مما يأتي، وقرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضروريًا: (م: المساحة)

(٢٤) $م = ١١٠سم^٢$



(٢٣) $م = ٤٥سم^٢$

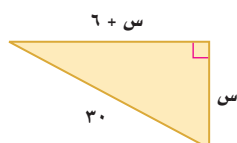


الربط مع الحياة

البضاعة التي ليس لها أصول حقيقية، بل أوراق أو أصول مالية تكون غالبًا أسهمًا وسندات، ويتم تداولها في سوق يُسمى سوق الأسهم، ولهذا السوق قواعد قانونية وفنية تحكم أدائه.

(٢٥) **نظرية الأعداد:** عددان صحيحان زوجيان متتاليان ناتج ضربهما ٢٢٤، فما هما؟

(٢٦) **هندسة:** أوجد مساحة المثلث المجاور.



(٢٧) **علم الفلك:** يُعبّر عن ارتفاع جسم بعد ثانية من سقوطه بالمعادلة $ل = \frac{١}{٣}ج - ٢ل$ ، حيث (ل) الارتفاع الابتدائي، (ج) التسارع الناتج عن الجاذبية، فإذا كان تسارع الجاذبية على سطح كوكب المريخ $٣,٣٧م/ث^٢$ ، وعلى سطح الأرض $٩,٨م/ث^٢$ ، وسقط الجسم من ارتفاع ابتدائي مقداره ١٢٠ مترًا فوق سطح كل من الكوكبين، فأجب عن السؤالين الآتيين:

(أ) أي الكوكبين يصل الجسم إلى سطحه أولاً؟

(ب) كم يستغرق الجسم للوصول إلى سطح كل من الكوكبين مقربًا الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة؟



(٢٨) أوجد قيمة جـ التي تجعل ثلاثية الحدود: $س^٢ + جـس + ٢٢٥$ مربعًا كاملاً

(٢٩) **رسم:** إذا كان لدى أحمد إطار طوله ٦٠ بوصة، وعرضه ٤ بوصات، ويرغب في زيادة بُعدي الإطار على أن تكون الزيادة في الطول تعادل ١٠ أمثال الزيادة في العرض؛ لتناسب قطعة قماش مساحتها ٤٨٠ بوصة مربعة. فما بُعد الإطار الجديد؟

(٣٠) **تمثيلات متعددة:** سوف تستكشف في هذه المسألة خاصية للمعادلات التربيعية.

(أ) **جدولياً:** انسخ الجدول المجاور وأكمل العمود الثاني.

عدد الجذور	ب ^٢ - ٤أ	ثلاثية الحدود
١	٠	س ^٢ - ٨س + ١٦
		س ^٢ - ١١س + ٣
		س ^٢ - ٦س + ٩
		س ^٢ - ٢س + ٧
		س ^٢ - ١٠س + ٢٥
		س ^٢ - ٣س + ١٢

(ب) **جبرياً:** اكتب كل ثلاثية حدود على صورة معادلة طرفها الأيمن يساوي صفراً، وحلّها بإكمال المربع، وأكمل العمود الثالث في الجدول بكتابة عدد جذور كل معادلة.

(ج) **لفظياً:** قارن عدد الجذور لكل معادلة بالنتيجة في العمود ب^٢ - ٤أ، وهل هناك علاقة بينهما؟ وإن كانت هناك علاقة فصفها.

(د) **تحليلياً:** تنبأ بعدد حلول س^٢ - ٩س - ١٥ = ٠، وتحقق من صحة تنبؤك بحل المعادلة.

مسائل مهارات التفكير العليا

(٣١) **تحذّر:** اشتق معادلة محور التماثل بإكمال المربع للمعادلة ص = أس^٢ + ب س + ج، أ ≠ ٠، وأعد كتابة المعادلة على الصورة ص = أ(س - هـ) + ك.

(٣٢) **تبرير:** حدّد عدد حلول المعادلة س^٢ + ب س = ج إذا كانت ج > - (ب/٤). فسر إجابتك.

(٣٣) حدّد العبارة التي تختلف عن العبارات الثلاث الأخرى. وفسر إجابتك.

$$ن^٢ + ن + \frac{1}{9}$$

$$ن^٢ - \frac{2}{3}ن + \frac{1}{9}$$

$$ن^٢ + ن + \frac{1}{4}$$

$$ن^٢ - ن + \frac{1}{4}$$

(٣٤) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلة تربيعية حلها الوحيد هو ٤.

(٣٥) **اكتب:** قارن بين الطرق الآتية: إكمال المربع، التمثيل البياني، التحليل للعوامل التي تُستعمل لحل المعادلة: س^٢ - ٥س - ٧ = ٠

تدريب على اختبار

(٣٧) **إجابة قصيرة:** يمكن تمثيل عدد سكان إحدى المدن بالمعادلة ص = ٢٢٠٠٠ + ١٢٠٠ن، حيث (ص) عدد السكان، (ن) عدد السنوات بعد عام ١٤٣٨ هـ، ما عدد السنوات اللازمة بعد عام ١٤٣٨ هـ ليصبح عدد سكانها ٢٨٠٠٠ نسمة؟

(٣٦) إذا كان طول مستطيل يساوي ثلاثة أمثاله عرضه ومساحته ٧٥ سنتيمتراً مربعاً، فما طوله؟

(ج) ١٠ سم

(أ) ٢٥ سم

(د) ٥ سم

(ب) ١٥ سم

مراجعة تراكمية

اكتب كلاً مما يأتي في أبسط صورة، مفترضاً أن المقام لا يساوي صفراً: (مهارة سابقة)

$$\frac{ج^3}{ج^2} \quad (٤٠)$$

$$\frac{٧}{٥} \quad (٣٩)$$

$$\frac{٦}{٣} \quad (٣٨)$$

حل كلاً من المتباينات الآتية: (مهارة سابقة)

$$١٣ \geq |٢ - ب| \quad (٤٢)$$

$$٨ \leq |٢ - ص| \quad (٤١)$$

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

احسب قيمة $\sqrt{ب^2 - ٤}$ أ ج في كلٍّ من الحالات الآتية:

$$١١ = ج، ١٢ = ب، ١ = أ \quad (٤٤)$$

$$٢ = ج، ٥ = ب، ٢ = أ \quad (٤٣)$$

$$٢ = ج، ١ = ب، ٣ = أ \quad (٤٦)$$

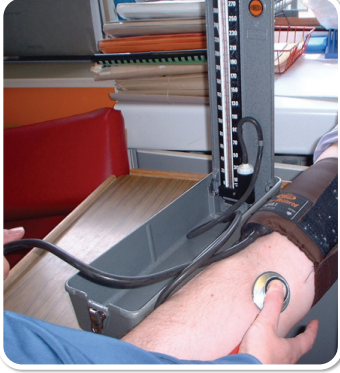
$$٦ = ج، ٤ = ب، ٢ = أ \quad (٤٥)$$





حل المعادلات التربيعية باستعمال القانون العام

لماذا؟



يمكن تمثيل ضغط الدم الانقباضي الطبيعي (ص) بالملتر زئبق للأنتى البالغة بالدالة: $ص = ٠,١س + ٠,٥س^٢$ ، حيث (س) العمر بالسنوات، وتستعمل هذه الدالة لتقدير عمر الأنتى إذا عُلم ضغط الدم الانقباضي لها، إلا أنه من الصعب حل المعادلة المرافقة لها بالتحليل إلى العوامل أو التمثيل البياني، أو إكمال المربع.

القانون العام: ينتج عن إكمال المربع للمعادلة التربيعية $أس^٢ + ب س + ج = ٠$ ، صيغة نستعملها لحل أية معادلة تربيعية مكتوبة بالصيغة القياسية، وتسمى هذه الصيغة **القانون العام**.

فيما سبق

درست حل معادلات تربيعية بإكمال المربع.

والآن

- أحل معادلات تربيعية باستعمال القانون العام.
- أستعمل المميز لتحديد عدد حلول معادلة تربيعية.

المفردات

القانون العام
المميز

أضف إلى

مطويتك

القانون العام

مفهوم أساسي

حل المعادلة التربيعية: $أس^٢ + ب س + ج = ٠$ ، حيث $أ \neq ٠$ يُعبر عنه بالقانون العام:

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أج}}{٢أ}$$

سيطلب إليك اشتقاق هذا القانون لاحقاً (في الدرس ٩ - ١)

مثال ١

استعمال القانون العام

حل المعادلة: $٣س^٢ + ٥س = ١٢$ باستعمال القانون العام.

الخطوة ١:

الخطوة ٢:



تحقق من فهمك

(أ) $٢س^٢ + ٩س = ١٨$.
 (ب) $٤س^٢ - ٢٤س + ٣٥ = ٠$

عند تطبيقك القانون العام لحل المعادلات التربيعية قد تحتاج إلى تقريب بعض حلولها.

استعمال القانون العام

مثال ٢

حلّ المعادلة $١٠س - ٥س^٢ = ٢٥$ باستعمال القانون العام، مقرباً الحل إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضرورياً:

الخطوة ١ :

الخطوة ٢ :

إرشادات للاختبار

الإجابات الدقيقة

العدد ١٠٢٥٧ في
 المثال ٢ غير نسبي؛ لذا
 فالآلة الحاسبة تعطي فقط
 قيمة تقريبية له، أما الإجابة
 الدقيقة في المثال ٢ فهي:
 $\frac{١٠٢٥٧ \pm ٥}{٢٠}$ أما العددين
 $-٤, ١, ٩, ١$ فقيمتان
 تقريبيتان.

تحقق من فهمك

(٢) $٣س - ٢س^٢ - ٩ = ٠$

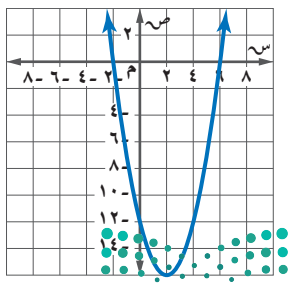
يمكنك استعمال طرق مختلفة لحل المعادلات التربيعية. ولا توجد طريقة هي الأفضل دائماً لحل أي مسألة.

حلّ المعادلات التربيعية باستعمال طرق مختلفة

مثال ٣

حلّ المعادلة: $٤س - ٢س^٢ = ١٢$.

الطريقة ١: التمثيل البياني



وزارة التعليم

Ministry of Education

الدرس ٨-٤: حلّ المعادلات التربيعية باستعمال القانون العام ٢٥٢٢

الطريقة ٢ : التحليل إلى عوامل

الطريقة ٣ : إكمال المربع

تنبيه !

الحلول

لا يُعدّ نوع الطريقة المستعملة لحل المعادلة التربيعية مهمّاً، إذ إن جميع الطرق تُعطي الحل نفسه أو الحلول نفسها.

الطريقة ٤ : القانون العام

تحقق من فهمك



$$(أ٣) ٢س - ١٧س + ٨ = ٠$$

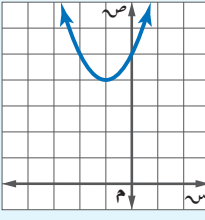
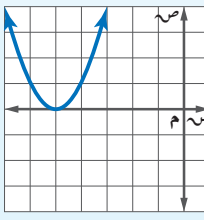
$$(ب٣) ٤س - ٤س - ١١ = ٠$$



ويمكنك تلخيص طرق حل المعادلات التربيعية في ملخص المفهوم الآتي :

ملخص المفهوم	حل المعادلات التربيعية	أضف إلى مطوبتك
الطريقة	متى يُفضل استعمالها؟	
التحليل إلى عوامل	تستعمل إذا كان الحد الثابت صفرًا، أو إذا كان من السهل تحديد العوامل فليست جميع المعادلات قابلة للتحليل.	
التمثيل البياني	تستعمل عندما يكون الحل التقريبي مقبولًا.	
استعمال خاصية الجذر التربيعي	تستعمل إذا كانت المعادلة مكتوبة على الصورة $س^2 = ن$ أو $س^2 = (س-هـ)$	
إكمال المربع	يمكن استعمالها لأية معادلة على الصورة: $أس^2 + ب س + ج = ٠$ ، إلا أنه من الأسهل استعمالها إذا كان $ب$ عددًا زوجيًا و $أ = ١$.	
القانون العام	يمكن استعمالها لأية معادلة على الصورة: $أس^2 + ب س + ج = ٠$.	

المميز: في القانون العام، تُسمى العبارة التي تحت الجذر $(ب^2 - ٤ أ ج)$ **المميز**، ويمكنك استعماله لتحديد عدد الحلول الحقيقية للمعادلة التربيعية.

مفهوم أساسي	استعمال المميز	أضف إلى مطوبتك
المعادلة	$س^2 + ٢س + ٥ = ٠$	$س^2 - ٢س - ٧ = ٠$
المميز	$ب^2 - ٤ أ ج = ١٦ - ٤ = ١٢$ سالب	$ب^2 - ٤ أ ج = ٤ - ٤ = ٠$ صفر
تمثيل الدالة المرتبطة		
عدد المقاطع السينية	٠	١
عدد الحلول الحقيقية	٠	١

استعمال المميز

مثال ٤

أوجد قيمة المميز للمعادلة: $س^2 - ٤س + ٥ = ٠$ ، ثم حدّد عدد حلولها الحقيقية.

الخطوة ١:

الخطوة ٢:

إرشادات للدراسة

المميز:

تذكر أنه إذا كان الطرف الأيمن في الصورة القياسية لثلاثي حدود من الدرجة الثانية مربعًا كاملاً فهناك حل واحد، ويكون المميز صفرًا.

تحقق من فهمك



وزارة التعليم

Ministry of Education

الدرس ٨-٤: حل المعادلات التربيعية باستعمال القانون العام ٢٠٢٢

$س^2 + ١١س + ١٥ = ٠$ (أ) $س^2 - ٩س + ٣٠ = ٠$ (ب)

المثالان ٢، ١

حلّ كل معادلة فيما يأتي باستعمال القانون العام مقرباً الحل إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضرورياً:

$$(١) \text{ س } ٢ - \text{ س } ٢ - ١٥ = ٠ \quad (٢) \text{ س } ٢ - ٨ = ١٠ \quad (٣) \text{ س } ٥ + ٥ = ١٣$$

مثال ٣

حلّ كل معادلة فيما يأتي، واذكر الطريقة التي استعملتها:

$$(٤) \text{ س } ٢ + ١١ = ٦ \quad (٥) \text{ س } ٢ - ٣ = ٦ \quad (٦) \text{ س } ٩ = ٢٥$$

مثال ٤

أوجد قيمة المميز لكل معادلة فيما يأتي، ثم حدّد عدد حلولها الحقيقية:

$$(٧) \text{ س } ٢ - ٩ = ٢١ \quad (٨) \text{ س } ٩ + ٢ = ٢٤ \quad (٩) \text{ س } ٣ - ٢ = ٨$$

(١٠) **منصة القفز:** يقفز خالد من فوق منصة القفز، حيث تمثل المعادلة $١٦ - ٤ + ٢ = ٦$ ارتفاع خالد (ل) بعد (ن) من الثواني، استعمل المميز لتحديد ما إذا كان خالد سيصل إلى ارتفاع ٢٠ قدمًا. فسّر إجابتك.

تدرب وحل المسائل

المثالان ٢، ١

حلّ كل معادلة فيما يأتي باستعمال القانون العام مقرباً الحل إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضرورياً:

$$(١١) \text{ س } ٤ + ٥ = ٦ \quad (١٢) \text{ س } ٢ + ١٦ = ٠ \quad (١٣) \text{ س } ٦ - ١٢ = ١$$

$$(١٤) \text{ س } ٥ - ٨ = ٦ \quad (١٥) \text{ س } ٥ + ٢١ = ١٨ \quad (١٦) \text{ س } ٢ = ١٢ - ١٨$$

مثال ٣

حلّ كل معادلة فيما يأتي، واذكر الطريقة التي استعملتها:

$$(١٧) \text{ س } ٢ - ٨ = ١٢ \quad (١٨) \text{ س } ٣ - ٢ = ٣٦ \quad (١٩) \text{ س } ٣ - ٢ = ١٠$$

مثال ٤

أوجد قيمة المميز لكل معادلة فيما يأتي، ثم حدّد عدد حلولها الحقيقية:

$$(٢٠) \text{ س } ٢ - \frac{٤}{٥} = ٣ \quad (٢١) \text{ س } ٥ - ٢ = ٢ \quad (٢٢) \text{ س } ٥ - ٢ = ١٠$$

(٢٣) **مرور:** تمثّل المعادلة $٠٠٧ + ٢٠٠٩$ ع المسافة (ف) بالأمطار التي تقطعها سيارة تسير بسرعة (ع) كلم/ساعة للتوقف تماماً بعد استعمال المكابح، فإذا كانت حدود السرعة القصوى في أحد الشوارع ٨٠ كلم/ساعة، وتوقفت سيارة منذر بعد ٥٥ متراً من استعماله المكابح، فهل كانت سرعته تزيد على السرعة القصوى؟ فسّر تبريرك.



الربط بالحياة

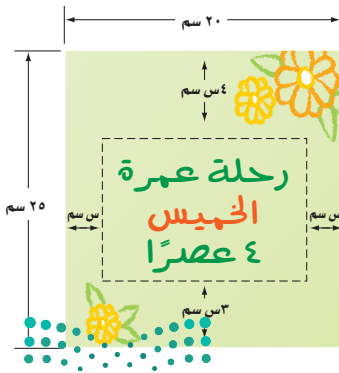
من أسباب الحوادث المرورية: القيادة في أثناء التعب والإرهاق، الانشغال عن القيادة، عدم التقيد بأنظمة المرور، التهور في القيادة، وعدم ربط حزام الأمان وغيرها؛ حيث بلغ عدد ضحايا الحوادث المرورية في عام ٢٠٢٠ م ٤٦١٨ شخصاً.

(٢٤) **إعلان:** يعدّ راشد ملصقاً للإعلان عن رحلة عمرة، ويريد أن يغطي جزءاً من المساحة بنصوص كتابية.

(أ) اكتب معادلة لمساحة القسم النصّي.

(ب) حلّ المعادلة باستعمال القانون العام.

(ج) كم يجب أن تكون هوامش الملصق؟



حدّد دون استعمال التمثيل البياني عدد المقاطع السينية لكل دالة فيما يأتي:

(٢٥) $٤, ٢٥$ س $+ ٣ = ٣ - ٢$ س (٢٦) ٢ س $+ \frac{٣}{٥} = \frac{٢}{٥}$ س (٢٧) $٠, ٢٥$ س $+ ٢ = ١ -$ س

حلّ كل معادلة فيما يأتي باستعمال القانون العام مقرباً الناتج إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضرورياً:

(٢٨) $٢ - ٢$ س $٧ = ١, ٥ -$ س (٢٩) $٢, ٣$ س $٢ - ٤ = ١$ س $٦, ٨ = ٣٠$ س $٢ - ٥ =$

(٣١) **تمثيلات متعددة:** سوف تكتشف الدوال الأسية في هذه المسألة:

(أ) جدولياً: انسخ الجدول الآتي وأكمله:

الزمن (ساعة)	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦
عدد البكتيريا	$١ = ٢$	$٢ = ١$	$٢ = ٢$				

(ب) بيانياً: مثل المعلومات المعطاة في الجدول بيانياً باستعمال النقاط (الزمن، عدد البكتيريا)، وهل التمثيل خطي أم تربيعي أم غير ذلك؟

(ج) تحليلياً: ماذا يحدث لعدد البكتيريا كل ساعة؟ اكتب دالة تمثل هذا النمط.

مسائل مهارات التفكير العليا

(٣٢) **تحّد:** أوجد جميع قيم $ك$ التي تجعل للمعادلة: ٢ س $- ٣ = ٥ + ك = ٠$ حلين حقيقيين.

تبرير: بين فيما إذا كان عدد الحلول الحقيقية لكل مما يأتي حلان، أو حل واحد، أو لا يوجد حل:

(٣٣) التمثيل البياني لدالة تربيعية لا تحتوي على مقطع سيني.

(٣٤) التمثيل البياني لدالة تربيعية تمس محور السينات.

(٣٥) التمثيل البياني لدالة تربيعية تقطع محور السينات مرتين.

(٣٦) قيمتا كل من أ، ب أكبر من صفر، وقيمة جـ أصغر من صفر في الصيغة القياسية للدالة التربيعية.

(٣٧) **مسألة مفتوحة:** اكتب ٣ دوال تربيعية على أن يكون مميز الأولى موجب، ومميز الثانية سالباً، ومميز الثالثة صفراً.

(٣٨) **اكتب:** وضح طرق حل المعادلات التربيعية، وأعط مثلاً مختلفاً لكل طريقة. فسّر إجابتك.

تدريب على اختبار

(٤٠) ما حلول المعادلة التربيعية $٦ - ٢ = ٧٢$ ؟

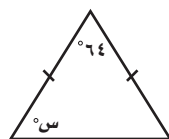
(ج) لا يوجد حلول حقيقية



(أ) ٣ أو -٤

(ب) ٣- أو ٤

(٣٩) **إجابة قصيرة:** إذا علمت أن المثلث المجاور متطابق الضلعين، فما قيمة س؟



مراجعة تراكمية

حلّ كل معادلة فيما يأتي بإكمال المربع مقرباً الحل إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضرورياً: (الدرس ٨-٣)

$$(٤١) \quad ٦س^٢ - ١٧س + ١٢ = ٠ \quad (٤٢) \quad ٩س^٢ - ١٢س = ٠ \quad (٤٣) \quad ٤س^٢ = ٢٠س - ٢٥$$

لتكن $ص = ٢س - ٥س + ٤$. (الدرس ٨-١)

(٤٤) اكتب معادلة محور التماثل.

(٤٥) أوجد إحداثيات نقطة الرأس، وهل هي نقطة عظمى أم صغرى؟

(٤٦) مثل الدالة بيانياً.

(٤٧) حدّد مجال الدالة ومداهما.

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

أوجد ناتج كل ممّا يأتي:

$$\begin{array}{lll} (٤٨) \quad \sqrt{١٠٠} & (٤٩) \quad \sqrt{\frac{٩}{١٦}} & (٥٠) \quad \sqrt{٠,٠١} \\ (٥١) \quad \sqrt{\frac{٤}{٣}} & (٥٢) \quad \sqrt{\frac{٢}{١٦}} & (٥٣) \quad \sqrt{٨١} \end{array}$$



(١٣) **كرة سلة:** سدّد نواف كرة السلة نحو المرمى، وفق المعادلة $ع = ١٦ن^٢ + ٦٠ن + ٣٠$ ، حيث تمثّل (ع) ارتفاع الكرة بعد (ن) ثانية، كم تبقى الكرة في الهواء؟

(١٤) مثّل الدالة: $ص = ٣س^٢$ بيانيًا، وأوجد المقطع الصادي، وحدد مجالها ومداها.

(١٥) **اختيار من متعدد:** أي مما يلي يُعدّ تحليلًا تامًّا للعبارة

٤ س $٨ - ١٢س - ١٢$ إلى عواملها؟

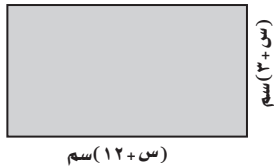
(أ) $٤ (٣ - س) (١ + س)$

(ب) $(١ - س) (٤س + ١٢)$

(ج) $٤ (٣ + س) (١ - س)$

(د) $(٣ - س) (٤س + ٤)$

(١٦) أوجد مساحة المستطيل أدناه.



(١٧) مثّل مجموعة الأزواج المرتبة الآتية بيانيًا:

$\{(٤, ٢), (١, ١), (٠, ٠), (١, -١), (٤, -٢)\}$ ، وحدّد فيما

إذا كانت تمثّل دالة خطية أم تربيعية.

(١٨) ابحث عن النمط في الجدول الآتي لتحديد أفضل نموذج دالة لوصف البيانات: خطية أم تربيعية. فسّر إجابتك.

س	٠	١	٢	٣	٤
ص	١	٣	٥	٧	٩

استعمل جدول القيم لتمثيل الدالتين الآتيتين بيانيًا، وحدّد مجالهما ومداهما:

(١) $ص = ٢س^٢ + ٢س + ٥$ (٢) $ص = ٢س^٢ - ٣س + ١$
لتكن الدالة $ص = ٢س^٢ - ٧س + ٦$.

(٣) حدّد إذا كان للدالة قيمة عظمى أم قيمة صغرى.

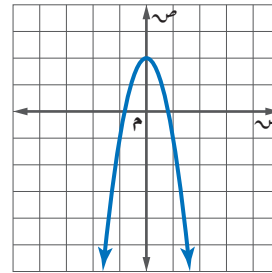
(٤) أوجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى للدالة.

(٥) حدد مجال الدالة ومداها.

حلّ كل من المعادلتين الآتيتين بيانيًا، وإذا لم تكن الجذور أعدادًا صحيحة فقدورها إلى أقرب جزء من عشرة:

(٦) $٢س^٢ + ٧س + ١٠ = ٠$ (٧) $٢س^٢ - ٥س - ٣ = ٠$

(٨) **اختيار من متعدد:** أيّ المعادلات الآتية تعبّر عن الدالة الممثلة بيانيًا أدناه؟



(أ) $ص = ٣س^٢ - ٢$ (ج) $ص = ٢س^٢ + ٢$

(ب) $ص = ٣س^٢ + ١$ (د) $ص = ٣س^٢ - ٢ + ٢$

حلّ كل من المعادلتين الآتيتين باستعمال إكمال المربع:

(٩) $٢س^٢ - ٦س - ١٠ = ٠$ (١٠) $٢س^٢ - ٣٦س - ٦ = ٠$

حلّ كل من المعادلتين الآتيتين باستعمال القانون العام، مقربًا الحل إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

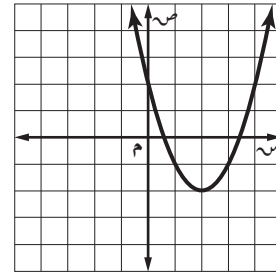
(١١) $٢س^٢ - ٣٠س - ١٥ = ٠$ (١٢) $٢س^٢ + ١٥س - ١٥ = ٠$



اختيار من متعدد

اقرأ كل سؤال مما يأتي، ثم اختر رمز الإجابة الصحيحة :

(١) ما إحداثيا رأس القطع المكافئ الممثل أدناه؟



(ج) $(2, -2)$

(أ) $(0, 2)$

(د) $(-2, 2)$

(ب) $(2, 0)$

(٢) اكتب معادلة المستقيم الذي ميله $\frac{9}{10}$ ومقطعه الصادي ٣ بصيغة الميل والمقطع.

(أ) $ص = 3س + \frac{9}{10}$

(ب) $ص = \frac{9}{10}س + 3$

(ج) $ص = \frac{9}{10}س - 3$

(د) $ص = 3س - \frac{9}{10}$

(٣) إذا كانت مساحة المستطيل أدناه هي $٣س^٢ + ١٩س - ١٤$ وحدة مربعة، فكم وحدة عرضه؟



$٣س - ٢$

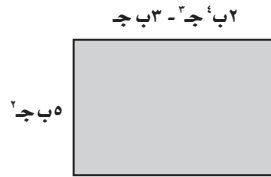
(ج) $٢س + ٣$

(أ) $٧س + ٢$

(د) $٢س - ٣$

(ب) $٧س - ٢$

(٤) اكتب عبارة تمثل مساحة المستطيل أدناه.



(أ) $١٠ب ج٥ - ٣ب ج٣$

(ب) $١٠ب ج٥ - ١٥ب ج٢$

(ج) $٢ب ج٥ - ٣ب ج٢$

(د) $١٠ب ج٤ - ١٥ب ج٢$

(٥) حل المعادلة التربيعية: $س^٢ - ٢س - ١٥ = ٠$

(أ) $١، -٤$

(ب) $٣، -٥$

(ج) $٣، -٥$

(د) $\emptyset$

(٦) ما قيمة ر التي تجعل ميل المستقيم المار بالنقطتين $(٨، -٤)$ ، $(١٢، ر)$ يساوي $\frac{٤}{٣}$ ؟

(أ) -٤

(ب) -١

(ج) ٢

(د) ٣



١٠) يبين الجدول الآتي الأجرة الكلية لقارب مدة (ن) ساعة.

عدد الساعات (ن)	الأجرة الكلية (ج)
١	٤٥ ريالاً
٢	٧٠ ريالاً
٣	٩٥ ريالاً
٤	١٢٠ ريالاً

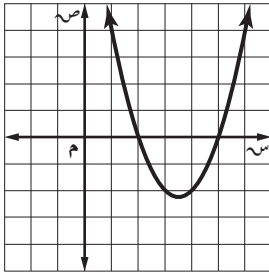
(أ) اكتب دالة تمثل هذا الموقف.

(ب) ما أجرة القارب مدة ٧ ساعات؟

إجابة مطولة

أجب عن السؤال الآتي موضعاً خطوات الحل:

١١) استعمل الدالة وتمثيلها البياني للإجابة عن الأسئلة الآتية:



(أ) حلّ العبارة $س^2 - ٧س + ١٠ = ٠$ إلى عواملها الأولية.

(ب) ما حلّ المعادلة: $س^2 - ٧س + ١٠ = ٠$ ؟

(ج) ماذا تلاحظ على التمثيل البياني للدالة التربيعية؟ وأين

يقطع تمثيلها محور السينات؟ وما العلاقة بين هذه القيم

وحلّ المعادلة $س^2 - ٧س + ١٠ = ٠$ ؟ فسّر إجابتك.

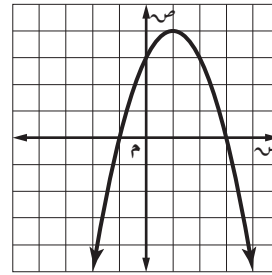
إجابة قصيرة

أجب عن الأسئلة الآتية:

(٧) استعمل القانون العام لحل المعادلة التربيعية:

$$س^2 - ٦س + ٣ = ٠$$

(٨) استعمل التمثيل البياني الآتي للمعادلة التربيعية للإجابة عن الأسئلة أدناه.



(أ) ما إحداثي الرأس؟

(ب) ما إحداثيا نقطة التقاطع مع المحور الصادي؟

(ج) ما معادلة محور التماثل؟

(٩) ثمن ٥ دفاتر و ٣ أقلام ٥، ١٩ ريالاً، وثمن ٤ دفاتر و ٦ أقلام

٢١ ريالاً، استعمل هذه المعطيات في الإجابة عما يأتي:

(أ) اكتب نظاماً من المعادلات يمثل هذا الموقف.

(ب) حل نظام المعادلات، ما ثمن كلّ من الدفتر والقلم؟

للمساعدة ..

١١	١٠	٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١	إذا لم تجب عن السؤال
مهارة سابقة	مهارة سابقة	مهارة سابقة	١-٨	٤-٨	مهارة سابقة	٤-٨	مهارة سابقة	مهارة سابقة	مهارة سابقة	١-٨	فراجع الدرس ..