الفصول الأربعة في رياضيات ٦

-خرائط ذهنية-

اعداد
لمى صالح المديهش

طي صالح المديهش ، ١٤٤٢هـ
فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر
الفصول الأربعة في رياضيات ٦
٣٦ صفحة

رقم الإيداع ١٠٦٨٤ / ١٤٤٢
تاريخ ٢٧ / ١١ / ١٤٤٢
رقم ردمك ٨ – ٨١٨٣ – ٠٣ – ٦٠٣ - ٩٧٨

رؤية مجموعة رفعة الرياضيات

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله والصلاة والسلام على نبينا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين

أما بعد :

مجموعة رِفعة هي مجموعة تدار من قبل معلمي ومعلمات الرياضيات من جميع أنحاء المملكة العربية السعودية ، وهي قائمة على التطوير المهني لجميع المعلمين والمعلمات ، وابتكار الأفكار الإبداعية للتعليم العام ، والإنتاج الموثق لكل ما يخص الرياضيات والتعليم العام .

حسابات مجموعة رفعة

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله والصلاة والسلام على نبينا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين

أما بعد :

الرياضيات ليست مجرد مادة ، وإنما عالم مليْ بالجمال والمغامرة . رغم أن الشائع عن هذا العالم أنه صعب الفهم ، إلا أن مشكلتنا ليست بالصعوبة وإنما بالوهم الذي صنعناه لأنفسنا بأنه من المستحيل أن يصبح سهلاً .

أنا أحببت الرياضيات وأتمنى لكل شخص أن يخوض في تجربة حب هذا العالم كي لا يفقد متعة حل مسائله والتعمق في جوانبه وألوانه المبهرة . حتى لو كان مستحيلاً ، تذكر "فعل المستحيل أحد دروب المرح" .

هنا أقدم لكم ملخص رياضيات ٦ بأبسط التعابير ، فقد شُرح وفُصِّل بكل حب .

الأقسام

- المتجهات
- الإحداثيات القطبية والديكارتية
- الإحصاء
- النهايات والاشتقاق

للذهاب إلى الفهرس . اضغط هنا

SUMMER SEASON

المنتجات

الفصل الأول

مقدمة في المتجهات

المتجهات في المستوى الإحداثي

الضرب الداخلي

المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد

الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي في الفضاء الثلاثي الأبعاد

مقدمة في المتجهات

تحديد الكميات

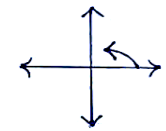
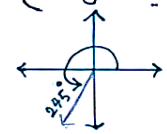
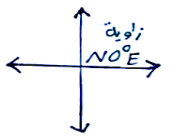
- **متجهة** (تحدد الاتجاه)
  - مثل: يركض غزال بسرعة 15 m/s باتجاه الغرب.
- **قياسية** (لا تحدد الاتجاه)
  - مثل: يركض غزال بسرعة 15 m/s.

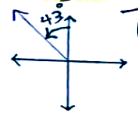
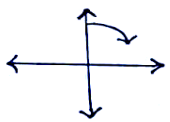
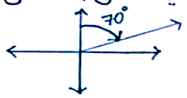
إيجاد محصلة متجهين

- **نفس الإتجاه** (نجمع المتجهين)
  - مثل: 2 يسار 3 يسار؟ يسار 5 =
- **عكس الإتجاه** (نطرح المتجهين)
  - مثل: 2 يمين 3 يسار؟ اليسار 1 =

العمليات على المتجهات

أوضاع تمثيل المتجه

- **الإتجاه مع الأفقي**
  - 
  - (البداية من x^+)
  - مثل:
    - 
    - بالمنقلة تكون زاوية الأفقي = 245°
- **الإتجاه الربعي ∅**
  - 

  - البداية على حسب الأرباع وتكتب قياسياً البداية
  - مثل:
    - 
    - بالمنقلة تكون زاوية الربعي = لـ N43°
- **الإتجاه الحقيقي**
  - 
  - * لا إتجاه واحد فقط + يجب ثلاث أرقام
  - البداية من الشمال مع عقارب الساعة
  - مثل:
    - 
    - بالمنقلة تكون زاوية الحقيقي = 070°
    - لأن لازم يكون 3 أرقام

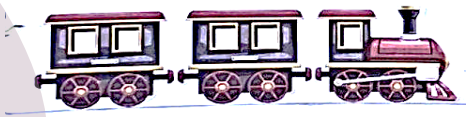
تحليل القوة إلى مركبتين متعامدتين

- الهانوبر: $\overset{(N)\text{ القوة}}{r} \overset{\cos}{\sin} \theta$
- أفقي "x" (cos)
- رأسي "y" (sin)

مثل: يركل لاعب كرة قدم من سطح الأرض بسرعة 44 ft/s وبزاوية 33° مع سطح الأرض، ما هي مقدار المركبتين الرأسية والأفقية؟

الرأسية ← $y = 44 \sin 33^\circ \approx 24N$

الأفقية ← $x = 44 \cos 33^\circ \approx 37N$



المتجهات في المستوى الإحداثي

الصورة الإحداثية لمتجه

$A=(x_1,y_1)$, $B=(x_2,y_2)$

$\overrightarrow{AB}=\langle x_2-x_1 , y_2-y_1 \rangle$

مثل أوجدي الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(-3,1)$ ونهايته $B(4,5)$؟

$\overrightarrow{AB}=\langle 4-(-3), 5-1 \rangle$

$=\langle 7, 4 \rangle$

طول المتجه

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

مثل أوجدي طول المتجه $\overrightarrow{AB}$ حيث: $A(0,8)$, $B=(-9,-3)$؟

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-9-0)^2+(8--3)^2}$

$=\sqrt{81+121}$

$=\sqrt{202}$

العمليات على المتجهات

التعويض عن كل متجه بقيمته مع الحفاظ على بقاء الناتج $\langle$متجه$\rangle$

مثل أوجدي $4c+b$ حيث $c=\langle -4,1 \rangle$, $b=\langle -3,0 \rangle$؟

$4\langle -4,1 \rangle+\langle -3,0 \rangle$

$=\langle -16,4 \rangle+\langle -3,0 \rangle$

$=\langle -19,4 \rangle$

متجه الوحدة

متجه وحدة u في نفس اتجاه v:

$$u=\frac{v}{|v|}$$

مثل أوجد متجه وحدة u له نفس إتجاه المتجه: $x=\langle -4,-4 \rangle$

$u=\frac{x}{|x|} \rightarrow \frac{\langle -4,-4 \rangle}{\sqrt{-4^2+-4^2}} \rightarrow 4\sqrt{2}$

$=\langle \frac{-4}{4\sqrt{2}} , \frac{-4}{4\sqrt{2}} \rangle$

$=\langle \frac{-\sqrt{2}}{2} , \frac{-\sqrt{2}}{2} \rangle$

الصورة الإحداثية لمتجه بمعلومية طوله وزاوية اتجاهه

$\langle |V|\cos\theta , |V|\sin\theta \rangle$

مثل أوجدي الصورة الإحداثية للمتجه الذي طوله 10 وزاوية اتجاهه مع الأفقي $120°$؟

$\langle 10\cos 120° , 10\sin 120° \rangle$

$=\langle -5 , 5\sqrt{3} \rangle$

طول المتجه بصورة توافق خطي

$V=\langle a,b \rangle \Rightarrow V=ai+bj$

مثل $\overrightarrow{DE}=\langle 2,-5 \rangle$

$=2i-5j$

زاوية الإتجاه للمتجه $V=\langle a,b \rangle$

θ

- $a>0$: $\theta=\tan^{-1}(\frac{b}{a})$ * الربع 4,1
- $a<0$: $\theta=\tan^{-1}(\frac{b}{a})+180$ * الربع 3,2

أمثلة أوجدي زاوية المتجهات التالية مع الإتجاه الموجب لمحور x؟

$r=\langle 4,-5 \rangle$ ∈

$\theta=\tan^{-1}(\frac{-5}{4})=-51.3$ ← *أزيد إذا كان الناتج سالب

$r=\langle -3,-8 \rangle$ ∈

$\theta=\tan^{-1}(\frac{-8}{-3})+180=249.44$

الضرب الداخلي

إستعمال الضرب الداخلي في التحقق من تعامد متجهين

$b=\langle b_1, b_2\rangle$, $a=\langle a_1, a_2\rangle$

$\rightarrow a\cdot b = a_1b_1 + a_2\cdot b_2$

مثل أوجد الضرب الداخلي للمتجهين u, v ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين.

$u=\langle -3, 5\rangle$, $v=\langle 2, 1\rangle$

$u\cdot v = -3(2)+5(1)$

$= -6+5(1)$

$= 1$

مثل أوجد قيمة c التي تجعل المتجهان متعامدان

في $u=\langle c, -3\rangle$, $v=\langle 9, -6\rangle$

$c\times 9+(-3)-6=0$

$9c+18=0$

$\frac{9c}{9} = \frac{-18}{9}$

$\therefore c=-2$

طول المتجه

$u\cdot u = |u|^2$

مثل استعمل الضرب الداخلي لإيجاد طول المتجه $b=\langle 12,16\rangle$ ؟

$|b| = \sqrt{\langle 12,16\rangle\cdot\langle 12,16\rangle}$

$= \sqrt{\langle 144+256\rangle}$

$= 20$

الزاوية بين متجهين

$u=\langle\ \ \rangle$, $v=\langle\ \ \rangle$

$\rightarrow \cos\theta = \frac{a\cdot b}{|a|\cdot|b|}$

مثل أوجد الزاوية بين المتجهين

$V=\langle 4,4\rangle$, $u=\langle -5,-2\rangle$

$\cos\theta = \frac{\langle 4,4\rangle\cdot\langle -5,-2\rangle}{\sqrt{4^2+4^2}\cdot\sqrt{(-5)^2+(-2)^2}}$

$= \frac{-20-8}{4\sqrt{58}}$

$\theta = \cos^{-1}\frac{-7\sqrt{58}}{58}$

$= 156.80$

إيجاد متجه يعامد المتجه المعطى

مثل أوجد متجه يعامد المتجه المعطى؟

$\langle -2, -8\rangle$

نفرض: $\langle 4, y\rangle$

$\langle -2,-8\rangle\cdot\langle 4,y\rangle$

$= -8-8y=0$

$= -8y = \frac{8}{-8}$

$= \langle 4, -1\rangle$

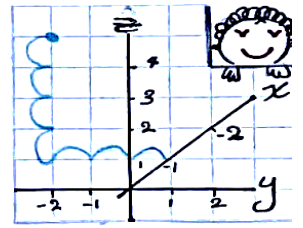
المتجه المعامد

المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد

تعيين نقطة أو متجه في الفضاء

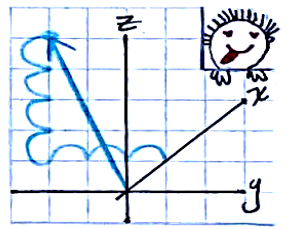
نقطة

مثل $(-1,-3,4)$



متجه

مثل $\langle -1,-3,4 \rangle$



العمليات على المتجهات في الفضاء

مثل $w=\langle -1,4,-4 \rangle$ ، $z=\langle -2,0,5 \rangle$ حسب: $4w-8z$ ؟

$$4\langle -1,4,-4 \rangle - 8\langle -2,0,5 \rangle$$

$$= \langle -4,16,-16 \rangle + \langle 16,0,-40 \rangle$$

$$= \langle 12,16,-56 \rangle$$

التعبير عن المتجهات في الفضاء جبرياً

مثل المتجه الذي بدايته: $A(-2,-5,-5)$ ، $B(-1,4,-2)$

أوجد الصورة الإحداثية وطول الوحدة $\overrightarrow{AB}$ ومتجه الوحدة u باتجاه $\overrightarrow{AB}$ ؟

الصورة الإحداثية + الطول =

$$\overrightarrow{AB} = \sqrt{(-1+2)^2+(4+5)^2+(-2+5)^2} = \sqrt{91}$$

متجه الوحدة u باتجاه $\overrightarrow{AB}$

$$u = \frac{\overrightarrow{AB}}{|AB|} = \frac{\langle 1,9,3 \rangle}{\sqrt{91}}$$

$$= \left\langle \frac{\sqrt{91}}{91}, \frac{9\sqrt{91}}{91}, \frac{3\sqrt{91}}{91} \right\rangle$$

صيغة المسافة ونقطة المنتصف في الفضاء

المسافة بين نقطتين

$$AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

مثل أوجد البعد بين النقطتين $A(2,-1,-3)$ ، $B(-1,5,3)$ ؟

$$AB = \sqrt{(-1-2)^2+(5-1)^2+(3--3)^2}$$

$$= \sqrt{9+16+36}$$

$$= \sqrt{61}$$

نقطة المنتصف

$$m = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2} \right)$$

مثل أوجد نقطة المنتصف $A(2,-1,-3)$ ، $B(-1,5,3)$ ؟

$$m = \left(\frac{2+-1}{2} \quad \frac{1+5}{2} \quad \frac{-3+3}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}, 3, 0 \right)$$

الضرب الداخلي والضرب الإتجاهي للمتجهات في الفضاء

إيجاد الضرب الداخلي لتحديد المتجهان المتعامدة

مثل أوجد حاصل الضرب الداخلي ثم تحقق هل متعامد أو لا؟

$u=\langle 3,-5,4\rangle$ ، $V=\langle 5,7,5\rangle$

$3\times 5+(-5)\times 7+4\times 5$

$=0$ ← متعامدين

إيجاد الضرب الإتجاهي لمتجهين

* المتجه $u\times V$ عمودي على المستوى الذي يحوي u و V

مثل أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين u و V ثم بيني هل $u\times V$ عمودي على كل من u و V؟

$u\langle 4,2,-1\rangle$ ، $V\langle 5,1,4\rangle$

حجم متوازي السطوح

$|t\cdot(u\times V)|$

مثل أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه $u=-6i-2j+3k$

$t=2j-5k$ ، $V=4i-3j+k$

$$|t\cdot(u\times V)|=\begin{vmatrix} 0 & 2 & -5 \\ -6 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$=(0+24+90)-(12+0+40)$

$=36$ وحدة مربعة

مساحة متوازي أضلاع في فضاء

$|u\times V|$

مثل أوجد مساحة متوازي الاضلاع الذي فيه $u=6i-2j+3k$ ضلعان متجاوران؟ $V=4i+3j+k$

$$u\times V=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -6 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$=(-2i+12j-18k)-(9i-6j-8k)$

$=\langle -11,18,-10\rangle$

الزاوية بين متجهين في الفضاء

$$\cos\theta=\frac{u\cdot V}{|u|\cdot|V|}$$

مثل أوجد قياس الزاوية بين المتجهين؟ $u=-4i+2j+k$ ، $V=4i+3k$

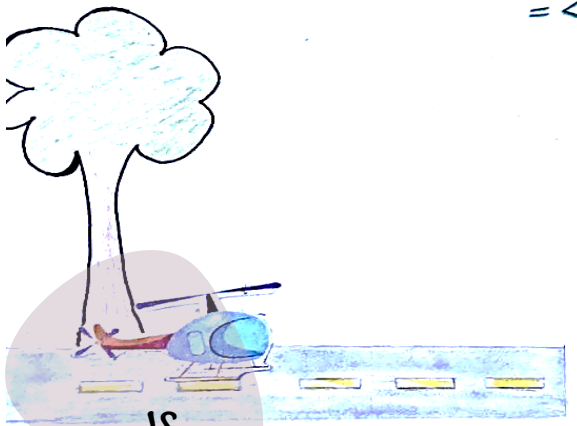
$$\cos^{-1}=\frac{-16+3}{\sqrt{16+4+1}\cdot\sqrt{16+9}}$$

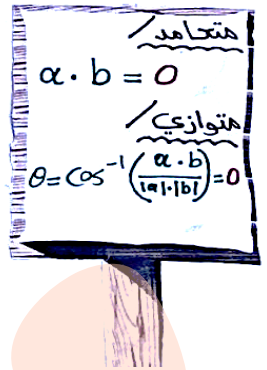
≈ 124.5

* إذا ضرب المتجه V في عدد حقيقي k فإن طول المتجه kV هو $|k||V|$ ويحدد اتجاهه حسب إشارة k حيث:

$k<0$ (اتجاه kV عكس اتجاه V)

$k>0$ (اتجاه kV نفس اتجاه V)





WINTER SEASON

الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة

— الفصل الثاني —

الإحداثيات القطبية

الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات

الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

الإحداثيات القطبية

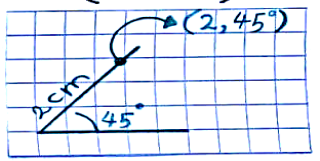
تمثيل الإحداثيات القطبية

(r, θ)

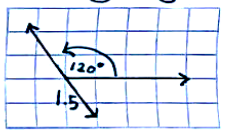
- r: موجبة (مع اتجاه الخط) / سالبة (عكس اتجاه الخط)
- θ: موجبة (مع عقارب الساعة) / سالبة (عكس عقارب الساعة)

مثل 1. مثل النقطة بالمستوى القطبي؟

$A(2, 45^\circ)$



2. الشكل يمثل النقطة؟



$(-1.5, 120^\circ)$

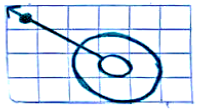
تمثيل النقاط في المستوى القطبي

θ = خط *

r = دائرة *

مثل: مثل النقطة على المستوى القطبي؟

$R\left(1.5, \frac{-7\pi}{6}\right)$



(r, θ)

- r: موجبة (مع اتجاه الخط) / سالبة (عكس اتجاه الخط)
- θ: موجبة (عكس عقارب الساعة تبدأ مع الأفقي) / سالبة (مع عقارب الساعة تبدأ مع الأفقي)

تمثيلات قطبية متعددة

مثل: أوجد ثلاثة أزواج تمثل نفس النقطة؟

$(5, 240)$

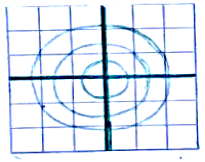
$(5, 240) \rightarrow (5, -120)$

$(-5, 60) \rightarrow (-5, -300)$

التمثيل البياني للمعادلات القطبية

مثل 1.

$r = 3$

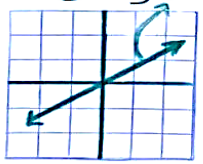


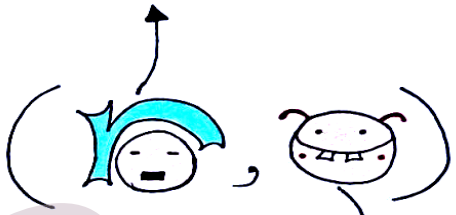
انتبه بدت من الأفقي لفوق * θ موجبة والعكس.

انتبه الخط عكس الاتجاه اللي أنا ماشية عليه * r سالبة والعكس.

2.

$\theta = 30^\circ$





r دائرة لأن وجهها دائري.

θ خط لأنها دائماً مبتسمة فهي تمشي للأمام على خط مستقيم ميسر ❤

المسافة بالصيغة القطبية

$$P_1P_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

مثل: $A(5, 310^\circ)$, $B(6, 345^\circ)$

$$P_1P_2 = \sqrt{25 + 36 - 2(5)(6)\cos(345^\circ - 310^\circ)}$$

$= 3.44$ ميل

ملخص الدرس الثاني...

الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات

تحويل احداثيات قطبية إلى ديكارتية

$(r,\theta) \longrightarrow (x,y)$

$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$

مثل: حول الاحداثيات القطبية إلى ديكارتية للنقطة $T(-3, 45°)$

$T(x,y) = (-3\cos 45, -3\sin 45°)$

$= \left(-3\times\frac{\sqrt{2}}{2}, -3\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= \left(\frac{-3\sqrt{2}}{2}, \frac{-3\sqrt{2}}{2}\right)$

تحويل احداثيات ديكارتية إلى قطبية

$(x,y) \longrightarrow (r,\theta)$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

θ

- $x<0$: $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + 180$
- $x>0$: $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$
- $x=0$: * اذا الزاوية سالبة اضيف 360.
  - $y<0$: $\theta = \frac{-\pi}{2}$
  - $y>0$: $\theta = \frac{\pi}{2}$

مثل: حول الاحداثيات الديكارتية إلى قطبية للنقطة: $V(8,10)$

$r = \sqrt{64+100} = \sqrt{164}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{10}{8}\right) = 51.34$

$\therefore V(r,\theta) = (2\sqrt{164}, 51.34)$

تحويل معادلات ديكارتية إلى قطبية

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

مثل: وكتب المعادلة على الصورة القطبية

$x = -2$

$\frac{r\cos\theta}{\cos\theta} = \frac{-2}{\cos\theta}$

$r = -2\sec\theta$

تحويل المعادلات القطبية إلى ديكارتية

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

مثل:

1) $r = -3$

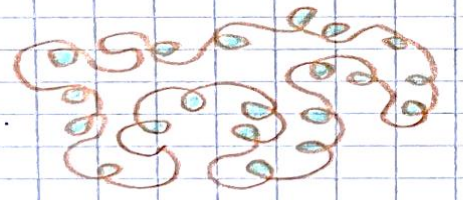
$(\sqrt{x^2+y^2})^2 = (-3)^2$

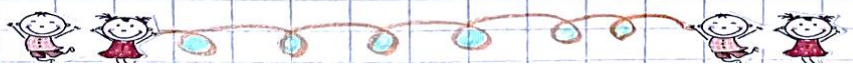
$x^2+y^2 = 9$

2) $\theta = \frac{\pi}{3}$

$\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan\frac{\pi}{3}$

$\frac{y}{x} = \sqrt{3}$





ملخص الدرس الثالث ...

نهاية الوحدة ..

الأعداد المركبة وبعض نظريات ديموافر

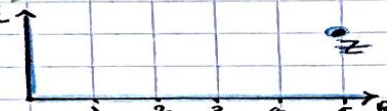
تمثيل الأعداد المركبة وإيجاد قيمتها المطلقة

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

مثل كل عدد في المستوى المركب واوجد قيمته المطلقة:

$5 + 2i$

$$|z| = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$$



الصورة القطبية لعدد مركب $z = a + bi$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$

θ

- $a < 0$: $\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) + \pi$
- $a > 0$: $\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$
- $a = 0$:
  - $b < 0$: $\frac{-\pi}{2}$
  - $b > 0$: $\frac{\pi}{2}$

مثل: عبر عن كل عدد مركب بالصورة القطبية:

$9 + 7i$

$r = \sqrt{81+49} = \sqrt{130}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{7}{9}\right) \approx 37.8°$

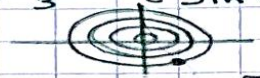
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= \sqrt{130}(\cos 37.8 + i\sin 37.8)$

تمثيل الصورة القطبية لعدد مركب وتحويلها إلى الصورة الديكارتية

مثل: مثل العدد المركب في المستوى القطبي ثم عبر عنه بالصورة الديكارتية

$$4\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$



$$4\left(\frac{1}{2} + i\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$$

$2 - 2\sqrt{3}\,i$ حيث $i = \sqrt{-1}$

قسمة الأعداد المركبة على الصورة القطبية

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

حيث $r_2 \neq 0$, $z_2 \neq 0$

مثل: $3\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) \div \frac{1}{2}(\cos\pi + i\sin\pi)$

$$= \frac{3}{1/2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \pi\right)\right]$$

$$= 6\left[\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right]$$

$$= 6\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$= 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}\,i$$

ضرب الأعداد المركبة على الصورة القطبية

$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$

$$= z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

مثل: $3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \cdot 5\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$$3 \times 5\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$15\left[\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right]$$

نظرية ديموافر

مثل: ① $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^4$

$$= 2^4\left(\cos\frac{4\pi}{4} + i\sin\frac{4\pi}{4}\right)$$

$$= 16(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$= 16[-1 + i(0)] = -16$$

② $(1 + \sqrt{3}\,i)^4$

$r = \sqrt{4} = 2$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3}$

$$= \left[2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^4 = 16\left[\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right]$$

الجذور المختلفة

جذور العدد المركب

$r[\cos\theta + i\sin\theta]$

مثل: أوجد الجذور التكعيبية للعدد $2 + 2i$

الجذور النونية للعدد واحد

$$r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right]$$

مثل: أوجد الجذور الرابعية للعدد واحد

الجذور النونية للعدد المركب يكون الجذور القياس نفسه وهو $r^{\frac{1}{n}}$.

SPRING SEASON

الاحتمال والإحصاء

الفصل الثالث

التحليل الإحصائي

الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية

التوزيع ذو الحدين

الدراسات المسحية

الاحتمال المشروط

التوزيع الطبيعي

ملخص الدرس الأول...

الدراسات

المسحية
(تستعمل في جمع البيانات)
* تصنيفها:

حسب العينة
- المجتمع الكلي (تعداد عام)
(إذا اشتملت جمع بيانات جميع الطلاب في مدرسة ما.)
- العينة
(إذا تم اختيار عدد محدد من الطلاب.)

حسب الحيادية
- منحازة
(عند تفضيل بعض أقسام المجتمع على باقي الأقسام.)
* تعلم احتمالية حدوثها
- غير منحازة
(إذا تم اختيار العينة بصورة عشوائية)
* لا تعلم احتمالية الاجابة مسبقاً

- ولتجنب التحيز عند تصميمها شروط:
1. عشوائية العينة (غير متحيزة وكبيرة نسبياً).
2. أساليب وأسئلة غير متحيزة لاجراء المسح.

القائمة على الملاحظة
(تتم ملاحظة الأفراد دون أي محاولة للتأثير.)
* تصنيفها:
غير متحيزة.

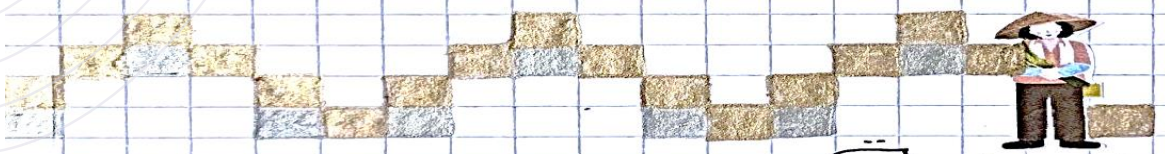
التجريبية
(يتم اجراء تعديل معتمد على المجموعة قيد الدراسة وتم ملاحظة استجاباتهم.)

- مجموعة ضابطة
(لا تخضع للمعالجة أو المعالجة الشكلية)
- مجموعة تجريبية
(تخضع للتجربة)

* تصنيفها:

منحازة
(إذا كان الأفراد يعرفون إلى أي مجموعة ينتمون (معالجة شكلية))

غير منحازة
(لا يعرف أفراد الدراسة إلى أي مجموعة ينتمون.)
مثل: دراسات الأدوية مجموعة دواء وثانية فيتامينات.



الارتباط والسببية

الارتباط
(كل الظاهرتين تؤثر في الأخرى)
* إذا فيه أسباب ثانية تجعل الظاهرة تحدث.

مثل: النوم بجزائك يؤدي إلى شعورك بالحساء.

السببية
(وقوع الظاهرة هو سبب مباشر لوقوع الأخرى)
* إذا كانت السبب الوحيد.

مثل: عندما أدرس أحصل على تقدير ممتاز.

ملخص الدرس الثاني ...

التحليل الاحصائي

مقاييس النزعة المركزية

المتوسط
$\frac{\text{مجموع البيانات}}{\text{عددهم}}$

(لا يوجد قيم متطرفة)

مثل 49, 55, 61, 59, 46, 61, 63.

المنوال
العدد أو الاعداد التي تظهر اكثر من غيرها

(تحوي البيانات قيم متكررة)

مثل تمنح شركة جائزة وجه قيمتها 1000 و 30 جائزة قيمتها 500.

الوسيط
العدد الذي يشغل منتصف البيانات بعد ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً

- البيانات فردية (توجد قيمة واحدة)
- البيانات زوجية (توجد قيمتين نوجد متوسطها)

(توجد قيم متطرفة ولا توجد هنوات كبيرة في منتصف البيانات)

مثل 19.2, 40.4, 36.8, 37.2.

هامش خطأ المعاينة

$$\pm \frac{1}{\sqrt{n}}$$

مثل في دراسة مسحية عشوائية شملت 3247 شخصاً، قال 41% منهم: انهم مرتاحون للخدمة الطبية.

A) ما هامش خطأ المعاينة؟

$$\pm \frac{100}{\sqrt{3247}} \approx 1.75\%$$

B) ما الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة أفراد المجتمع المرتاحين للخدمة الطبية؟

(41% − 1.75%, 41% + 1.75%)
= (39.25, 42.75)

الانحراف المعياري

- للعينة: $S = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$
- للمجتمع: $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \mu)^2}{n}}$

* كلما تباعدت البيانات كلما كان الانحراف المعياري اكبر.

اذا ازدادت كل القيم:
- المتوسط يزيد بنفس القيمة.
- الوسيط يزيد بنفس القيمة.
- الانحراف المعياري لا يتأثر.

اذا ازدادت القيمة المتطرفة العليا:
- المتوسط يتأثر بتأثر بسيط.
- الوسيط لا يتأثر.
- الانحراف المعياري يتأثر بتأثر كبير.

اذا ازدادت القيمة المتطرفة لعنزة:
- + كل
- + التلاثة
- + يتأثرون.

الاحتمال المشروط

(إحتمال وقوع الحادثة B بشرط وقوع الحادثة A حيث A و B غير مستقلتين)

الاحتمال المشروط

$$P(B|A) = \frac{P(A \text{ و } B)}{P(A)}$$

مثل يحتوي كيس على 8 كرات زرقاء و6 حمراء و4 صفراء و6 بيضاء و5 خضراء. إذا سحبت كرة واحدة عشوائياً، فما احتمال أن تكون حمراء، إذا علم أنها ليست خضراء. ك = 35

$$P(B|A) = \frac{\text{عدد الحمراء}}{\text{الكل دون الخضراء}} = \frac{6}{35-5} = \frac{1}{5}$$

الجداول التوافقية

$$P(B|A) = \frac{\text{المشترك المقاطع}}{\text{مجموع احتمالات الشرط}}$$

يمكن صف أو عمود

مثل إذا اختير أحد الطلاب عشوائياً، أوجد احتمال ما يلي:

	مشارك	غير مشارك
الثاني المتوسط	156	242
الثالث المتوسط	312	108

الشرط

أ) الطالب مشارك علماً بأنه في الصف الثاني الثانوي

$$P(B|A) = \frac{156}{242+156} = \frac{78}{199}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

الحادثة A اللي وقعت مكانها المقام عشان تشيل الحادثة $(A \cap B)$ اللي احتمال نوقع (خوفاً على سلامتها ♥)

نقدها لأن بينهم أشياء مشتركة ♥

علماً بأن ما احتمال

ملخص الدرس الرابع ...

الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية

التوافيق
(الترتيب غير مهم)

عدد حيزات الاحتمال المأخوذ C عدد كل الاحتمالات = ك

... ر C ر الفئة 2 × عدد حيزات الاحتمال المأخوذ من الفئة C عدد كل الفئة 1 = ب

مثل) اختار مسؤول متحف للفنون 4 لوحات بشكل عشوائي من بين 20 لوحة لعرضها في أحد المعارض. ما احتمال ان تكون 3 منها لفنان واحد يشارك بـ 8 لوحات في المتحف؟

ك = $_{20}C_4$

أ = $_{8}C_3 \cdot {}_{12}C_1$

$P(E) = \frac{أ}{ك} = \frac{{}_8C_3 \cdot {}_{12}C_1}{{}_{20}C_4} \approx 0.13$

التباديل
(الترتيب مهم)

! الاحتمالات = الاحتمالات كل P الاحتمالات كل = ك

الحلم الاحتمال المطلوب على هيئتهم واحتمالهم بالصورة الباقية = ب

مثل) دخلت طالبات صف وعددهم 26 الى ملعب المدرسة لتشكيل مجموعات للهتاف، ما احتمال ان تكون اول ثلاث طالبات ذكرت اسماؤهم جميعه وأمنه وحد يجبه على الترتيب؟

ك = $_{26}P_{26} = 26!$

ب = $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 23!$

$P(ب) = \frac{23!}{26!} = \frac{1}{15600}$

القيمة المتوقعة
(المتوسط الموزون للقيم في التوزيع الاحتمالي * يخبرنا بما يمكن حدوثه تجريبياً بعد محاولات كثيرة)

قانونه / $E(x) = x P(x)$

مثل) التوزيع الاحتمالي ادناه يوضح عدد الايام الممطرة في السنة لأحد الدول أوجد القيمة المتوقعة لعدد الايام الممطرة.

عدد الايام	0	1	2	3	4	5	6	7	8
الاحتمال	0.1	0.1	0.15	0.15	0.25	0.1	0.08	0.05	0.02

$E(x) = 0(0.1) + 1(0.1) + 2(0.15) + 3(0.15) + 4(0.25) + 5(0.1) + 6(0.08) + 7(0.05) + 8(0.02) = 3.34$

التوزيع الاحتمالي المنفصل
(جدول أو معادلة أو تمثيل بياني يربط بين كل قيم المتغير العشوائي x)

شروط / 1 كل قيم x محصورة بين 0 و 1.
2 مجموع كل احتمالات قيم x يساوي 1.

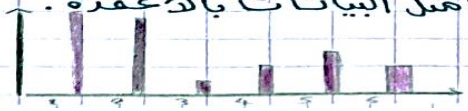
مثل) الجدول الآتي يبين نتائج مسح.

المصدر	الاحتمال
التلفاز	0.35
الجرائد	0.21
الراديو	0.02
الصحف	0.11
الانترنت	0.19
مصادر اخرى	0.02

a) هل يمثل توزيع احتمالي؟
$0.35 + 0.21 + 0.02 + 0.11 + 0.19 + 0.02 = 1$ ✓ نعم يمثل.

b) اختيار احد الذين شملهم المسح، ما احتمال ان يكون مصدر أخباره الرئيس الصحف او الانترنت؟
$P(E) = 0.11 + 0.19 = 0.3$

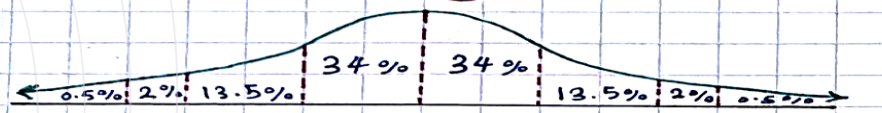
c) مثل البيانات بالأعمدة.



ملخص الدرس الخامس ...

التوزيع الطبيعي

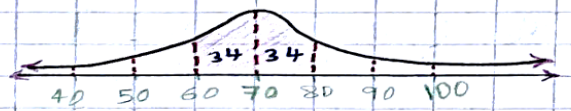
التوزيع الطبيعي



خصائصه:
- له منحنى يشبه الجرس + متماثل بالنسبة للوسط
- الوسط = الوسيط = المنوال ← كلهم بالمركز
- يقترب المنحنى من محور x ولا يمسه
- المساحة تحت المنحنى يساوي 1 أو 100%

مثل: اذا علمت أن كتل 100 موظف في شركة تتوزع توزيعاً "طبيعياً" بمتوسط حسابي مقداره 70 كيلوجراماً" وانحرافه المعياري 10 كيلوجراماً" فاعتمد على ذلك في الاجابة عن السؤالين الآتيين:

A) ما العدد التقريبي للموظفين الذين تقع كتلهم بين 60, 80 كيلو جراماً"؟

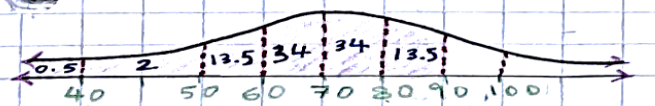


$P(60 < x < 80) = 34 + 34 = 68\%$

العدد = $\frac{68}{100} \times 100 = 68$ موظف

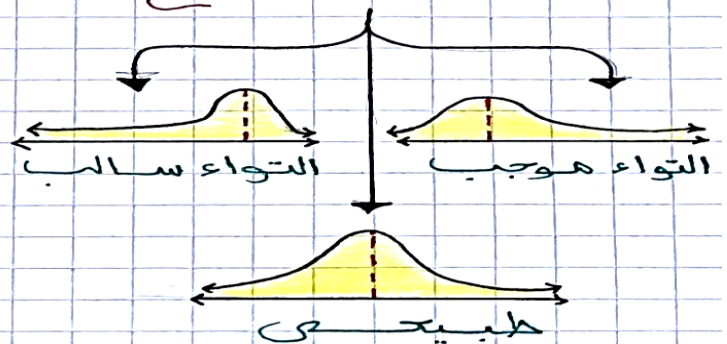
لتحويل النسبة إلى عدد عشري

B) ما احتمال أن يتم اختيار موظف بصورة عشوائية، وتكون كتلته أقل من 90 كيلوجراماً"؟



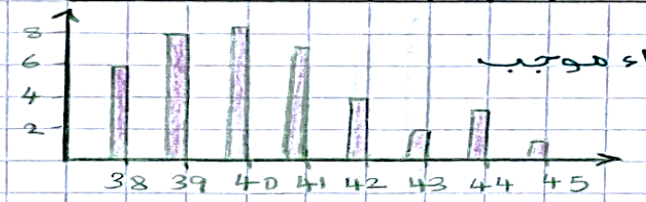
$P(x < 90) = 100\% - (2 + 0.5) = 97.5\%$

تصنيف بيانات التوزيع

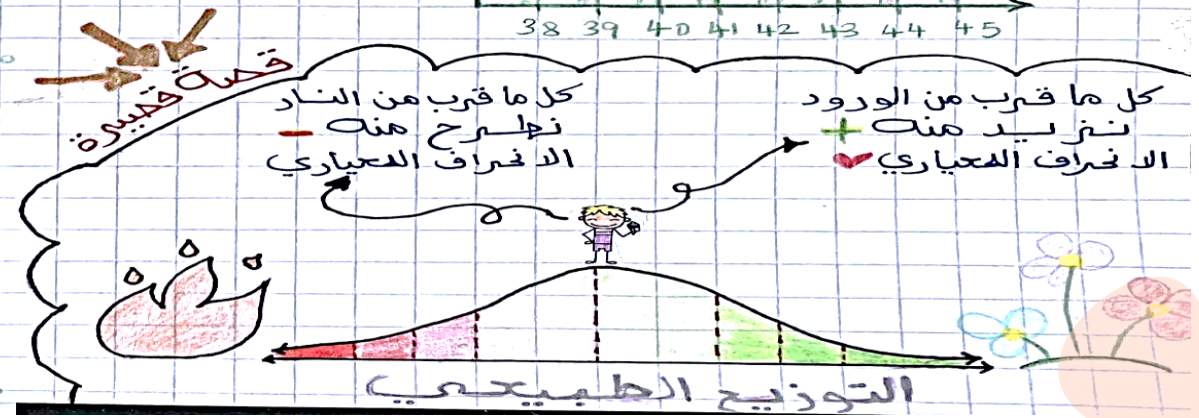


مثل: حدد هل البيانات في الجدول تمثل التواء موجب أم سالب أم طبيعي؟

قياس الحذاء	38	39	40	41	42	43	44	45
التكرار	6	8	9	7	4	2	3	1



∴ التواء موجب



ملخص الدرس السادس...

نهاية الوحدة..

التوزيعات ذات الحدين

تعيين التجربة ذات الحدين

شروطها/
- تعاد اجراء التجربه لعدد محدد (n) من المحاولات المستقلة.
- كل محاوله لها فقط نتيجتان نجاح (S) أو فشل (F).
- النجاح + الفشل = 1
- x هو المتغير العشوائي (عدد مرات النجاح في n من المحاولات).

مثل سألت 15 شخص عن اعمارهم، والمتغير العشوائي x يدل على أعمارهم لدى الأشخاص.

ليست تجربه ذات حدين لوجود أكثر من نتيجتان هو وقتان.

ألقيت قطعة نقد 20 مرة، والمتغير العشوائي x يدل على اعمار هؤلاء الأشخاص.

تجربة ذات حدين..

$n=20,\ P=\frac{1}{2},\ q=\frac{1}{2},\ x=0 \to 20$

التوزيع ذو الحدين

مثل كسب لاعب 50% من مبارياته التي لعبها خلال مسيرته الرياضية. ما احتمال ان يكسب 4 مباريات على الاقل من بين 5 مباريات قادمة؟

$n=5,\ P=0.5,\ q=0.5,\ x=(0,1,2,3,4,5)$

$(5,4,3,2,1,0)$

x	$P(x)$
4	$5C4\times(0.5)^4\times(0.5)^1=\frac{5}{32}$
5	$5C5\times(0.5)^5\times(0.5)^0=\frac{1}{32}$

$\therefore P(x\geq 4)=P(4)+P(5)$

$=\frac{5}{32}+\frac{1}{32}=\frac{6}{16}$

تقريب التوزيع ذي الحدين إلى توزيع طبيعي

(نستخدمه عندما يكون n كبير جداً)

شروط/ $np\geq 5,\ nq\geq 5$

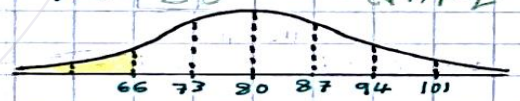
مثل أشارت دراسه سابقه الى أن 32% من اولياء الامور المستطلعة آراؤهم يرون انه يجب تقليل عدد ايام الدجازه الصيفيه للطلاب في نهاية العام الدراسي. غير أن آية ترى ان نسبة اقل من ذلك، ولذلك قامت باجراء دراسة مسحية شملت 250 من اولياء الامور اختارتهم بطريقة عشوائيه ممن استهدفتهم الدراسة السابقة. ما احتمال أن يرى اكثر من 65 من أولياء الامور وجوب تقليل عدد ايام الاجازه الصيفية؟

$n=250,\ P=0.32,\ q=0.68$

$np=80>5$

$nq=170>5$ ← يمكن التحويل الى توزيع طبيعي

$\mu=80 \quad \sigma=\sqrt{npq}=7.38\approx 7$



$\therefore P(x\leq 65)$

$=2+0.5=2.5\%$

(المتوسط) و(التباين) و(الانحراف المعياري) للتوزيع ذو الحدين

$\mu=np$

$\sigma^2=npq$

$\sigma=\sqrt{npq}$

مثل يدرس في احدى الكليات 48% من الطلاب لغة عالمية خلال سنة التخرج. اذا اختير 7 خريجين.

$n=7,\ P=0.48,\ q=0.52$

$\mu=7\times 0.48=3.36$

$\sigma^2=3.36\times 0.52=1.7472$

$\sigma=\sqrt{1.7472}\approx 1.3218$

AUTUMN SEASON

النهايات والاشتقاق

الفصل الرابع

إيجاد النهاية بيانيا

إيجاد النهاية جبريا

المماس والسرعة المتجهة

المشتقات

المساحة تحت المنحنى

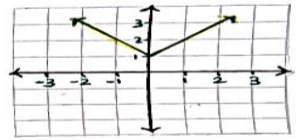
النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

ملخص الدرس الأول ...

إيجاد النهاية بيانياً

متصلة

مثل



بالاستعانة بالشكل أوجد نهاية كل مما يأتي:

1) $\lim_{x \to 1} = \lim_{x \to 1^+} = 2$

$\lim_{x \to 1^-} = 2$

$\therefore \lim_{x \to 1} = 2$

2) $\lim_{x \to 2} = \lim_{x \to 2^+} = 3$

$\lim_{x \to 2^-} = 3$

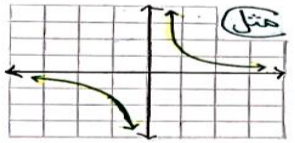
$\therefore \lim_{x \to 2} = 3$

3) $\lim_{x \to \pm\infty} = +\infty$

غير متصلة

لا نهائي

مثل



بالاستعانه بالشكل أوجد نهاية كل مما يأتي:

1) $\lim_{x \to 0} = \lim_{x \to 0^+} = +\infty$

$\lim_{x \to 0^-} = -\infty$

غ.م.

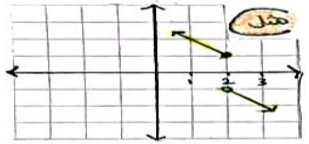
$\therefore \lim_{x \to 0}$ = غ.م.

اليمين ≠ اليسار

2) $\lim_{x \to \pm\infty} = 0$

قفزي (غير قابل للإزالة)

مثل



بالاستعانه بالشكل أوجد قيمة:

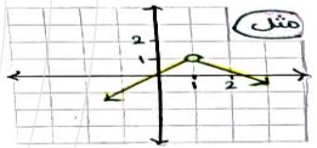
1) $\lim_{x \to 2} = \lim_{x \to 2^+} = -1$

$\lim_{x \to 2^-} = 1$

$\therefore \lim_{x \to 2}$ = غ.م.

نقطي (قابل للإزالة)

مثل



بالاستعانه بالشكل أوجد قيمة:

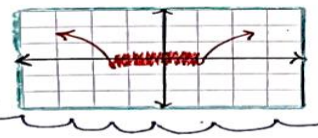
1) $\lim_{x \to 1} = \lim_{x \to 1^+} = 1$

$\lim_{x \to 1^-} = 1$

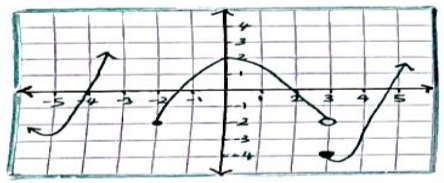
$\therefore \lim_{x \to 1} = 1$

إذا كانت متذبذبة فالنهاية غ.م.

مثل



سؤال الذكاء



$\lim_{x \to -4} = \lim_{x \to -4^+} = 0$

$\lim_{x \to -4^-} = 0$

$\therefore \lim_{x \to -4} = 0$

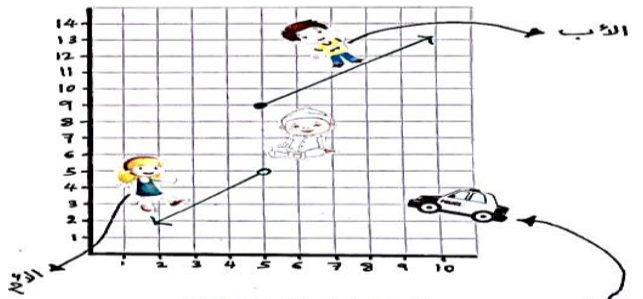
$\lim_{x \to 3} = \lim_{x \to 3^+} = -4$

$\lim_{x \to 3^-} = 2$

$\therefore \lim_{x \to 3}$ = غ.م.

قصة النهاية العظمى الغير موجودة

الطفل صناع ووالده يبحث عنه من الجهة اليمنى
وأوقفته نقطة كالجدار فلم يستطع الإلتقاء بطفله..
وكذلك مع أمه ولكن من الجهة اليسرى..
لذلك النهاية غير موجودة



لكن جت الشرطة ورجعت الطفل لوالديه

إيجاد النهاية جبرياً

النهاية عند عدد

التعويض المباشر = عدد

مثل

① $\lim_{x\to 2}(-x^3+1) = -2^3+1 = -7$

② $\lim_{x\to -5}\frac{x^2+2x+10}{x} = \frac{(-5)^2+2(-5)+10}{-5} = \frac{25}{-5} = +5$

التعويض المباشر = $\frac{0}{0}$

التحليل

إذا كان البسط أو المقام يحتوي على مربع كامل

مثل

① $\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{x^2-2x-8} = \frac{0}{0}$

$= \lim_{x\to -2}\frac{x+2}{(x+2)(x-4)}$

$= \lim_{x\to -2}\frac{1}{x-4}$

$= \frac{1}{-2-4} = \frac{-1}{6}$

انطباق البسط (المقام)

إذا كان الكسر يحتوي على جذر

مثل

① $\lim_{x\to 25}\frac{x-25}{\sqrt{x}-5} = \frac{0}{0}$

$\to \frac{x-25}{\sqrt{x}-5}\cdot\frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+5}$

$= \frac{(x-25)(\sqrt{x}+5)}{x-25}$

$= \sqrt{x}+5$

$\to \lim_{x\to 25}\sqrt{x}+5$

$= \sqrt{25}+5$

$= 10$

قاعدة لوبيتال

لجميع الحالات

* الطريقة: اشتقاق البسط والمقام كل حد لوحده ثم إجراء التعويض المباشر مره أخرى.

مثل

① $\lim_{x\to -4}\frac{x^2-x-20}{x+4} = \frac{0}{0}$

$\to \frac{2x-1-0}{1+0}$ ← بالاشتقاق كل حد لوحده

$\to \lim_{x\to -4}(2x-1) = -9$

النهاية عند $\pm\infty$

كثيرة حدود

التعويض بالحد ذو أكبر أس

مثل

① $\lim_{x\to\infty}(-x^3-4x^2+9)$

$= \lim_{x\to\infty} -x^3$

$= -(\infty)^2$

$= -\infty$

كسرية

$\lim_{x\to\pm\infty}$ (الحد ذو أكبر أس في البسط) / (الحد ذو أكبر أس في المقام)

ثم التبسيط وأخيراً التعويض المباشر مره أخرى

مثل

① $\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^4+7}{5x^2+1}$

$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^4}{5x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^2}{5}$

$= \frac{-3(-\infty)^2}{5}$

$= \frac{-3(\infty)}{5} = -\infty$

SAVE your TIME! طريقة مختزلة للدوال الكسرية

درجة البسط أكبر من درجة المقام

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$

درجة البسط = درجة المقام

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{\text{معامل اكبر اس في البسط}}{\text{معامل اكبر اس في المقام}}$

درجة البسط أقل من درجة المقام

$\lim_{x\to(\pm\infty)} f(x) = \frac{\text{اشارة معامل اكبر اس في البسط}}{\text{اشارة معامل اكبر اس في المقام}}$ $(\pm\infty)^{\text{المقام - البسط}}$

المماس والسرعات المتجهة

المطلوب:
- ميل المماس
- السرعة المتجهة
- السرعة المتجهة اللحظية
- ميل المنحنى
- معدل التغير اللحظي

⇓

إيجاد المشتقة الأولى

①

المطلوب:
- السرعة المتوسطة
- معدل التغير

⇓

إيجاد $\frac{\text{فرق } y}{\text{فرق } x}$

②

المطلوب:
- الإرتفاع

⇓

الإرتفاع الإبتدائي

⇓

التعويض في الدالة $f(x)$ عند $t=0$.

③

أقصى وأدنى إرتفاع (القيم العظمى والصغرى للدالة)

⇓

① إيجاد المشتقة.
② إيجاد أصفار المشتقة $f'(x)=0$.
③ التعويض بالقيم الناتجة من ② في الدالة $f(x)$.
← أكبر قيمة = القيمة العظمى
أصغر قيمة = القيمة الصغرى

④

المطلوب:
- الزمن

الزمن في البداية ⇓ وضع $f(x)=0$ وإيجاد t.

الزمن اللازم للوصول لأقصى إرتفاع ⇓
① إيجاد المشتقة
② إيجاد أصفار المشتقة عن طريق $f'(x)=0$
③ التعويض بالقيم الناتجة في الدالة $f(x)$.
④ t عند أكبر ناتج هي زمن أقصى إرتفاع.

⑤

مثلة/ تمثل المعادلة $f(x)=5+65t-16t^2$ الإرتفاع بالأقدام بعد t ثانية لبالون يحمد رئيساً.

① ماهو معدل التغير اللحظي للدالة $f(x)$ بعد 2s.

$f'(t)=65-32t$

$f'(2)=65-32(2)$

$=65-64 \quad =1$

② ماالسرعة المتوسطة المتجهة للبالون بين $t=1s$ و $t=2s$؟

$f(1)=5+65(1)-16(1)^2=54$ ، $f(2)=5+65(2)-16(2)^2=71$

السرعة المتوسطة $=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{71-54}{2-1}=17$

③ ماهو الارتفاع الابتدائي للبالون؟

الإرتفاع الابتدائي ← $t=0$

$\therefore f(0)=5+65(0)-16(0)^2=5ft$

④ ماأقصى إرتفاع يصله البالون؟

① $f'(t)=0+65-16(2)t' = 65-32t$

② $65-32=0 \iff t=\frac{-65}{-32}\approx 2.03$

③ $f(2.03)=5+65(2.03)-16(2.03)^2=71.01564ft$

⑤ ماهو الزمن اللازم للوصول لأقصى إرتفاع؟

من السؤال ④ ← $t=2.03s$

ملخص الدرس الرابع...

المشتقات

(أس المطلوب ينزل معامل ويطرح منه 1)

* إذا كان الأس سالب يزيد مع اشاره سالبه.

مشتقة كثيرة الحدود

(إن لم تكن أسيه نحولها كذلك)

مثل أوجد مشتقة كل دالة:

① $K(x) = \sqrt{x^3}$

$x^{\frac{3}{2}} \rightarrow \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1}$

$= \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}$

$K'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

② $f(x) = x^9$

$f'(x) = 9x^8$

③ $f(x) = \frac{1}{x}$

$\rightarrow x^{-1} = -x^{-1-1}$

$= -x^{-2}$

$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$

مشتقة الضرب

$f \cdot g = f' \cdot g + f \cdot g'$

مثل أوجد المشتقة:

$g(x) = (3x^4+2x)(5-3x)$

$\rightarrow 12x^3 + 2(5-3x) + [(-3)(3x^4+2x)]$

$= 60x^3 - 36x^4 + 10 - 6x - 9x^4 - 6x$

$= -45x^4 + 60x^3 - 12x + 10$

مشتقة القسمة

$\frac{f}{g} = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

مثل أوجد المشتقة:

$K(x) = \frac{6x}{2x^2+4}$

$\rightarrow \frac{2(3x)}{2(x^2+2)}$

$= \frac{3(x^2+2) - [3x(2x)]}{(x^2+2)^2}$

$= \frac{3x^2+6-6x^2}{(x^2+2)^2}$

$= \frac{-3x^2+6}{(x^2+2)^2}$

مشتقة دالة عند أي نقطة

$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

مثل إذا كانت $f(x) = 9 - x^3$ فإن $\lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$ تساوي:

$f(x) = 9 - x^3$

$f'(x) = -3x^2$

$f'(-2) = -3(-2)^2$

$= -12$

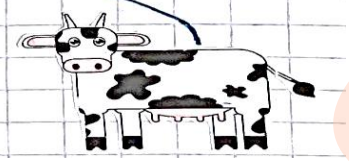
مشتقة الحد الثابت = صفر

المشتقة: السرعة المتجهة اللحظية، ميل مماس المنحنى، معادلة ميل المنحنى، معدل التغير اللحظي

المشتقة / $f', f'', f''', \ldots$

أشتق على عدد مرات المشتقة المطلوبة

المشتقة



ملخص الدرس الخامس...

المساحة تحت المنحنى والتكامل

المساحة تحت منحنى باستخدام مستطيلات

عرض المستطيل

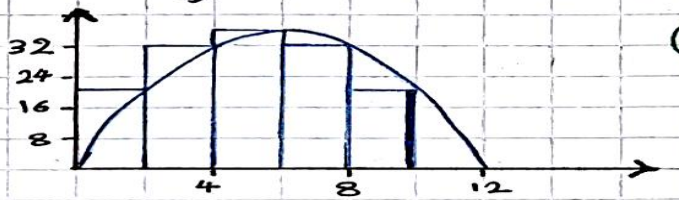
عرض المستطيل = $\frac{\text{نهاية الفترة} - \text{بداية الفترة}}{\text{عدد المستطيلات}} = \frac{b-a}{n}$

حدود الفترة

المساحة الكلية

(التعويض بكل قيم الفترة في الدالة ثم جمعهم)

مثل:



بالاستعانة بالشكل المقابل أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى $f(x) = -x^2 + 12x$ ومحورة على الفترة $[0, 12]$ باستخدام 6 مستطيلات يساوي تقريباً؟

① عرض المستطيل $= \frac{12-0}{6} = 2$

② المساحة الكلية:

$f(2) = -(2)^2 + 12(2) = 20$
$f(4) = -(4)^2 + 12(4) = 32$
$f(6) = -(6)^2 + 12(6) = 36$
$f(8) = -(8)^2 + 12(8) = 32$
$f(10) = -(10)^2 + 12(10) = 20$
$f(12) = -(12)^2 + 12(12) = 0$

$A = 2 \times (20 + 32 + 36 + 32 + 20 + 0)$

$= 280$

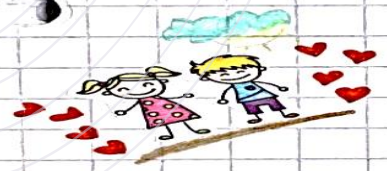
التكامل المحدد (مجموع ريمان الأيمن)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x$$

صيغ المجموع

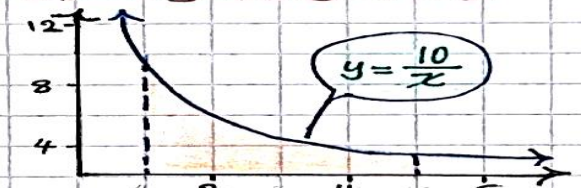
$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{i=1}^{n} c = cn$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$



المساحة تحت المنحنى باستخدام الأطراف اليمنى واليسرى للمستطيلات

مثل:



باستخدام الطرفين الأيمن والأيسر لمستطيلات عددها 4 وعرض كل منها وحدة واحدة، فإن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x، في الفترة $[1, 5]$ تساوي:

عرض المستطيل $= \frac{5-1}{4} = 1$

الأيسر

$f(1) = \frac{10}{1} = 10$
$f(2) = \frac{10}{2} = 5$
$f(3) = \frac{10}{3} = \frac{10}{3}$
$f(4) = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

الأيمن

$f(2) = \frac{10}{2} = 5$
$f(3) = \frac{10}{3} = \frac{10}{3}$
$f(4) = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$
$f(5) = \frac{10}{5} = 2$

مجموعهم

$\therefore A = \frac{\frac{101}{3}}{2} = \frac{101}{6}$

Finally!

ملخص الدرس السادس...

نهاية الوحدة..

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

الدالة الأصلية
(تخفيف على الأس واحد ثم ينزل الأس كمقام.)

مثل أوجد الدوال الأصلية:

1) $f(x)=4x^7$

$F(x)=\frac{4x^8}{8}$

$=\frac{1}{2}x^8+C$

2) $f(x)=8x^7+6x+2$

$F(x)=\frac{8x^8}{8}+\frac{6x^2}{2}+2x+C$

$=x^8+x^2+2x+C$

3) $f(x)=\frac{10}{x^3}=10x^{-3}$

$F(x)=\frac{10x^{-2}}{-2}=\frac{10}{-2}x^{-2}$

$=\frac{-10}{x^2}+C$

4) $f(x)=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$

$F(x)=\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}=\frac{x^{4/3}}{4/3}$

$=\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+C$

التكامل غير المحدد

$\int f(x)\,dx=F(x)+C$

مثل أوجد التكامل:

1) $\int(6x^2+8x-3)\,dx$

$=\frac{6x^3}{3}+\frac{8x^2}{2}-\frac{3x^1}{1}+C$

$=2x^3+4x^2-3x+C$

2) $\int x^2\,dx$

$\rightarrow \frac{x^3}{3}+C$

نخفيف c إذا كان التكامل غير محدود.

التكامل المحدد

$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$

مثل أوجد التكامل:

1) $\int_2^5 3x^2\,dx$

$=\frac{3x^3}{3}=x^3\Big|_2^5$

$=5^3-2^3=117$

2) $\int_1^3 x^2\,dx$

$=\frac{x^3}{3}\Big|_1^3$

$=\left[\frac{(3)^3}{3}\right]-\left[\frac{(1)^3}{3}\right]$

$=\frac{26}{3}$

سؤال الذكاء

إذا كان $\int_0^2 Kx\,dx=6$، فما قيمة K؟

$\int_0^2 3x \rightarrow \frac{3x^2}{2}\Big|_0^2$

$=\frac{3(2)^2}{2}=6$

$\therefore K=3$

Ⓐ 1 Ⓑ 2 Ⓒ 3 Ⓓ 4

$F(x)$ ⟷ الدالة الاصلية

$f'(x)$ ⟷ المشتقة الأولى

المراجع

موقع بوابة عين

ماجروهيل – رياضيات 6 – وزارة التعليم ، مجموعة العبيكان للاستثمار – المملكة العربية السعودية (2008)

مراجعة الكتاب : هدى عبدالله الغفيص

الفهرس

رؤية مجموعة رفعة الرياضيات	٣
المقدمة	٤
الأقسام	٥
الفصل الأول/ المتجهات	٦
الفصل الثاني/ الإحداثيات القطبية والديكارتية	١٣
الفصل الثالث/ الإحصاء	١٨
الفصل الرابع/ النهايات والاشتقاق	٢٦
المراجع	٣٤

للعودة إلى الأقسام . اضغط هنا