نسخة الكترونية
مجانية للاتباع

تحصيلنا
رياضيات
٣ ـ ٢

إعداد : نورة الحربي ، روحية السلمي

بسم الله والحمدلله والصلاة

والسلام على رسول الله

اللهم علمنا ماينفعنا وانفعنا بما

علمتنا وزدنا علماً

يارب العالمين

السادة / نورة الحربي و روحية السلمي

نفيدكم علما بأنه قد تم تسجيل عملكم المرسوم بـ :

سلسلة عروض رفعة الرياضيات (تحصيلنا رياضيات ٣-٣)

تحت رقم إيداع | 1445

تاريخ/ /1445

رقم الردمك

شكر و عرفان

أتقدم بالشكر الجزيل لمجموعة رِفعة التي تضم نخبة من المعلمين والمعلمات المبدعين والمبدعات شكرًا لكم ، ولنا الفخر بأن نكون أحد أعضاء هذه المجموعة المبدعة .

جميع حسابات مجموعة رِفعة

مجموعة رِفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق

المقدمة

الحمد لله والصلاة والسلام على نبينا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين،

أما بعد:

نبذة تعريفية لمجموعة رِفعَة

هي مجموعة تُدار من قبل معلمي ومعلمات الرياضيات من جميع أنحاء المملكة، وهي قائمة على التطوير المهني لجميع المعلمين والمعلمات، وابتكار الافكار الإبداعية للتعليم العام، والإنتاج الموثق لكل ما يخص الرياضيات والتعليم العام.

وبهدف التسهيل والتيسير لمادة الرياضيات، نقدم لكم " سلسلة رِفعة الرياضيات - تميز معنا في رياضيات 3 - 2 "

وأرجو من الله أن تجدو فيها الفائدة .

تنبيه :

كل الحقوق محفوظة ، نسخة الكترونية مجانية لاتباع عند إزالة شعار المجموعة أو اسم المؤلف / ة سوف يعرضك للمسائلة القانونية.

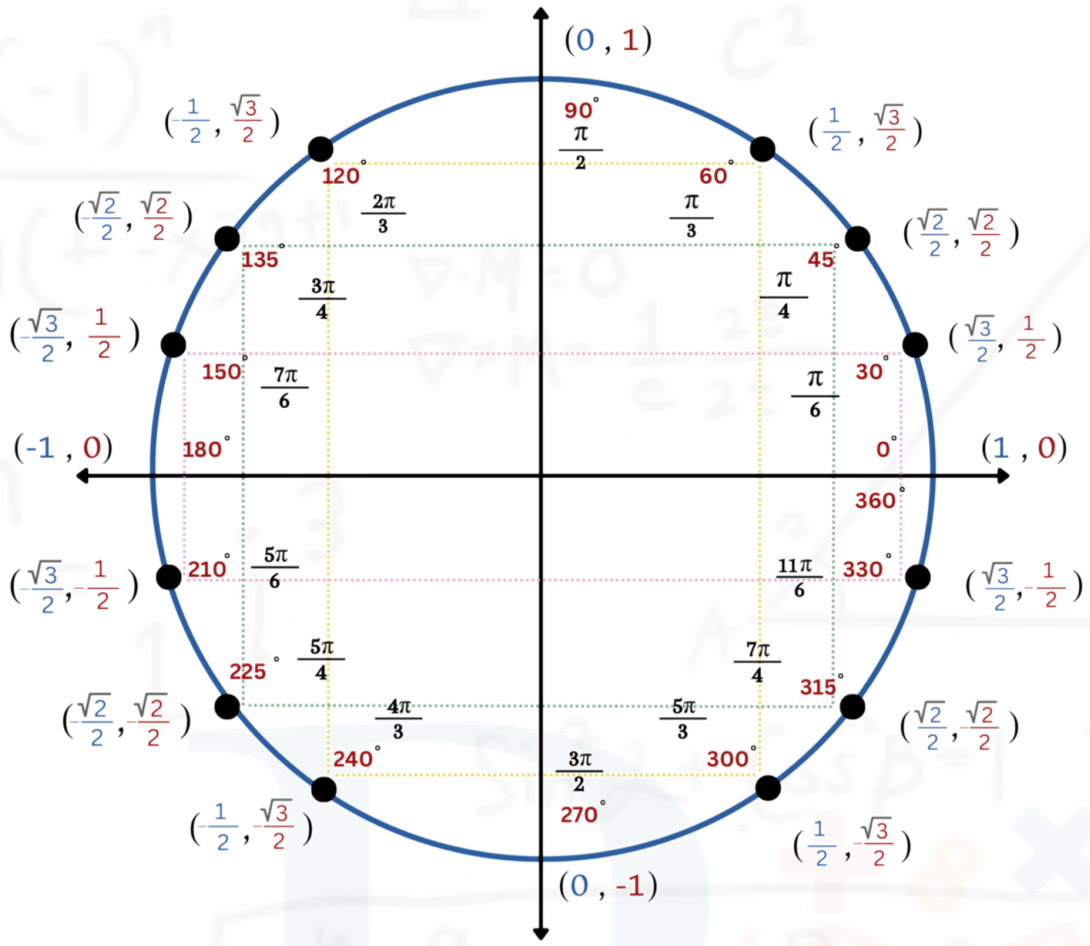
حساب
المثلثات

القطوع
المخروطية

المتجهات

المتطابقات والمعادلات المثلثية

المتطابقات المثلثية



	0°	30°	45°	60°	90°
Sin	0	1	2	3	4
Cos	4	3	2	1	0

$\frac{\sqrt{}}{2}$

المتطابقات النسبية

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \sin\theta \neq 0$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \cos\theta \neq 0$$

متطابقات المقلوب

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}, \sin\theta \neq 0$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \cos\theta \neq 0$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}, \tan\theta \neq 0$$

$$\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta}, \csc\theta \neq 0$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}, \sec\theta \neq 0$$

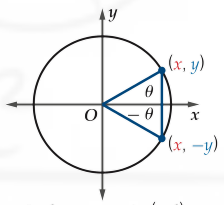
$$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}, \cot\theta \neq 0$$

متطابقات الدوال الزوجية والفردية

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta$$



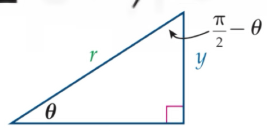
$\sin\theta = y$ $\sin(-\theta) = -y$
$\cos\theta = x$ $\cos(-\theta) = x$

متطابقات الزاويتين المتتامتين

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$$



$\sin\theta = \frac{y}{r} = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$

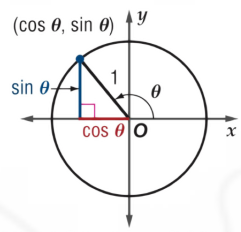
$\tan\theta = \frac{y}{x} = \cot(\frac{\pi}{2} - \theta)$

متطابقات فيثاغورس

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$



حسب نظرية فيثاغورس $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

متطابقات المجموع

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

متطابقات الفرق

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

المتطابقات الآتية صحيحة لقيم θ جميعها:

$$\sin 2\theta = 2 \sin\theta \cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$
$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$$

المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

المتطابقات الآتية صحيحة لقيم θ جميعها:

$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}, \cos\theta \neq -1$$

قيم نفسك

ما مقدار $cot^2\theta sin^2\theta$

$cos^2\theta$ | $sin^2\theta$ | $tan^2\theta$ | $\frac{sin^4\theta}{cos^2\theta}$

قيمة $sec^2\theta - tan^2\theta = \ldots\ldots\ldots\ldots$

0.5 | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 | 0

قيمة $(1 - cot\theta)sin\theta$

$sin\theta - cos\theta$ | $cos\theta sin\theta$ | $sec\theta$ | $cos^2\theta$

$cos120^o$ تساوي

$\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\sqrt{2}$

إذا كانت $sin\theta = 0.21$ فإن $sin(\pi - \theta)$ تساوي

-0.21 | 0 | 0.21 | 0.74

ما قيمة $sin^2\theta + cos^2\theta$

-1 | 1 | 0 | $csc2\theta$

قيم نفسك

إذا كانت $\sin\theta = -\frac{1}{2}$ $180^o \le \theta \le 270^o$ أوجد $\sec\theta$

$\frac{-2\sqrt{3}}{3}$ $\quad$ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ $\quad$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $\sqrt{3}$

إذا كانت $\tan\theta = \frac{1}{2}$ فكم قيمة $\tan 2\theta$

1 $\quad$ $\frac{3}{4}$ $\quad$ $\frac{4}{3}$ $\quad$ $\frac{1}{4}$

قيمة $\cos 105^o \cos 45^o + \sin 105^o \sin 45^o$

$\cos 30^o$ $\quad$ $\cos 60^o$ $\quad$ $\cos 150^o$ $\quad$ $\cos 12^o$

تبسيط العبارة $\sec^2\theta - \tan^2\theta$

$\frac{1}{2}$ $\quad$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ 1 $\quad$ 0

إذا كانت $\sec\theta + 2 = 0$ حيث $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ فإن θ تساوي

50^o $\quad$ 120^o $\quad$ 90^o $\quad$ 135^o

القطوع المخروطية

القطوع المخروطية

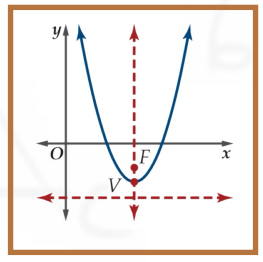
خصائص القطع المكافئة

الصورة القياسية :

$$(x-h)^2 = 4c(y-k)$$

الاتجاه : رأسي

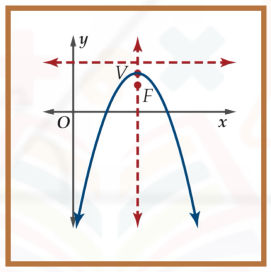
$c > 0$



الرأس : (h,k)

الدليل : $y = k - c$

$c < 0$



البؤرة : $(h,k+c)$

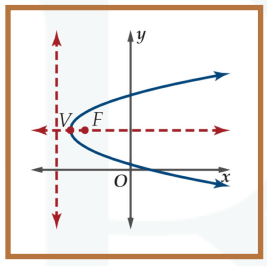
محور التماثل : $x = h$

الصورة القياسية :

$$(x-h)^2 = 4c(y-k)$$

الاتجاه : أفقي

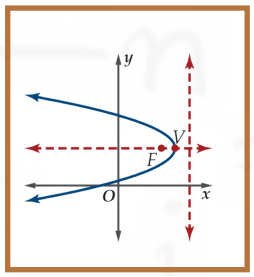
$c > 0$



الرأس : (h,k)

الدليل : $x = h - c$

$c < 0$



البؤرة : $(h+c,k)$

محور التماثل : $y = k$

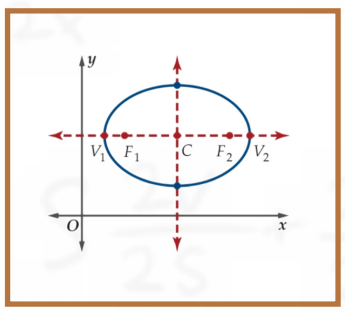
طول الوتر البؤري : $|4c|$

خصائص القطع الناقص

الصورة القياسية :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

الاتجاه : المحور الأكبر أفقي



المركز : (h,k)

البؤرتان : $(h \pm c, k)$

الرأسان : $(h \pm a, k)$

الرأسان المرافقان : $(h, k \pm b)$

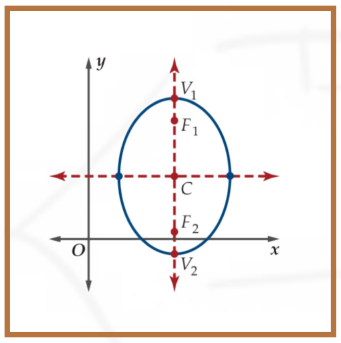
المحور الأكبر : $y = k$ ، وطوله $= 2a$

المحور الأصغر : $x = h$ ، وطوله $= 2b$

الصورة القياسية :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

الاتجاه : المحور الأكبر رأسي



المركز : (h,k)

البؤرتان : $(h, k \pm c)$

الرأسان : $(h, k \pm a)$

الرأسان المرافقان : $(h \pm b, k)$

المحور الأكبر : $x = h$ ، وطوله $= 2a$

المحور الأصغر : $y = k$ ، وطوله $= 2b$

طول البعد البؤري : $2C$

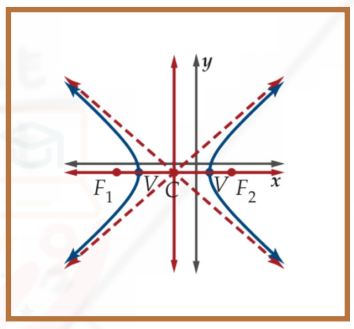
العلاقة بين a, b, c : $c^2 = a^2 - b^2$ أو $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

القطوع المخروطية

خصائص القطع الزائد

الصورة القياسية :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



الاتجاه : المحور القاطع أفقي

المركز : (h, k)

الرأسان : $(h \pm a, k)$

البؤرتان : $(h \pm c, k)$

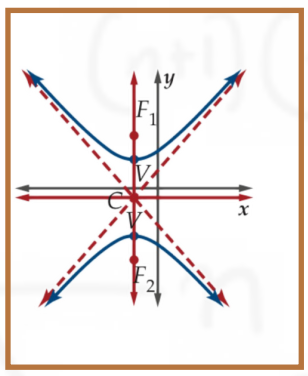
المحور القاطع : $y = k$ ، **وطوله =** $2a$

المحور المرافق : $x = h$ ، **وطوله =** $2b$

خطا التقارب : $y - k = \pm \frac{b}{a}(x-h)$

الصورة القياسية :

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$



الاتجاه : المحور القاطع رأسي

المركز : (h, k)

الرأسان : $(h, k \pm a)$

البؤرتان : $(h, k \pm c)$

المحور القاطع : $x = h$ ، **وطوله =** $2a$

المحور المرافق : $y = k$ ، **وطوله =** $2b$

خطا التقارب : $y - k = \pm \frac{a}{b}(x-h)$

طول البعد البؤري : $2C$

العلاقة بين a, b, c **:** $c^2 = a^2 + b^2$ **أو** $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

الاختلاف المركزي

يعطى بالصيغة : $e = \frac{c}{a}$

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة

معادلة دائرها مركزها (h, k) **نصف قطرها** r

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

تحديد أنواع القطوع المخروطية

الصورة القياسية لمعادلات القطوع المخروطية :

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

المميز

$B^2 - 4AC = 0$

قطع مكافئ

$B^2 - 4AC > 0$

قطع زائد

$B^2 - 4AC < 0$

$A = c, B = 0$ **دائرة**

$A \neq c, B \neq 0$ **قطع ناقص**

قيم نفسك

حدد اتجاه القطع المكافئ الذي بؤرته $(5,3)$ ، ودليله $y = 1$

اليمين | اليسار | الأعلى | الأسفل

أوجد طول المحور الأكبر في القطع الناقص التالي $\frac{x^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$

25 | 4 | 10 | 8

ما إحداثيات رأس القطع المكافئ $2(x-2)^2 = (y+3)$

$(-3,2)$ | $(-2,3)$ | $(2,-3)$ | $(3,-2)$

ما معادلة المحور القاطع للقطع الزائد $\frac{x^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$

$y = -1$ | $y = 9$ | $y = 1$ | $y = 0$

ما اتجاه القطع المكافئ $x^2 = 8(y-8)$

اليمين | اليسار | الأعلى | الأسفل

ما نوع القطع المخروطي الذي تمثله المعادلة $4x^2 - 3y^2 + 8y - 12 = 2x + 4y$

قطع مكافئ | قطع زائد | قطع ناقص | دائرة

قيم نفسك

ما مركز الدائرة التالي معادلتها $(x-2)^2+(y+1)^2=4$

$(-2,-1)$ $(-2,1)$ $(2,-1)$ $(2,1)$

بؤرة القطع المكافئ $y^2=4x$

$(0,4)$ $(4,0)$ $(0,1)$ $(1,0)$

ما هو القطع المخروطي الذي يمكن أن يكون اختلافه المركزي $\frac{4}{3}$

قطع مكافئ | قطع زائد | قطع ناقص | دائرة

معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(0,0)$ ، ودليله $x=-8$ هي

$y^2=-32x$ $y^2=-16x$ $y^2=-8x$ $y^2=32x$

ما قيمة c التي تجعل منحنى المعادلة $4x^2+cy^2+2x-2y-18=0$ دائرة

-8 -4 4 8

يمثل منحنى $(\frac{x}{4})^2-(\frac{y}{5)^2}=1$ قطعًا زائدًا ، ما معادلتا خطي تقارب هذا المنحنى .

$y=-\frac{4}{5}x, y=\frac{4}{5}x$ $y=-\frac{5}{4}x, y=\frac{5}{4}x$ $y=-\frac{1}{4}x, y=\frac{1}{4}x$ $y=-\frac{1}{5}x, y=\frac{1}{5}x$

المتجهات

تطوير - إنتاج - توثيق

مقدمة في المتجهات

تنقسم الكميات الفيزيائية الى قسمين

الكمية المتجهة

كمية لها
مقدار واتجاه

يركل لاعب كرة قدم
بسرعة 60 mi/ h في
اتجاه شمال غرب

الكمية القياسية

كمية لها
مقدار فقط

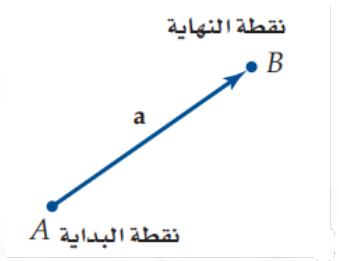
يحمل محمد
حقيبة كتلتها
20 kg

ماذا تعرف عن

المتجهات

المتجه

كمية لها مقدار واتجاه ، وتمثل هندسيا بقطعة مستقيمة.



تسميته

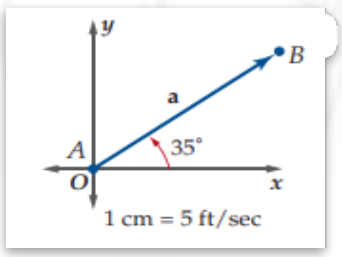
بنقطتي بدايته ونهايته كما في الشكل

رمزه

$\overrightarrow{AB}$ أو $\vec{a}$ أو **a** .

طوله

عبارة عن طول القطعة المستقيمة التي تمثله كما في الشكل المقابل ويرمز له بالرمز $|a|$



الوضع القياسي

تكون نقطة بداية المتجه هي نقطة الأصل ويعبر عن اتجاه المتجه بالزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الافقي للمحور الموجب لـ x

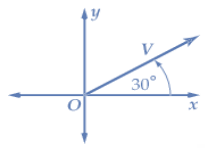
رسم اتجاه المتجه هندسيًا

الاتجاه الافقي

قياس الزاوية مع الاتجاه الموجب لمحور x

اتجاه عكس عقارب الساعة

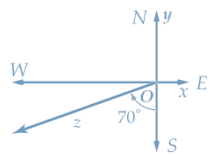
مثال : بزاوية قياسها 30 مع الاتجاه الافقي .



الاتجاة الربعي

قياس اتجاهي يتراوح بين 90 و0 ابتداء من الخط الراسي شرقا N او غربا S

مثال : باتجاه S 70 W



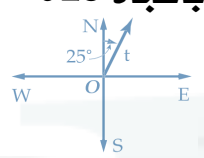
الاتجاه الحقيقي

الزاوية المحصورة بين المتجه والاتجاة الموجب لمحور y (ابتدآ من الشمال N)

والاتجاه مع عقارب الساعة

ويكتب ب ثلاثة ارقام

مثال :، باتجاه 025



أنواع المتجهات

المتجهان المتوازيان

لهما الاتجاه نفسه أو متعاكسه

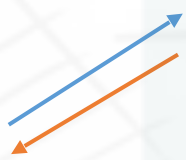
ليس شرط نفس الطول

المتجهان المتساويان

لها الاتجاه نفسه والطول نفسه

المتجهان المتعاكسان

لهما الطول نفسه متعاكسان في الاتجاه .

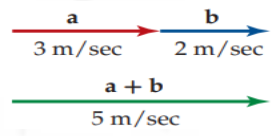


المتجهات الناتج عن جمع متجهين أو اكثر

المحصلة

محصلة ناتج جمع متجهين أو اكثر لها الاتجاه نفسه

هو متجه طوله يساوي مجموع اطوال هذه المتجهات ، واتجاهه هو اتجاه المتجهات الاصلية نفسه .

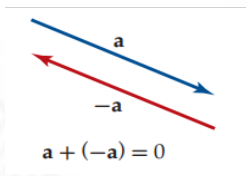


محصلة ناتج جمع متجهين متوازيين متعاكسين

هو متجه طوله يساوي القيمة المطلقة للفرق بين طولي المتجهين واتجاهه هو اتجاه المتجه الأكبر طولا .

محصلة ناتج جمع متجهين متعاكسين لهما الطول نفسه

هو المتجه الصفري ويرمز له بالرمز $\vec{a}$ او 0 وطوله صفر وليس له اتجاه

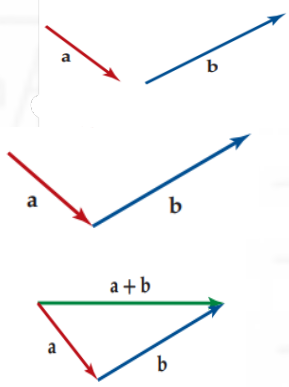


إيجاد المحصلة هندسيًا

أولا : قاعدة المثلث

١ - أجري انسحاب للمتجه b حتي يلتقي نقطة بداية b مع نقطة نهاية المتجه a .

٢ – المحصلة : هو المتجه المرسوم من نقطة بداية a إلى نهاية b

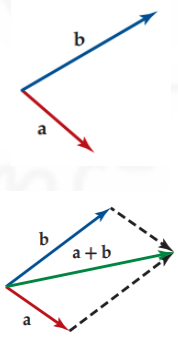


ثانيا : قاعدة متوازي الاضلاع

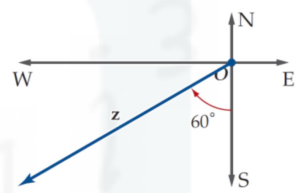
١ – أجري انسحاب للمتجه b حتى يلتقي نقطة بدايته مع نقطة بداية المتجه a .

٢- اكمل رسم متوازي الاضلاع الذي ضلعاه a ، b

٣- المحصلة : المتجه الذي يمثله قطر متوازي الأضلاع .



قيم نفسك



في الشكل المجاور : قياس زاوية الاتجاه الربعي للمتجه ...

N 30° W | S 60° W | N 30° E | S 60° E

المتجهان $2ab$ ، $6ab$ متوازيان ومتعاكسان محصلتهم هي :

$6ab$ | $2ab$ | $8ab$ | $4ab$

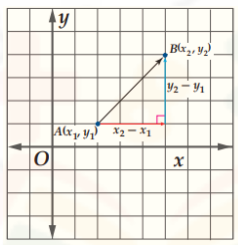
يدفع محمد عربة اخته بقوة مقدا رها 100 N ، وباتجاه $31°$ مع الافقي فان مقدا ر المركبة الرأسية هي

.....

المتجهات في المستوى الاحداثي

الصورة الاحداثية لمتجه

الصورة الاحداثية لـ $\vec{AB}$ الذي نقطة بدايته A (x_1 ، y_1) ، ونقطة نهايته B (x_2 ، y_2)



$$\langle x_2 - x_1 , y_2 - y_1 \rangle$$

سؤال : أوجد الصورة الاحداثية لـ $\vec{AB}$ ، الذي نقطة بدايته A (- 4 ، 2) ، ونقطة نهايته B (3 ، -5) .

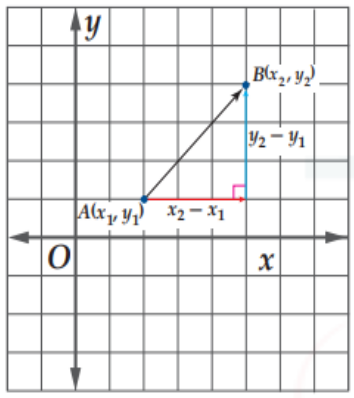
الحل /

الصورة الإحداثية $\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$

$(x_1, y_1) = (-4, 2)\ ,\ (x_2, y_2) = (3, -5)$ $= \langle 3 - (-4), -5 - 2 \rangle$

بسّط $= \langle 7, -7 \rangle$

طول المتجه



طول المتجه v الذي نقطة بدايته (x_1 , y_1) ، ونقطة نهايته هو (x_2 , y_2)

$$|v| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

وإذا كانت $\langle a , b \rangle$ هي الصورة الاحداثية للمتجه فإن : $|v| = \sqrt{a^2 + b^2}$

العمليات على المتجهات

إذا كان $\langle a_1 , a_2 \rangle$ a = $\langle b_1 , b_2 \rangle$ b = ، متجهين ، وK عددا حقيقيا فإن :

جمع متجهين

$$a + b = \langle a_1 + b_1 , a_2 + b_2 \rangle$$

طرح متجهين

$$a - b = \langle a_1 - b_1 , a_2 - b_2 \rangle$$

ضرب متجه في عدد حقيقي

$$K\,a = \langle Ka_1 , Ka_2 \rangle$$

المتجهات في المستوى الاحداثي

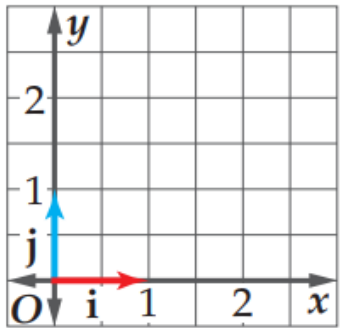
متجه الوحدة

يسمى المتجه الذي طوله 1 متجه الوحدة ، ويرمز له بالرمز u

لإيجاده يكون عن طريق قسمة المتجه على طول :

$$u = \frac{v}{|v|}$$

متجها الوحدة القياسيان



$i = \langle 1 , 0 \rangle$ ، $j = \langle 0 , 1 \rangle$

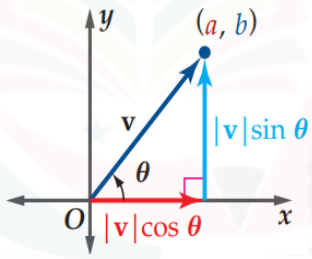
متجه الوحدة باتجاه x

متجه الوحدة باتجاه y

التوافق الخطي : كتابة المتجة $v = (a, b)$

على الصورة : $v = ai + bj$

المتجه بمعلومية طول و زاوية اتجاهه



إذا علمنا طول المتجه v وزاوية اتجاهه مع المحور الافقي (الاتجاه الموجب لمحور x)

فإن الصورة الاحداثية له هي ،

$$v = \langle |v| \cos\theta , |v| \sin\theta \rangle$$

تطبيقات العمليات على المتجهات

طرق إيجاد محصلة سرعة الحركة :

- نوجد متجه السرعة الأول ويكون متجه افقي $v_1 = \langle a , 0 \rangle$
- نوجد الصورة الاحداثية لمتجه السرعة الثاني والذي مقداره v_2 وزاوية اتجاهه θ

$$v_2 = \langle |v_2| \cos\theta , |v_2| \sin\theta \rangle$$

- نوجد مجموع المتجهين $v = v_1 + v_2 = \langle a , b \rangle$
- نوجد محصلة السرعتين الأولى والثانية باستخدام قانون طول المتجه

$$v = \sqrt{a^2 + b^2}$$

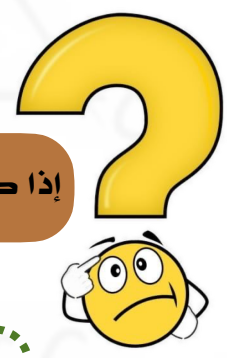
- وأخيرا نوجد اتجاه الحركة بعد إيجاد مجموع المتجهين نوجد

$$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$$

قيم نفسك

أقلعت طائرة في اتجاه المتجه $\langle 5 ، 9 \rangle$ ، اوجد قياس الزاوية التي يصنعها مسار الطائرة مع الافقي :

29.1^o | 33.7^o | 56.3^o | 60.9^o



إذا كان $\vec{AB}$ متجهًا نقطة بدايته $A(8, -4)$ ، ونقطة نهايته $B(-2, -3)$ ، فاكتب $\vec{AB}$ في صورة توافق خطي للمتجهين i, j

$10i - j$ | $6i - 7j$ | $-10i + j$ | $-6i + 7j$

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه نقطة بدايته $A(-6,4)$ ، ونقطة نهايته $B(-2, -1)$ ، ثم أوجد طوله

$\sqrt{41}$; $\langle 4 , -5 \rangle$ | 9 ; $\langle 4 , -5 \rangle$ | $\sqrt{41}$; $\langle -4 , -5 \rangle$ | $\sqrt{41}$; $\langle -4 , 5 \rangle$

المتجه $\langle 3 ، 2 \rangle = v$ ، بدلالة متجهي الوحدة القياسين يساوي

$i + 5j$ | $5i + j$ | $2i + 3j$ | $2i - 3j$

الضرب الداخلي

الضرب الداخلي لمتجهين في المستوى الإحداثي

إذا كان $a = \langle a_1 , a_2 \rangle$ ، $b = \langle b_1 , b_2 \rangle$ متجهان

في المستوى الاحداثي فان الضرب الداخلي له يعرف بالتالي

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

(يكون ناتج الضرب عددا وليس متجها)

شرط تعامد الضرب الداخلي:

هو ان يكون حاصل الضرب

$a \cdot b = 0$

مثال

اوجد الضرب الداخلي للمتجهين u ، v، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين ام لا .

$v = \langle 8 , 4 \rangle$ ،

$u = \langle 2 , 5 \rangle$

$u \cdot v = 2(8) + 5(4) = 36 \neq 0$

بما ان الضرب الداخلي لا يساوي صفر فانهم غير متعامدين

مثال

اوجد الضرب الداخلي للمتجهين u ، v، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين ام لا .

$u = \langle 3 , 6 \rangle$ ،

$v = \langle -4 , 2 \rangle$

$u \cdot v = 3(-4) + 6(2) = 0 = 0$

بما ان الضرب الداخلي يساوي صفر فانهم متعامدين

استعمال الضرب الداخلي لإيجاد طول المتجه

مثال

استعمل الضرب الداخلي ؛ لإيجاد طول $a = \langle -5 , 12 \rangle$

بما ان $|a|^2 = a \cdot a$ ، فان $|a| = \sqrt{a \bullet a}$

$$|\langle -5 , 12 \rangle| = \sqrt{\langle -5 , 12 \rangle \langle -5 , 12 \rangle}$$

$= 13$

الضرب الداخلي

خصائص الضرب الداخلي

اذا كانت w ، u ، v متجهات وكان k عددا حقيقيا فان الخصائص الاتية صحيحة :

خاصية الابدال

$$u \cdot v = v \cdot u$$

خاصية التوزيع

$$u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$$

خاصية الضرب في عدد حقيقي

$$k(u \cdot v) = k\,u \cdot v = u\,k \cdot V$$

خاصية الضرب الداخلي في المتجه الصفري

$$0 \cdot v = 0$$

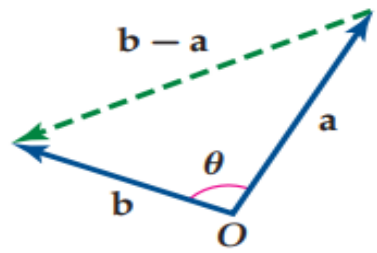
العلاقة بين الضرب الداخلي وطول المتجه

$$u \cdot u = |u|^2$$

الزاوية بين متجهين

اذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين a , b فإن:

$$\cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a|\,|b|}$$



مثال

اوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين

$v = \langle -4, 3 \rangle$, $u = \langle 6, 2 \rangle$

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{|u|\,|v|}$$

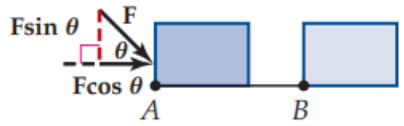
$$\cos\theta = \frac{\langle 6, 2 \rangle \cdot \langle -4, 3 \rangle}{|\langle 6, 2 \rangle|\,|\langle -4, 3 \rangle|}$$

$$\cos\theta = \frac{-24 + 6}{\sqrt{40}\sqrt{25}} = \frac{-18}{10\sqrt{10}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{-18}{10\sqrt{10}} \approx 125°$$

الشغل

الشغل هو القوة المؤثرة في حاصل ضرب المسافة التي تحركها



$$w = \left|\vec{AB}\right| \cdot |w_1|$$

قيم نفسك

ما قياس الزاوية بين المتجهين $\langle 0 \quad , -9 \rangle$ $\langle -1 \quad , -1 \rangle$ ؟

- 0^o
- 90^o
- 135^o
- 45^o

اذا تم ضرب متجهين ضرب داخلي وكان الناتج صفر ، فان الزاوية بين المتجهين تساوي :

- منفرجة
- قائمة
- مستقيمة
- حادة

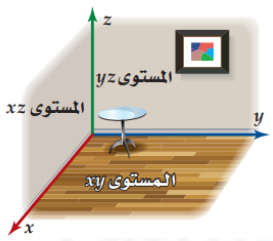
اذا كان $w = \langle 5 \quad , -2 \quad , \quad 1 \rangle$ ، $v = \langle 2 \quad , \quad c \quad , -2 \rangle$ ، فما قيمة c التي تجعل المتجهين v ، w متعامدين ؟

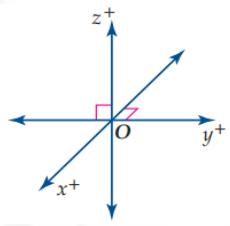
- -4
- 4
- -10
- 10

المتجهات في الفضاء الثلاثي الابعاد

ما هو المستوى ثلاثي الأبعاد

يتكون من ثلاث خطوط متعامدة هي المحور x والمحور y والمحور z كما في الشكل .

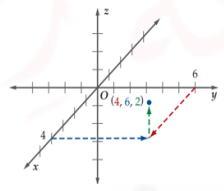




- تتقاطع هذه المستقيمات الثلاثة في نقطة تسمى نقطة الأصل (0 ، 0 ، 0) .
- وينتج عنها ثلاث مستويات وتنقسم هذه المستويات في الفضاء الى ثماني مناطق ويسمى كل منها الثمن .
- وتمثل النقطة في الفضاء بثلاثيات مرتبة من الاعداد الحقيقية (x ، y ، z)

عين النقطة (2 ، 6 ، 4) التالية في نظام الاحداثيات الثلاثي الابعاد .

عين (6 ، 4) في المستوى x y بوضع إشارة مناسبة ، ثم ضع نقطة على بعد وحدتين أعلى الإشارة التي وضعتها ، وبموازاة المحور z كما في الشكل المقابل .



خطوات تعيين نقطة في الفضاء

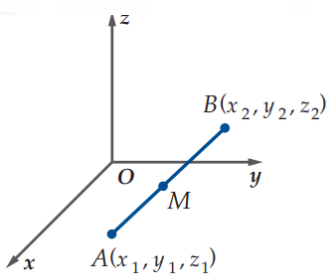
1. أعين أولا النقطة (x , y) في المستوى xy
2. ثم تحرك لأعلى ، أو إلى أسفل موازيًا للمحور z ، بحسب المسافة المتجهة التي يمثلها z .

المسافة بين نقطتين في الفضاء

تعطى المسافة بين النقطتين A (x_1 , y_1 , z_1) ، B (x_2 , y_2 , z_2) بالصيغة

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

نقطة المنتصف في الفضاء



تعطى نقطة المنتصف (M) للمتجه $\bar{AB}$ ، A (x_1 , y_1, z_1) ، B (x_2, y_2 , z_2)

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2} , \frac{y_1 + y_2}{2} , \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

المتجهات في الفضاء الثلاثي الابعاد

المتجهات في الفضاء

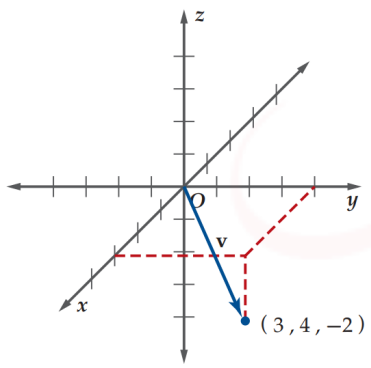
اذا كان v متجها في الفضاء في الوضع القياسي $v = \langle v_1 , v_2 , v_3 \rangle$

ويعبر عن المتجه الصفري بالصورة الاحداثية $0 = \langle 0 , 0 , 0 \rangle$

وعن متجهات الوحدة القياسية بالصورة الاحداثية

$$i = \langle 1 , 0 , 0 \rangle , \quad j = \langle 0 , 1 , 0 \rangle , \quad k = \langle 0 , 0 , 1 \rangle$$

تعيين متجه في الفضاء



اذا كان لدينا المتجه $v = \langle x , y , z \rangle$ فانه يمكن تمثيل على الصورة ....

يتم تعيين النقطة $v = \langle x , y , z \rangle$ في المستوى الثلاثي كما في السابقة

ثم مثل المتجه v بيانيا بحيث تكون نقطة الأصل هي نقطة البداية و النقطة v = $\langle x , y , z \rangle$ هي نقطة النهاية .

مثال

مثل بيانيا المتجه الاتي في نظام الاحداثيات الثلاثي الابعاد :

$$v = \langle 3 , 4 , -2 \rangle$$

أولا : امثل النقطة (2- ، 4 ، 3)

ثانيا : امثل المتجه بيانيا بحيث تكون النقطة (2- ، 4 ، 3) هي نقطة نهايته

المتجهات في الفضاء الثلاثي الابعاد

العمليات على المتجهات في الفضاء

اذا كان $a = \langle a_1 , a_2 , a_3 \rangle$ ، $b = \langle b_1 , b_2 , b_3 \rangle$ متجهين في الفضاء وكان k عدد حقيقيا ، فان :

جمع متجهين

$$a + b = \langle a_1 + b_1 , a_2 + b_2 , a_3 + b_3 \rangle$$

طرح متجهين

$$a - b = \langle a_1 - b_1 , a_2 - b_2 , a_3 - b_3 \rangle$$

ضرب متجه في عدد حقيقي

$$k\,a = \langle k\,a_1 , k\,a_2 , k\,a_3 \rangle$$

التعبير عن المتجهات في الفضاء جبريًا

(نفس طريقة المتجهات في المستوى الإحداثي)

طول المتجه في الفضاء

طول $\vec{AB}$ الذي نقطة بداياته $A(x_1 , y_1 , z_1)$ ونقطة نهايته $B(x_2 , y_2 , z_2)$ هي ،،،

$$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

متجه الوحدة في الفضاء

متجه الوحدة u باتجاه $\vec{AB}$ هو ،

$$u = \frac{\vec{AB}}{\left|\vec{AB}\right|}$$

الصورة الإحداثية لمتجه في الفضاء

الصورة الاحداثية لـ $\vec{AB}$ الذي نقطة بداياته $A(x_1 , y_1 , z_1)$ ونقطة نهايته $B(x_2 , y_2 , z_2)$ هي ،

$$\langle x_2 - x_1 , y_2 - y_1 , z_2 - z_1 \rangle$$

قيم نفسك

اذا كان لدينا $\langle 2 \ , \ 7 \ , \ -2 \rangle = a$ ، $\langle -3 \ , \ 4 \ , \ 9 \rangle = b$ **فان** $a - b$ **يساوي :**

$\langle -1 \ , \ 13 \ , \ 7 \rangle$ | $\langle 1 \ , \ -13 \ , \ -7 \rangle$ | $\langle -5 \ , \ -3 \ , \ 11 \rangle$ | $\langle 5 \ , \ 3 \ , \ -11 \rangle$

المتجه $\langle 2.5 \ , \ 8 \ , \ -9 \rangle$ **يمثل موقع طائرة ، والمتجه** $\langle 5 \ , \ 2 \ , \ 12 \rangle$ **يمثل موقع طائرة أخرى .**
اوجد المسافة بين الطائرتين ، اذا كانت تمثل ميلا واحدا :

56.7 mi | 45.8 mi | 38.5 mi | 22.0mi

اكمل مايلي : طول $\vec{AB}$ **حيث ان** $A(2 ، -8 ، -6)$ ، $B(7 ، 4 ، -6)$ **هو**

.....

اكمل مايلي : إذا كانت النقطة $s = (\frac{7}{2}, 1, 2)$ **هي منتصف** $\bar{MP}$ ، $M(3 ، 4 ، 5)$ **فان احداثيات النقطة P هي**

.....

الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

الضرب الداخلي و المتجهات المتعامدة في الفضاء

الضرب الداخلي للمتجهين $a = \langle a_1 , a_2 , a_3 \rangle$ ، $b = \langle b_1 , b_2 , b_3 \rangle$ كالاتي :

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

(يكون حاصل ضربهم عددا وليس متجها)

شرط تعامد الضرب الداخلي:

هو ان يكون المتجهان غير الصفريين متعامدين إذا وإذا فقط إذا كان

$a \cdot b = 0$

مثال

اوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين u ، v وحدد ما اذا كانا متعامدين أم لا :

$u = \langle -7 , 3 , -3 \rangle$ ، $v = \langle 5 , 17\,5 \rangle$

$u \cdot v = \langle -7 , 3 , -3 \rangle . \langle 5 , 17\,5 \rangle$

$= -7(5) + 3(17) + (-3)(5)$

$= -35 + 51 + (-15) = 1 \neq 0$

بما ان حاصل ضربهم الداخلي لا يساوي صفر فان المتجهين غير متعامدين

مثال

$u = \langle 3 , -3 , 3 \rangle$ ، $v = \langle 4 , 7 , 3 \rangle$

$\langle 3 , -3 , 3 \rangle . \langle 4 , 7 , 3 \rangle$

$u \cdot v = 3(4) + (-3)(7) + 3(3)$

$= 9 + 21 - 12 = 0$

بما ان حاصل ضربهم الداخلي يساوي صفر فان المتجهين متعامدين

الزاوية بين المتجهين في الفضاء

اذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين a ، b فإن :

$$\cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a|\,|b|}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{a \cdot b}{|a|\,|b|}$$

مثال

اوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين u ، v

$u = \langle 3 , 2 , -1 \rangle$ ، $v = \langle -4 , 3 , -2 \rangle$

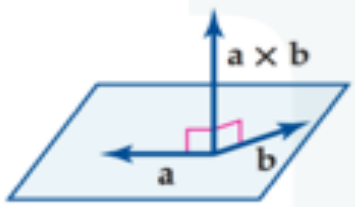
$$\theta = \cos^{-1}\frac{\langle 3 , 2 , -1 \rangle . \langle -4 , 3 , -2 \rangle}{\sqrt{(3)^2 + (2)^2 + (-1)^2}\ \sqrt{(-4)^2 + (3)^2 + (-2)^2}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{-4}{\sqrt{406}} \approx 101.5°$$

أي أن قياس الزاوية بين u , v هو 101.5^o تقريبًا

الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

الضرب الاتجاهي



الضرب الاتجاهي لمتجهين a ، b هو متجه وليس عدد ، ويرمز له بالرمز $a \times b$ (يقرأ a cross b) ويكون المتجه الناتج عموديا على المستوى الذي يحوى المتجهين a ، b يطبق الضرب الاتجاهي على المتجهات في النظام ثلاثي الابعاد فقط

الضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

اذا كان : $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ ، $b = b_1 i + b_2 j + b_3 k$,

فإن الضرب الاتجاهي للمتجهين هو المتجه :

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} k =$$

$$a \times b = (a_2 b_3 - a_3 b_2) i - (a_1 b_3 - a_3 b_1) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k$$

مثال

اوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين : $u = \langle 3, -2, 1 \rangle$ ، $v = \langle -3, 3, 1 \rangle$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} k$$

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2 - 3)i - (3 + 3)j + (9 - 6)k$$

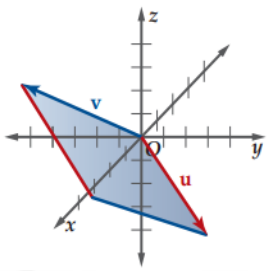
$$= -5i - 6j + 3k$$

$$= \langle -5, -6, 3 \rangle$$

الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

تطبيقات هندسية للضرب الاتجاهي

مساحة متوازي الاضلاع



يعبر عن مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه u ، v ضلعان متجاوران

$$|u \times v|$$

اوجد مساحة متوازي الاضلاع الذي فيه : $u = 2i + 4j - 3k$ ، $v = i - 3j + 3k$

الخطوة 1 : اوجد $u \times v$

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} k$$

$$u \times v = -3i - 9j - 14k$$

الخطوة 2 : أوجد طول $u \times v$

$$= |u \times v|$$

$$\sqrt{(-3)^2 + (-9)^2 + (-14)^2} = \sqrt{286}$$

$$\approx 16.91$$

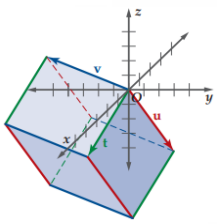
أي ان مساحة متوازي الاضلاع تساوي تقريبا 16.91 وحدة مربعة

حجم متوازي الاضلاع

متوازي السطوح : هو عبارة عن مجسم له ستة أوجه ، كل وجه منها على شكل متوازي أضلاع كما في الشكل .

حجم متوازي السطوح : هو القيمة المطلقة للضرب القياسي الثلاثي ،،،

وبذلك يعرف الضرب القياسي الثلاثي للمتجهات



$$t = t_1 i + t_2 j + t_3 k \quad , \quad u = u_1 i + u_2 j + u_3 k, \quad v = v_1 i + v_2 j + v_3 k$$

كالاتي :

$$t \cdot (u \times v) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

اوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه : $t = 4i - 2j - 2k$, $u = 2i + 4j - 3k$, $v = i - 5j + 3k$

$$t.(u \times v) = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} (4) - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 11 & 3 \end{vmatrix} (-2) + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} (-2)$$

$$-21 + 18 + 28 = 34$$

أي ان حجم متوازي السطوح يساوي تقريبا 34 وحدة مكعبة .

قيم نفسك

اوجد مساحة متوازي الاضلاع الذي فيه : $u = \langle 5, 2, 8 \rangle$ ، $v = \langle -3, 4, 6 \rangle$, **ضلعان متجاوران .**

- 8.5 وحدة مربعة
- 35.7 وحدة مربعة
- 17.4 وحدة مربعة
- 63.2 وحدة مربعة

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $v = \langle -9, 4, -8 \rangle$, $w = \langle 6, -2, 4 \rangle$:

- $\langle -6, -12, 0 \rangle$
- $\langle 0, 12, -6 \rangle$
- $\langle 32, 84, 42 \rangle$
- $\langle -54, -8, -32 \rangle$

اوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه : $u = \langle 2, 3, 0 \rangle$ ، $v = \langle -4, 5, 1 \rangle$ ، $w = \langle -2, 3, 4 \rangle$ **أحرف متجاورة .**

- 8 وحدات مكعبة
- 76 وحدات مكعبة
- 20 وحدات مكعبة
- 88 وحدات مكعبة