الفصل 6

المتتابعات والمتسلسلات
Sequences and Series

فيما سبق:

درست الأنماط الجبرية، والمتتابعات الحسابية بوصفها دوالّ خطية.

والآن:

- أستعمل المتتابعات والمتسلسلات الحسابية والهندسية.
- أجد مفكوك القوى باستعمال نظرية ذات الحدَّين.
- أبرهن جملًا رياضية باستعمال الاستقراء الرياضي.

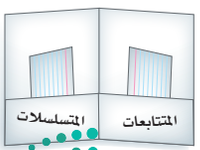
لماذا؟

بذور: تظهر المتتابعات بأشكال شتَّى، وطرائق مدهشة، كما في بعض البذور والأزهار والفواكه والخضراوات، فمثلًا تظهر متتابعة فيبوناشي الشهيرة في بذور تبّاع الشمس، بحيث يتكوّن الشكل الحلزوني المعروف بدوّامة فيبوناشي.

المطويات منظِّم أفكار

المتتابعات والمتسلسلات: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول المتتابعات والمتسلسلات، مبتدئًا بورقة واحدة A4.

1. **اطوِ** الورقة من المنتصف كما في الشكل.
2. **أعد** الورقة إلى وضعها ثم اطوِ الجانب الأطول بمقدار $5\ \text{cm}$ لعمل جيبٍ كما في الشكل.
3. **ألصق** الطرفين لعمل الجيب.
4. **ضع** عنوانًا لكل جانب كما في الشكل، استعمل أوراقًا أو بطاقات لتسجيل الملاحظات والأمثلة.



وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

التهيئة للفصل السادس

أجب عن الاختبار الآتي، وارجع إلى "المراجعة السريعة"؛ لمساعدتك على ذلك.

اختبار سريع

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية: (تستعمل مع الدروس 1-6 إلى 3-6)

1) $-6 = 7x + 78$

2) $768 = 3x^4$

3) $23 - 5x = 8$

4) $2x^3 + 4 = -50$

5) **نباتات:** يريد أحمد أن يزرع 48 شتلة ورد في حديقته، بحيث يزرع في أحد جزأيها 12 شتلة، وفي الجزء الثاني يزرع كل أربع شتلات من الشتلات المتبقية في صف واحد. فما عدد الصفوف التي سيزرعها؟

مثّل كلًّا من الدوالّ الآتية بيانيًّا: (تستعمل مع الدروس 1-6 إلى 4-6)

6) $\{(1, 3), (2, 5), (3, 7), (4, 9), (5, 11)\}$

7) $\{(1, -15), (2, -12), (3, -9), (4, -6), (5, -3)\}$

8) $\left\{(1, 27), (2, 9), (3, 3), (4, 1), \left(5, \frac{1}{3}\right)\right\}$

9) $\left\{(1, 1), (2, 2), \left(3, \frac{5}{2}\right), \left(4, \frac{11}{4}\right), \left(5, \frac{23}{8}\right)\right\}$

10) **حضانة:** تبلغ المصروفات الشهرية لإحدى دور الحضانة 14000 ريال، وتتقاضى الدار عن كل طفل 1000 ريال شهريًّا. والمعادلة $P(c) = 1000c - 14000$ تعبّر عن ربح الحضانة الشهري عندما تضمُّ c طفلًا. فما ربح الحضانة الشهري عندما يكون فيها 30 طفلًا؟

أوجد قيمة كلٍّ من العبارات الآتية عند قيم المتغيّرات المُعطَاة. (تستعمل مع الدروس 1-6 إلى 4-6)

11) $\frac{a}{3}(b + c)$ إذا كان $a = 9, b = -2, c = -8$

12) $r + (n - 2)t$ إذا كان $r = 15, n = 5, t = -1$

13) $x \cdot y^{z+1}$ إذا كان $x = -2, y = \frac{1}{3}, z = 5$

14) $\frac{a(1 - bc)^2}{1 - b}$ إذا كان $a = -3, b = -4, c = 1$

مراجعة سريعة

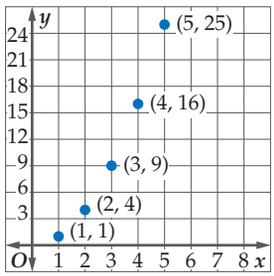
مثال 1

حُلّ المعادلة: $25 = 3x^3 + 400$

$25 = 3x^3 + 400$	المعادلة الأصلية
$-375 = 3x^3$	اطرح 400 من الطرفين
$-125 = x^3$	اقسم الطرفين على 3
$\sqrt[3]{-125} = \sqrt[3]{x^3}$	خُذ الجذر التكعيبي للطرفين
$-5 = x$	بسّط

مثال 2

مثّل الدالّة: $\{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25)\}$ بيانيًّا. ثم حدِّد كلًّا من المجال والمدى.



مجال الدالّة هو القيم الممكنة جميعها للمتغيّر المستقل (x). لذلك يكون مجال الدالّة هو المجموعة: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. أمّا مدى الدالّة فهو القيم الممكنة جميعها للمتغيّر التابع (y) إذن مدى الدالّة هو المجموعة: $\{1, 4, 9, 16, 25\}$.

مثال 3

إذا كانت $y = -3$ ، $x = -2$ ، فأوجد قيمة: $2 \cdot 3^{x+y}$

$2 \cdot 3^{x+y} = 2 \cdot 3^{-2+(-3)}$	عوّض
$= 2 \cdot 3^{-5}$	بسّط
$= \frac{2}{3^5} = \frac{2}{243}$	تعريف القوّة السالبة

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

6-1

المتتابعات بوصفها دوالّ
Sequences as Functions

فيما سبق:
درست الدوالّ الخطية والدوالّ الأسيّة. (مهارة سابقة)

والآن:
- أتعرّف المتتابعة الحسابية باعتبارها دالّة خطية.
- أتعرّف المتتابعة الهندسية باعتبارها دالّة أُسّية.

المفردات:
- المتتابعة sequence
- الحدّ term
- المتتابعة المنتهية finite sequence
- المتتابعة غير المنتهية infinite sequence
- المتتابعة الحسابية arithmetic sequence
- أساس المتتابعة الحسابية (الفرق المشترك) common difference
- المتتابعة الهندسية geometric sequence
- أساس المتتابعة الهندسية (النسبة المشتركة) common ratio

لماذا؟

خلال أحد المهرجانات الكشفية، دخل المشاركون إلى الملعب في صفوف، بحيث كان عدد الأفراد في كلِّ صفٍّ كما يأتي: مشارك واحد في الصفِّ الأول، وثلاثة في الصفِّ الثاني، وخمسة في الصفِّ الثالث، وهكذا تستمر أعداد المشاركين على هذا النمط.

المتتابعات الحسابية: **المتتابعة** مجموعة من الأعداد مرتّبة في نمطٍ محدّدٍ أو ترتيب معين، ويُسمّى كلُّ عدد في المتتابعة **حدًّا**.

ويمكن للمتتابعة أن تكون **منتهية** أي لها عدد محدّد من الحدود مثل: $-2, 0, 2, 4, 6$، أو **غير منتهية**، حيث تستمر إلى مالانهاية مثل ... $0, 1, 2, 3,$. ويُرمز للحدّ الأول في المتتابعة بالرمز a_1، وللحدّ الثاني بالرمز a_2، وهكذا.

مفهوم أساسي — **المتتابعات بوصفها دوالّ**

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: المتتابعة دالّة مجالها مجموعة الأعداد الطبيعية أو مجموعة جزئية منها، ومداها مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية.

الرموز:

عناصر المجال:	1 2 3 ... n	ترتيب الحدّ
عناصر المدى:	a_1 a_2 a_3 ⋯ a_n	حدود المتتابعة

أمثلة:

متتابعة منتهية	متتابعة غير منتهية
3, 6, 9, 12, 15	3, 6, 9, 12, 15, ...
المجال: {1, 2, 3, 4, 5}	المجال: مجموعة الأعداد الطبيعية جميعها
المدى: {3, 6, 9, 12, 15}	المدى: مجموعة المضاعفات الطبيعية للعدد 3

يُحدّد كلُّ حدّ في **المتتابعة الحسابية**، بإضافة قيمة ثابتة إلى الحدّ الذي يسبقه مباشرة. وتُسمَّى القيمة الثابتة **الفرق المشترك** أو **الأساس**. فالمتتابعة: 3, 6, 9, 12, 15 هي متتابعة حسابية؛ لأن لحدودها فرقًا مشتركًا (ثابتًا) حيث يزيد كلُّ حدٍّ على الحدّ الذي يسبقه بمقدار 3 .

3 (+3) 6 (+3) 9 (+3) 12 (+3) 15

مثال 1 — **تحديد المتتابعة الحسابية**

بيِّن ما إذا كانت كلّ من المتتابعتين الآتيتين حسابية أم لا:

a) $5, -6, -17, -28, \ldots$

b) $-4, 12, 28, 42, \ldots$

تحقق من فهمك

1A) $7, 12, 16, 20, \ldots$

1B) $-6, 3, 12, 21, \ldots$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

يمكنك استعمال أساس المتتابعة الحسابية لإيجاد حدودها.

مثال 2 تمثيل المتتابعة الحسابية بيانيًّا

في المتتابعة الحسابية: ... ,18, 14, 10

a) أوجد الحدود الأربعة التالية في هذه المتتابعة.

الخطوة 1:

الخطوة 2:

b) مثّل الحدود السبعة الأولى من المتتابعة بيانيًّا.

تحقق من فهمك

2) أوجد الحدود الأربعة التالية في المتتابعة الحسابية ... ,18, 11, 4
ثم مثّل الحدود السبعة الأولى بيانيًّا.

إرشادات للدراسة

أساس المتتابعة الحسابية

هو الفرق بين كلّ حدّين متتاليين (الحدّ – سابقه) ابتداءً من الحدّ الثاني .

لاحظ أن النقاط التي تُمثّل حدود المتتابعة الحسابية تقع على مستقيم واحد، ممّا يعني أن المتتابعة الحسابية هي دالّة خطية مجالها أو متغيّرها المستقل هو رقم الحدّ n، ومداها أو متغيّرها التابع هو الحدّ a_n، والميل هو أساسها الذي هو الفرق الثابت.

مثال 3 من واقع الحياة إيجاد حدود المتتابعة الحسابية

المهرجانات الكشفية: بالعودة إلى بداية الدرس. أوجد عدد المشاركين الموجودين في الصف الرابع عشر.

افهم:

خطّط:

حُلّ:

تحقّق:

تحقق من فهمك

3) نقود: ادّخر عامل في يوم ما 20 ريالًا من أجره اليومي، فإذا علمت أنه يدّخر كل يوم 5 ريالات زيادة على اليوم السابق، فكم ريالًا يدّخر في اليوم الثاني عشر؟

الربط بالحياة

في أغلب الاحتفالات العسكرية، يقوم المنظّمون بعمل ترتيبات خاصّة عند الافتتاح، ومنها على سبيل المثال دخول الفرق بطرق مختلفة.

وزارة التعليم
Ministry of Education

المتتابعة الهندسية : **المتتابعة الهندسية** نوع آخر من المتتابعات، ويمكن الحصول على أيِّ حدٍّ من حدودها بضرب الحدّ السابق له مباشرة في عدد ثابت يُسمّى **أساس المتتابعة الهندسية** أو **النسبة المشتركة** للمتتابعة.

لاحظ أن المتتابعة $\frac{1}{16}, \frac{1}{4}, 1, 4, 16$ متتابعة هندسية؛ لأن النسبة بين كل حدّ والحدّ السابق له مباشرة هي نسبة ثابتة، أيْ أنَّ كلَّ حدّ في المتتابعة هو 4 أمثال الحدّ السابق له مباشرة.

$$\frac{1}{16} \xrightarrow{\times 4} \frac{1}{4} \xrightarrow{\times 4} 1 \xrightarrow{\times 4} 4 \xrightarrow{\times 4} 16$$

تنبيه!

النسب

إذا وجدت نسبة أحد الحدود إلى الحدّ السابق له، فأوجد بقية النسب بالطريقة نفسها.

إرشادات للدراسة

أساس المتتابعة الهندسية

هو النسبة بين كل حدّين متتاليين، الحدّ ÷ سابقه ابتداءً من الحدّ الثاني.

مثال 4 تحديد المتتابعة الهندسية

بيِّن ما إذا كانت كلٌّ من المتتابعتين الآتيتين هندسية أم لا:

a) $-2, 6, -18, 54, \ldots$

b) $8, 16, 24, 32, \ldots$

تحقق من فهمك

4A) $-8, 2, -0.5, 0.125, \ldots$

4B) $1, 3, 7, 15, \ldots$

يمكنك استعمال أساس المتتابعة الهندسية (النسبة المشتركة) لإيجاد حدود أخرى من حدود المتتابعة.

مثال 5 تمثيل المتتابعة الهندسية بيانيًّا

المتتابعة: $\ldots, 2, 8, 32$ متتابعة هندسية.

a) أوجد الحدود الثلاثة التالية في هذه المتتابعة.

الخطوة 1:

الخطوة 2:

b) مثّل الحدود الستة الأولى في المتتابعة بيانيًّا.

تحقق من فهمك

5) أوجد الحدّين التاليين في المتتابعة الهندسية: $\ldots, 7, 21, 63$ ، ثم مثّل الحدود الخمسة الأولى بيانيًّا.

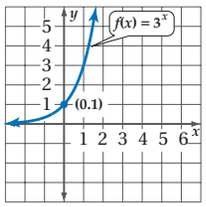
وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

تفحَّص الشكل في المثال 5. تلاحظ أن التمثيل البياني للمتتابعة الهندسية أسّيٌّ وليس خطيًّا كما في المتتابعة الحسابية، وبالتالي فإنه يمكن تمثيل المتتابعة الهندسية بوصفها دالّة أسّية في الصورة $f(x) = r^x$، حيث r أساس المتتابعة الهندسية، و $r > 0$ و $r \neq 1$

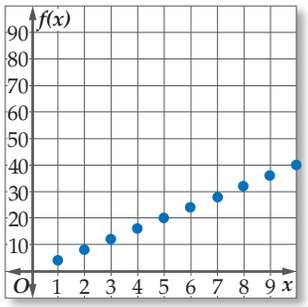
إرشادات للدراسة

الدالّة الأسّية

هي الدالّة التي تكون على الصورة $f(x) = b^x$، حيث $b > 0$, $b \neq 1$، وهي متصلة ومتباينة، ومجالها مجموعة الأعداد الحقيقية، ومداها مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة، ولها خطٌّ تقارب أفقي هو المحور x، ويمرُّ منحناها بالنقطة $(0, 1)$ دائمًا، فمثلًا $f(x) = 3^x$ دالّة أسّيّة تمثيلها البياني هو

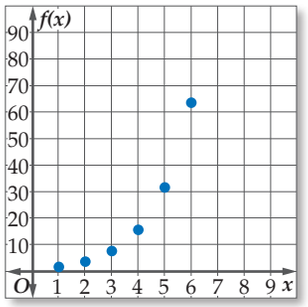


حسابية



x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40

هندسية



x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2	4	8	16	32	64

ويمكنك استعمال خصائص المتتابعات الحسابية والمتتابعات الهندسية في تصنيف المتتابعات.

مثال 6 تصنيف المتتابعات

حدّد نوع المتتابعة في كلٍّ مما يأتي، هل هي حسابية، أم هندسية، أم غير ذلك. ووضّح إجابتك:

a) $16, 24, 36, 54, \ldots$

b) $1, 4, 9, 16, \ldots$

c) $23, 17, 11, 5, \ldots$

تحقق من فهمك

6A) $\frac{5}{3}, 2, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, \ldots$ **6B)** $2, -\frac{3}{2}, \frac{9}{8}, -\frac{27}{32}, \ldots$ **6C)** $-4, 4, -5, 5, \ldots$

تأكد

مثال 1 بيِّن ما إذا كانت كلّ متتابعة فيما يأتي متتابعة حسابية أم لا.

1) $8, -2, -12, -22, \ldots$ **2)** $-19, -12, -5, 2, 9$

مثال 2 أوجد الحدود الأربعة التالية في كلٍّ من المتتابعتين الحسابيتين الآتيتين، ثم مثّل الحدود السبعة الأولى بيانيًّا:

3) $6, 18, 30, \ldots$ **4)** $15, 6, -3, \ldots$

مثال 3 **5)** **توفير:** يوفِّر سعيد 250 ريالًا شهريًّا، فإذا كان معه 1000 ريال في البداية، فأوجد ما يلي:

a) المبلغ الذي سيصبح معه بعد مرور 8 أشهُرٍ.

b) الوقت الذي يحتاج إليه ليصبح معه 7250 ريالًا، إذا استمر في التوفير بالطريقة ذاتها.

مثال 4 بيّن ما إذا كانت المتتابعة في كلٍّ مما يأتي متتابعة هندسية أم لا:

6) $4, 12, 36, 108, \ldots$ **7)** $7, 14, 21, 28, \ldots$

مثال 5 أوجد الحدود الثلاثة التالية في كلٍّ من المتتابعات الهندسية الآتية، ثم مثّل الحدود السبعة الأولى بيانيًّا:

8) $250, 50, 10, 2, \ldots$ **9)** $9, -3, 1, -\frac{1}{3}, \ldots$

مثال 6 حدّد نوع المتتابعة في كلٍّ مما يأتي، هل هي حسابية، أم هندسية، أم غير ذلك. ووضّح إجابتك:

10) $5, 1, 7, 3, 9, \ldots$ **11)** $200, -100, 50, -25, \ldots$ **12)** $12, 16, 20, 24, \ldots$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 بيّن ما إذا كانت كل متتابعة فيما يأتي متتابعة حسابية أم لا.

13) $-9, -3, 0, 3, 9, \ldots$ **14)** $\frac{2}{9}, \frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{11}{9}, \ldots$

مثال 2 أوجد الحدود الأربعة التالية في كلٍّ من المتتابعات الحسابية الآتية، ثم مثّل الحدود السبعة الأولى بيانيًّا:

15) $-5, -11, -17, -23, \ldots$ **16)** $\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{7}{5}, \ldots$ **17)** $\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, \ldots$

مثال 3 **18)** **تنظيم قاعات:** يوجد 28 مقعدًا في الصف الأول في إحدى قاعات المحاضرات، وعدد المقاعد في كلِّ صفٍّ تالٍ يزيد بمقدار مقعدين عن الصف السابق. إذا كان في هذه القاعة 24 صفًّا من المقاعد، فكم مقعدًا يوجد في الصف الأخير؟

19) **تمارين قوة:** يقوم عليٌّ ببعض التمارين الرياضية لاستعادة لياقته البدنية. ويُخطّط لاستعمال أحد الأجهزة الرياضية مدَّة 5 دقائق في اليوم الأول، ثم زيادة مدَّة الاستعمال بمعدَّل دقيقة وثلاثين ثانية يوميًّا.

a) ما مدَّة استعمال عليٍّ للجهاز في اليوم الثامن عشر؟

b) ما أول يوم سيستعمل فيه الجهاز مدَّة ساعة أو أكثر؟

c) هل يُعدّ استمرار عليٍّ في هذا النمط إلى مالا نهاية منطقيًّا؟ لماذا؟

مثال 4 بيِّن ما إذا كانت المتتابعة في كلٍّ مما يأتي متتابعة هندسية أم لا:

20) $21, 14, 7, \ldots$ **21)** $-27, 18, -12, \ldots$ **22)** $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 1, -\frac{1}{2}, \ldots$

مثال 5 أوجد الحدود الثلاثة التالية في كلٍّ من المتتابعات الهندسية الآتية، ثم مثّل الحدود السبعة الأولى بيانيًّا:

23) $81, 108, 144, \ldots$ **24)** $\frac{1}{3}, 1, 3, 9, \ldots$ **25)** $1, 0.1, 0.01, 0.001, \ldots$

مثال 6 حدد نوع المتتابعة في كلٍّ مما يأتي، هل هي حسابية، أم هندسية، أم غير ذلك. ووضّح إجابتك:

26) $3, 12, 27, 48, \ldots$ **27)** $1, -2, -5, -8, \ldots$

28) $12, 36, 108, 324, \ldots$

29) $-\frac{2}{5}, -\frac{2}{25}, -\frac{2}{125}, -\frac{2}{625}, \ldots$

30) $\frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \ldots$

31) $6, 9, 14, 21, \ldots$

32) قراءة: أرادت ندى إتمام قراءة كتاب يضمُّ 800 صفحة خلال العطلة الصيفية. فإذا قرأت 112 صفحة حتى بداية العطلة، وأرادت إنهاء قراءة الكتاب في 8 أيام، فما عدد الصفحات التي عليها قراءتها يوميًّا، إذا كانت تقرأ العدد نفسه من الصفحات يوميًّا؟

33) نقص القيمة: تنقص قيمة سيَّارة ماجد بمعدل 15% سنويًّا. إذا كانت القيمة الحالية لسيارته 50000 ريال، فكم تكون قيمتها بعد 5 سنوات مقرّبًا الجواب إلى أقرب ريال؟

34) طيُّ الأوراق: عند طيِّ ورقة على نفسها، يتضاعف سُمكُها. فإذا كان سُمك ورقة 0.1 mm، وأمكن طيُّها 37 مرَّة، فكم يصبح سمكها؟

الربط بالحياة

تنقص قيمة السيارة عادة بمعدَّل 15% إلى 20% سنويًّا؛ وذلك اعتمادًا على نوع السيارة وعلى السائق.

مسائل مهارات التفكير العليا

35) تحدٍّ: إذا كان مجموع ثلاثة حدود متتالية في متتابعة حسابية يساوي 6، وحاصل ضربها يساوي -42، فما هذه الحدود؟

36) مسألة مفتوحة: أوجد ثلاث متتابعات تبدأ كلٌّ منها كما يأتي $3, 9, \ldots$. بحيث تكون إحداها حسابية، والثانية هندسية، والثالثة لا حسابية ولا هندسية.

37) تبرير: إذا كان أساس متتابعة هندسية يساوي r حيث $|r| < 1$، فماذا يحدث لحدود المتتابعة عندما تزداد قيمة n؟ ما الذي يحدث للحدود إذا كانت $|r| \geq 1$؟

38) اكتب: صِفْ ما يحدث لحدود متتابعة هندسية عندما يصبح أساسها مثلَي قيمته، وما يحدث للحدود عندما يصبح الأساس نصف قيمته؟ وضّح إجابتك.

تدريب على اختبار

39) إجابة قصيرة: صالة مستطيلة الشكل بُعدَاها 13 مترًا، و11 مترًا. أردنا وضع سجادة تغطِّيها كاملة، فأوجد سعر السجادة إذا كان سعر المتر المربع الواحد منها 60 ريالًا.

40) ما الحدّ التالي في المتتابعة الهندسية التالية:

$8, 6, \frac{9}{2}, \frac{27}{8}, \ldots$ ؟

A $\frac{11}{8}$ **B** $\frac{27}{16}$ **C** $\frac{9}{4}$ **D** $\frac{81}{32}$

مراجعة تراكمية

41) حُلّ المعادلة: $\frac{3}{x-3} + 9 = 10$ (الدرس 6-5)

أوجد معادلة المستقيم في كلٍّ ممَّا يأتي: (مهارة سابقة)

42) المارّ بالنقطة $(4, 6)$، وميله 0.5 .

43) المارّ بالنقطتين $(3, 1)$, $(8, -\frac{1}{2})$.

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

6-2 المتتابعات والمتسلسلات الحسابية
Arithmetic Sequences and Series

فيما سبق:
درست تمييز المتتابعة الحسابية. (الدرس 1-6)

والآن:
- أجد حدود متتابعة حسابية، وحدّها النوني.
- أجد أوساطًا حسابية.
- أجد مجموع حدود متسلسلة حسابية منتهية.

المفردات:
الأوساط الحسابية arithmetic means
المتسلسلة series
المتسلسلة الحسابية arithmetic series
المجموع الجزئي partial sum
رمز المجموع sigma notation

لماذا؟

في القرن الثامن عشر، طلب معلمٌ للرياضيات من طلابه في المرحلة الابتدائية أن يجدوا مجموع الأعداد الصحيحة من 1 إلى 100. فقام أحد الطلاب واسمه كارل جاوس (Karl Gauss) بإعطاء الإجابة الصحيحة خلال ثوانٍ، مما أثار استغراب المعلم. وقد أصبح هذا الطالب "كارل جاوس" أحد أفضل علماء الرياضيات على مرِّ العصور.

لقد حلَّ جاوس هذا السؤال باستعمال المتسلسلات الحسابية.

المتتابعات الحسابية: لقد استعملت صيغة النقطة والميل في الدرس 1 – 6؛ لإيجاد قيمة حدّ معيّن في متتابعة حسابية. ويمكنك إيجاد معادلة تستطيع من خلالها إيجاد أيّ حدّ من حدود متتابعة حسابية باستعمال الأسلوب نفسه.

ففي المتتابعة الحسابية a_n ، ... ، a_3 ، a_2 ، a_1 التي أساسها d يكون:

$(y - y_1) = m(x - x_1)$ صيغة الميل والنقطة

$(a_n - a_1) = d(n - 1)$ $(x, y) = (n, a_n), (x_1, y_1) = (1, a_1), m = d$

$a_n = a_1 + d(n - 1)$ اجمع a_1 للطرفين

ويمكنك استعمال هذه الصيغة لإيجاد قيمة أي حدّ من حدود المتتابعة الحسابية، وذلك بمعرفة الحدّ الأول والأساس.

مفهوم أساسي — **الحدّ النوني في المتتابعة الحسابية**

أضف إلى مطويتك

تستعمل الصيغة الآتية للتعبير عن الحدّ النوني في متتابعة حسابية حدّها الأول a_1 ، وأساسها d ، حيث n عدد طبيعي.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

ستشتق هذه الصيغة في السؤال (58)

مثال 1 — **إيجاد حدّ معيَّن في متتابعة حسابية**

أوجد قيمة الحدّ الثاني عشر في المتتابعة الحسابية: ... ، 30 ، 23 ، 16 ، 9

الخطوة 1:

الخطوة 2:

تحقق من فهمك

أوجد قيمة الحدّ المطلوب في كلٍّ من المتتابعتين الحسابيتين الآتيتين:

1A) a_n علمًا بأن: $a_1 = -4$ ، $d = 6$ ، $n = 9$

1B) a_{20} علمًا بأن: $a_1 = 15$ ، $d = -8$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

إذا أعطيت مجموعة من الحدود في متتابعة حسابية، فإنه يمكنك كتابة صيغةٍ للحدّ النوني في هذه المتتابعة.

مثال 2 كتابة صيغة الحدّ النوني لمتتابعة حسابية

اكتب صيغة للحدّ النوني للمتتابعة الحسابية في كلٍّ ممَّا يأتي:

a) $5\ ,\ -13\ ,\ -31\ ,\ \ldots$

b) $a_5 = 19\ ,\ d = 6$

الخطوة 1:

الخطوة 2:

تحقق من فهمك

2A) $12, 3, -6, \ldots$

2B) $a_6 = 12, d = 8$

إرشادات للدراسة

التحقق من صحة الحلّ

تحقّق من صحة الحلّ، باستعمال صيغة الحدّ النوني التي أوجدتها لحساب الحدود الثلاثة الأولى في المتتابعة.

تنبيه!

أساس المتتابعة الحسابية

لا تخطئ في تحديد إشارة أساس المتتابعة الحسابية، وتحقَّق دائمًا من أن صيغة الحدّ النوني تعطي حدود المتتابعة جميعها.

في بعض الأحيان يُعطى في المسألة حدَّان غير متتاليين في متتابعة حسابية. وتُسمّى جميع الحدود الواقعة بين هذين الحدّين **أوساطًا حسابية**، ويمكنك استعمال هذا المفهوم في إيجاد الحدود المفقودة بينهما.

مثال 3 إيجاد الأوساط الحسابية

أوجد الأوساط الحسابية في المتتابعة: $22\ ,\ \underline{?}\ ,\ \underline{?}\ ,\ \underline{?}\ ,\ \underline{?}\ ,\ -8$

الخطوة 1:

الخطوة 2:

الخطوة 3:

تحقق من فهمك

3) أوجد خمسة أوساط حسابية بين العددين $36\ ,\ -18$

قراءة الرياضيات

الوسط الحسابي

هو معدَّل عددين أو أكثر.

الوسط الحسابي بين العددين a, b يساوي $\frac{a+b}{2}$

الأوساط الحسابية

هي الحدود الواقعة بين أيِّ حدّين غير متتاليين في متتابعة حسابية.

المتسلسلات الحسابية: يمكنك الحصول على المتسلسلة بوضع إشارة الجمع (+) بين حدود المتتابعة؛ لذا فالمتسلسلة الحسابية هي مجموع حدود متتابعة حسابية. ويُسمّى ناتج جمع الحدود n الأولى من المتسلسلة المجموع الجزئي، ويُرمز له بالرمز S_n.

مفهوم أساسي
المجموع الجزئي في متسلسلة حسابية

أضف إلى مطويتك

القانون (المعادلة)	المعطيات	مجموع أول n حدًّا (S_n) هو:
بالصيغة العامة	a_1, a_n, n	$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$
بالصيغة البديلة	a_1, d, n	$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$

في بعض الأحيان، لابد من إيجاد إحدى القيم n, a_n, a_1 ، قبل إيجاد مجموع المتسلسلة الحسابية. وفي هذه الحالة استعمل صيغة الحدّ النوني.

مثال 4
استعمال صيغ المجموع

أوجد مجموع حدود المتسلسلة الحسابية $12 + 19 + 26 + \ldots + 180$

الخطوة 1:

الخطوة 2:

تحقق من فهمك

(4A) $2 + 4 + 6 + \cdots + 100$

(4B) $n = 16, a_n = 240, d = 8$

يمكنك استعمال صيغة المجموع في إيجاد حدود المتتابعة الحسابية.

مثال 5
إيجاد الحدود الثلاثة الأولى لمتتابعة حسابية

أوجد الحدود الثلاثة الأولى لمتتابعة حسابية فيها $a_1 = 7, a_n = 79, S_n = 430$

الخطوة 1:

إرشادات للدراسة

صيغتا المجموع الجزئي في متسلسلة حسابية

سُمّيت الصيغة $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ بالصيغة العامة؛ لأنه تم التوصل إليها اعتمادًا على تعريف المتتابعة الحسابية، وباستعمال حدودها بشكل عام، بينما سُمّيت الصيغة $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$ بالصيغة البديلة؛ لأنها تشتق من الصيغة العامة، ويمكن استعمالها بديلًا عن الصيغة العامة.

الخطوة 2:

الخطوة 3:

تحقق من فهمك

5A) $S_n = 120, n = 8, a_n = 36$

5B) $a_1 = -24, a_n = 288, S_n = 5280$

يمكنك التعبير عن المتسلسلة بصورة مختصرة باستعمال **رمز المجموع**.

مفهوم أساسي

رمز المجموع

أضف إلى مطويتك

الرموز: $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ — $f(k)$: صيغة حدود المتسلسلة؛ k: أول قيمة لـ k؛ n: آخر قيمة لـ k

مثال:

$$\sum_{k=1}^{12} (4k+2) = [4(1)+2] + [4(2)+2] + [4(3)+2] + \ldots + [4(12)+2]$$
$$= 6 + 10 + 14 + \ldots + 50$$

قراءة الرياضيات

رمز المجموع

يقرأ الرمز $\sum$ "سيجما"، وهو اسم لأحد الحروف اليونانية الكبيرة.

مثال 6 على اختبار

أوجد مجموع حدود المتسلسلة: $\sum_{k=4}^{18} (6k-1)$

A 846 **B** 910 **C** 975 **D** 1008

إرشادات للدراسة

عدد الحدود

المتسلسلة المكتوبة باستعمال رمز المجموع $\sum_{k=a}^{b} f(k)$ عدد حدودها يساوي $b - a + 1$

تحقق من فهمك

6) أوجد مجموع حدود المتسلسلة $\sum_{m=9}^{21} (5m+6)$

A 972 **B** 1053 **C** 1281 **D** 1701

تأكد

مثال 1 أوجد قيمة الحدّ المطلوب في كلٍّ من المتتابعتين الحسابيتين الآتيتين :

1) a_n علماً بأن: $a_1 = 14, d = 9, n = 11$

2) a_{18} في المتتابعة: $12, 25, 38, \ldots$

مثال 2 اكتب صيغة الحدّ النوني لكلٍّ من المتتابعتين الحسابيتين الآتيتين :

3) $13, 19, 25, \ldots$

4) $a_5 = -12, d = -4$

مثال 3 أوجد الأوساط الحسابية في كلٍّ من المتتابعتين الآتيتين:

5) $6, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 42$

6) $-4, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 8$

مثال 4 أوجد مجموع حدود كل متسلسلة حسابية فيما يأتي:

7) أول 50 عددًا طبيعيًّا

8) $4 + 8 + 12 + \cdots + 200$

9) $a_1 = 12, a_n = 188, d = 4$

10) $a_n = 145, d = 5, n = 21$

مثال 5 أوجد الحدود الثلاثة الأولى في كلٍّ من المتتابعتين الحسابيتين الآتيتين:

11) $a_1 = 8, a_n = 100, S_n = 1296$

12) $n = 18, a_n = 112, S_n = 1098$

مثال 6 **13)** **اختيار من متعدد:** أوجد مجموع حدود المتسلسلة: $\sum_{k=1}^{12} (3k + 9)$.

A 45

B 78

C 342

D 410

تدرب وحل المسائل

مثال 1 أوجد قيمة الحدّ المطلوب في كلّ من المتتابعات الحسابية الآتية:

14) a_n علمًا بأن: $a_1 = -18, d = 12, n = 16$

15) a_n علمًا بأن: $a_1 = -12, n = 66, d = 4$

16) a_{15} في المتتابعة $-5, -12, -19, \ldots$

17) a_{24} في المتتابعة $8.25, 8.5, 8.75, \ldots$

مثال 2 اكتب صيغة الحدّ النوني في كلٍّ متتابعة حسابية فيما يأتي:

18) $24, 35, 46, \ldots$

19) $a_5 = 1.5, d = 4.5$

20) $9, 2, -5, \ldots$

21) $a_6 = 22, d = 9$

22) $a_8 = -8, d = -2$

23) $-12, -17, -22, \ldots$

مثال 3 أوجد الأوساط الحسابية في كلٍّ من المتتابعات الآتية:

24) $24, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, -1$

25) $-6, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 49$

26) $-28, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 7$

27) $84, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 39$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

مثال 4 أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلات الحسابية الآتية:

28) أول 100 عدد زوجي في مجموعة الأعداد الطبيعية.

29) أول 200 عدد فردي في مجموعة الأعداد الطبيعية.

30) $-18 + (-15) + (-12) + \ldots + 66$

31) $-24 + (-18) + (-12) + \ldots + 72$

32) $a_1 = -16, d = 6, n = 24$

33) $n = 19, a_n = 154, d = 8$

34) **مسابقات ثقافية:** في إحدى المسابقات الثقافية تم تخصيص جوائز تصاعدية للإجابة الصحيحة عن أسئلة المسابقة، فخُصِّص للسؤال الأول 100 ريال، وتزيد قيمة الجائزة 50 ريالًا للسؤال التالي، وهكذا. إذا شارك سعد في المسابقة، وأجاب عن 11 سؤالًا بصورة صحيحة، فما مجموع مبلغ الجائزة الذي يستحقُّه؟

مثال 5 أوجد الحدود الثلاثة الأولى في كلٍّ من المتتابعات الحسابية الآتية:

35) $a_1 = 48, a_n = 180, S_n = 1368$

36) $a_1 = 3, a_n = 66, S_n = 759$

37) $n = 28, a_n = 228, S_n = 2982$

38) $a_1 = -33, n = 36, S_n = 6372$

مثال 6 أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلات الآتية:

39) $\sum_{k=1}^{16}(4k-2)$

40) $\sum_{k=4}^{13}(4k+1)$

41) $\sum_{k=5}^{16}(2k+6)$

42) $\sum_{k=0}^{12}(-3k+2)$

43) **قرض حسن:** اقترض عليٌّ مبلغًا من المال من أحد أصدقائه، واتفقا على أن يقوم بتسديده مقسَّطًا كما يأتي: القسط الأول 50 ريالًا، وكل قسط تالٍ يزيد على القسط السابق بمقدار 25 ريالًا. فإذا علمت أن عدد الأقساط هو 12، فما قيمة القرض؟

الربط بالحياة

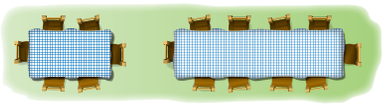
يجب على الإنسان أن يكتب عقدًا بينه وبين من يقرضه المال، عملًا بقوله تعالى في سورة البقرة: ﴿يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوٓاْ إِذَا تَدَايَنتُم بِدَيۡنٍ إِلَىٰٓ أَجَلٖ مُّسَمّٗى فَٱكۡتُبُوهُۚ ... ﴿٢٨٢﴾﴾

استعمل المعلومات المعطاة في كلٍّ من الأسئلة الآتية؛ لكتابة معادلة تُمثّل الحدّ النوني لكل متتابعة حسابية:

44) الحدّ رقم 100 في المتتابعة يساوي 245، وأساس المتتابعة يساوي 13 .

45) الحدّ الحادي عشر في المتتابعة يساوي 78، وأساس المتتابعة يساوي -9 .

46) الحدّ الخامس والعشرون في المتتابعة يساوي 121، والحدّ الثمانون يساوي 506 .



47) **تنظيم:** تُصفّ الطاولات المستطيلة الشكل في قاعات الاحتفالات متجاورةً لتُشكّل طاولة كبيرة. ويُبيّنُ الشكل المجاور عدد الأشخاص الذين يمكن توزيعهم على التشكيلين الأول والثاني من الطاولات.

a) ارسم شكلًا يُبيّن عدد الأشخاص على الطاولات في كلٍّ من الحدود الثلاثة التالية (بإضافة طاولة كلَّ مرَّة).

b) اكتب معادلة تُمثّل الحدّ النوني في هذا النمط.

c) هل من الممكن ترتيب الطاولات بهذه الطريقة، بحيث يستطيع 100 شخص الجلوس؟ وضّح إجابتك.

48) جاذبية: عندما يسقط جسم سقوطًا حرًّا تحت تأثير الجاذبية الأرضية ومع إهمال مقاومة الهواء، فإنه يقطع مسافة 16 قدمًا في الثانية الأولى، و48 قدمًا إضافية في الثانية الثانية، و80 قدمًا إضافية في الثانية الثالثة، وهكذا. ما المسافة التي يقطعها هذا الجسم في 10 ثوانٍ؟

49) دخل سنوي: إذا كان الدخل السنوي لمؤسسة في السنة الأولى 92000 ريال، ويزيد سنويًّا بمقدار 16000 ريال، ففي أيّ سنة يصبح دخلها 380000 ريال؟

50) رياضة: خلال استعداده لأحد سباقات الجري لمسافات طويلة، يُخطّط فيصل للتدرّب على الجري لمسافة 3 أميال يوميًّا في الأسبوع الأول، ومن ثَمَّ يقوم بزيادة المسافة بمقدار نصف ميل أسبوعيًّا.

a) اكتب معادلة للحدّ النوني لهذه المتتابعة.

b) إذا استمر فيصل بالتدرّب على هذا النمط، ففي أيِّ أسبوع يصل إلى قطع مسافة 10 أميال يوميًّا؟

c) هل يُعدّ الاستمرار على هذا النمط إلى ما لا نهاية منطقيًّا؟ وضّح إجابتك.

الربط بالحياة

رياضة الجري تفيد في إنقاص الوزن، وتقوية المفاصل والعضلات، وتحسين عمل القلب والأوعية الدموية، والتخلص من الإرهاق والتوتر، ورفع مستوى اللياقة البدنية والصحة العامة.

51) تمثيلات متعددة: معتبرًا $\sum_{k=1}^{n}(2k+2)$ أجب عما يأتي:

a) جدوليًّا: اعمل جدولًا للمجاميع الجزئية للمتسلسلة، حيث $1 \le k \le 10$.

b) بيانيًّا: مثّل بيانيًّا المجاميع الجزئية التي أوجدتها في الفرع **a**، وذلك بتمثيل النقاط (k, S_k) .

c) بيانيًّا: مثّل الدالّة $f(x) = x^2 + 3x$ بيانيًّا على المستوى الإحداثي نفسه، حيث $0 \le x \le 10$.

d) لفظيًّا: ماذا تلاحظ حول التمثيلين البيانيين؟

e) تحليليًّا: ماذا تستنتج حول العلاقة بين التمثيل البياني للدالّة التربيعية والتمثيل البياني لمجموع المتسلسلة الحسابية؟

f) جبريًّا: أوجد المتسلسلة الحسابية التي يكون فيها التمثيل البياني للمجاميع الجزئية (k, S_k) هو نفسه للدالّة $g(x) = x^2 + 8x$

أوجد قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي:

52) $\sum_{k=3}^{x}(6k-5) = 928$

53) $\sum_{k=5}^{x}(8k+2) = 1032$

مسائل مهارات التفكير العليا

54) تبرير: إذا كان a هو الحدّ الثالث في متتابعة حسابية، وb هو الحدّ الخامس، وc هو الحدّ الحادي عشر، فعبّر عن c بدلالة a, b .

55) تحدٍّ: يوجد ثلاثة أوساط حسابية بين العددين a, b في متتابعة حسابية. إذا كان الوسط الحسابي للأوساط الثلاثة 16، فأوجد الوسط الحسابي للعددين a, b.

56) مسألة مفتوحة: اكتب متسلسلة حسابية فيها 8 حدود، ومجموعها 324 .

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

57) **اكتب:** بيِّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين المتتابعات الحسابية والمتسلسلات الحسابية.

58) **صيغ:** اشتق صيغة الحدّ النوني للمتتابعة الحسابية.

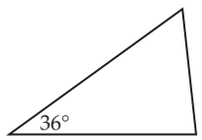
59) **صيغ:** اشتقّ قاعدة لإيجاد مجموع المتسلسلة الحسابية، بحيث لا تحتوي على a_1.

60) **صيغ:** اشتقّ الصيغة البديلة لإيجاد مجموع المتسلسلة الحسابية؛ باستعمال الصيغة العامة للمجموع.

61) **تحدّ:** بالعودة إلى فقرة "لماذا ؟" ما الطريقة التي استعملها كارل جاوس في إيجاد مجموع الأعداد الصحيحة من 1 إلى 100؟ (يمكنك البحث في الإنترنت).

تدريب على اختبار

62) تُشكّل قياسات زوايا المثلّث أدناه متتابعة حسابية. إذا كان قياس الزاوية الصغرى $36°$، فما قياس الزاوية الكبرى؟



A $75°$ **B** $84°$

C $90°$ **D** $97°$

63) العبارة $1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ تكافئ:

A $\sum_{k=1}^{3} k^{\frac{1}{k}}$ **B** $\sum_{k=1}^{3} k^{k}$

C $\sum_{k=1}^{3} k^{-k}$ **D** $\sum_{k=1}^{3} \sqrt{k}$

مراجعة تراكمية

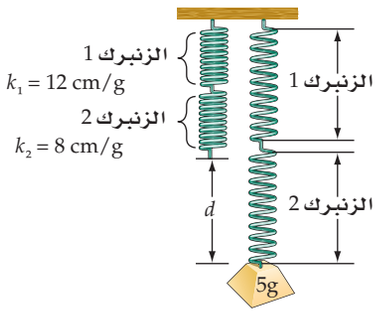
حدّد ما إذا كانت كلٌّ من المتتابعات الآتية حسابية أم لا. أجب "بنعم" أو "لا" : (الدرس 1-6)

64) $-6, 4, 14, 24, \ldots$

65) $2, \frac{7}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \ldots$

66) $10, 8, 5, 1, \ldots$

67) **فيزياء:** ترتبط المسافة التي يستطيل فيها الزنبرك بالكتلة المعلّقة فيه. ويعبَّر عن هذه العلاقة بالقاعدة $d = km$ ، حيث d المسافة، وm الكتلة، وk ثابت الزنبرك. وعند وصل زنبركين لهما الثابتان k_1, k_2 على التوالي، فإن ثابت الزنبرك k الناتج، يُحسب باستعمال المعادلة $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$. (الدرس 5-6)



a) إذا وُصِل زنبركان على التوالي، وكان ثابت الزنبرك الأول $12\,cm/g$، وثابت الزنبرك الثاني $8\,cm/g$ ، فأوجد ثابت الزنبرك الناتج.

b) إذا عُلّقت كتلة مقدارها 5 جرامات (كما في الشكل) فما مقدار استطالة الزنبركين؟

أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي: (مهارة سابقة)

68) $2 \cdot 3^6$

69) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$

70) $\left(-\frac{1}{3}\right)^4$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إتقان - توثيق

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

6-3 المتتابعات والمتسلسلات الهندسية
Geometric Sequences and Series

فيما سبق:
درست تمييز المتتابعة الهندسية. (الدرس 1-6)

والآن:
- أجد حدود متتابعة هندسية، وحدّها النوني.
- أجد أوساطًا هندسية.
- أجد مجموع حدود متسلسلة هندسية منتهية.

المفردات:
الأوساط الهندسية
geometric means
المتسلسلة الهندسية
geometric series

لماذا؟

خلال بحثه في الإنترنت، وجد "أحمد" موضوعًا عن العلاج بالأعشاب، فقام بإرساله إلى خمسة من أصدقائه عن طريق البريد الإلكتروني، ومن ثم قام كلٌّ واحد منهم بإرسال الموضوع إلى خمسة أصدقاء آخرين، وهكذا قام كلٌّ من استلم البريد بإرساله إلى خمسة أصدقاء جُدُدٍ. إذا استمر إرسال الموضوع بهذا النمط، فما عدد الأشخاص الذين سيصلهم هذا الموضوع في المرحلة الثامنة؟

المتتابعات الهندسية: كما هو الحال في المتتابعات الحسابية، فإن للمتتابعات الهندسية صيغة للحدِّ النوني تُستعمل لإيجاد قيمة أيِّ حدٍّ من حدودها.

مفهوم أساسي — الحد النوني في المتتابعة الهندسية

أضف إلى مطويتك

تُستعمل الصيغة الآتية للتعبير عن الحدّ النوني في متتابعة هندسية حدّها الأول a_1، وأساسها r، حيث n عدد طبيعي:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

ستتشتق صحة هذه الصيغة في السؤال (39)

مثال 1 من واقع الحياة — إيجاد الحدّ النوني في متتابعة هندسية

بريد إلكتروني: في المسألة الواردة في فقرة "لماذا؟"، ما عدد رسائل البريد الإلكتروني المرسَلة في المرحلة الثامنة؟

افهم:

خطط:

حُلّ:

تحقّق:

تحقق من فهمك

1) **أمطار:** في أثناء هطول الأمطار ونزولها من أعلَى تلّةٍ إلى أحد الوديان، صنعت الأمطار مجرًى لها في الوادي طوله 40 in، إذا كان هذا المجرى يتسع كلّ يومٍ ثلاثة أمثال اليوم السابق له. فكم سيبلغ اتساع المجرى في اليوم الخامس في حالة استمرار هطول الأمطار بهذا المنوال؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

إذا علمت بعض حدود المتتابعة الهندسية، فإنه يمكنك إيجاد صيغة الحدّ النوني لها.

مثال 2 كتابة صيغة الحد النوني لمتتابعة الهندسية

اكتب صيغة الحدّ النوني لكل من المتتابعتين الهندسيتين الآتيتين:

a) $0.5, 2, 8, 32, \ldots$

b) $a_4 = 5,\ r = 6$

الخطوة 1:

الخطوة 2:

تحقق من فهمك

2A) $-0.25, 2, -16, 128, \ldots$

2B) $a_3 = 16,\ r = 4$

وكما في الأوساط الحسابية، فإن **الأوساط الهندسية** هي الحدود الواقعة بين حدَّين غير متتاليين في متتابعة هندسية، ويمكنك استعمال أساس المتتابعة الهندسية لإيجاد الأوساط الهندسية.

مثال 3 إيجاد الأوساط الهندسية

أوجد ثلاثة أوساط هندسية بين العددين $2, 1250$

الخطوة 1:

الخطوة 2:

الخطوة 3:

50

تحقق من فهمك

3) أوجد أربعة أوساط هندسية بين العددين $0.5, 512$

إرشادات للدراسة

أساس المتتابعة الهندسية

يمكن بسهولة استنتاج قاعدة تساعد على إيجاد أساس المتتابعة الهندسية (r) إذا عُلم حدَّان من حدودها a_m ، a_n

$$r^{n-m} = \frac{a_n}{a_m}$$

يمكنك استعمال صيغة مجموع حدود المتسلسلة الهندسية لإيجاد قيمة حدٍّ معيَّن من حدود المتسلسلة.

مثال 6 إيجاد الحدّ الأول في المتسلسلة الهندسية

أوجد a_1 في المتسلسلة الهندسية التي فيها $S_n = 13116,\ n = 7,\ r = 3$

تحقق من فهمك

6) أوجد a_1 في المتسلسلة الهندسية التي فيها $S_n = -26240,\ n = 8,\ r = -3$

تأكد

مثال 1

1) فيروسات: اخترق فيروس حاسوبًا، فأتلف أحد ملفاته، فإذا كانت الملفات التي يُتلفها الفيروس تتضاعف كلَّ دقيقة، فما مجموع الملفات التي سيُتلفها الفيروس بعد 15 دقيقة، إذا لم تتمّ السيطرة عليه؟

مثال 2

اكتب صيغة الحدّ النوني في كلٍّ من المتتابعات الهندسية الآتية:

2) $2, 4, 8, \ldots$ **3)** $-4, 16, -64, \ldots$ **4)** $a_2 = 4,\ r = 3$

مثال 3

أوجد الأوساط الهندسية المطلوبة في كلٍّ من المتتابعتين الآتيتين:

5) $0.25, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 64$ **6)** $0.20, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 125$

مثال 4

7) تدريب: قامت شركة تعمل في مجال التطوير بإرسال 4 من خبرائها إلى بعض الدوائر التعليمية؛ لتدريب العاملين في هذه الدوائر على كيفية استخدام وتوظيف التكنولوجيا في تدريس المناهج، فقام كلٌّ خبيرٍ منهم بتدريب 3 من مشرفي هذه الإدارات، وبدورهم قام كلُّ مشرفٍ منهم بتدريب 30 آخرين وهكذا ...
إذا استمر هذا النمط، فما مجموع المتدرِّبين الذين سيتم تدريبهم حتى المرحلة السادسة؟

مثال 5

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين:

8) $\sum_{k=1}^{6} 3(4)^{k-1}$ **9)** $\sum_{k=1}^{8} 4\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

مثال 6

أوجد a_1 في كلٍّ من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين:

10) $S_n = 85\frac{5}{16}, r = 4, n = 6$ **11)** $S_n = 1020, a_n = 4, r = \frac{1}{2}$

مثال 1

12) طقس: نتيجة للأمطار الغزيرة، ارتفع منسوب المياه في بركة في اليوم الأول 3 cm ، فإذا كانت الزيادة في كلّ يوم ضعف الزيادة في اليوم السابق لمنسوب المياه في كلٍّ من الأيام الأربعة التالية، فكم سنتمترًا ارتفع منسوب المياه في البركة في اليوم الخامس؟

أوجد a_n في كلٍّ من المتتابعتين الهندسيتين الآتيتين:

13) $a_1 = 2400, r = \frac{1}{4}, n = 7$

14) $a_1 = -4, r = -2, n = 8$

مثال 2

اكتب صيغة الحدّ النوني في كلٍّ من المتتابعات الهندسية الآتية:

15) $-3, 6, -12, \ldots$

16) $-1, 1, -1, \ldots$

17) $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \ldots$

18) $a_3 = 28, r = 2$

19) $a_4 = -8, r = 0.5$

20) $a_6 = 0.5, r = 6$

مثال 3

أوجد الأوساط الهندسية المطلوبة في كلٍّ من المتتابعات الهندسية الآتية:

21) $810, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 10$

22) $\frac{7}{2}, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, \frac{56}{81}$

23) أوجد وسطين هندسيين بين العددين -2 , 16

مثال 4

24) بندول: يقطع بندول مسافة 30 cm في الاهتزازة الأولى، وبعد ذلك يقطع 95% من الاهتزازة السابقة، ويستمر على هذا المنوال. أوجد المسافة الكلية التي يقطعها البندول في 30 اهتزازة.

الربط بالحياة

يستعمل البندول البسيط في الساعات البندولية، ويهتزُّ اهتزازات منتظمة تقريبًا.

والاهتزازة الواحدة تعني حركة البندول جيئة وذهابًا حول موضع اتزانه.

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلات الهندسية الآتية:

25) $a_1 = 36, r = \frac{1}{3}, n = 8$

26) $a_1 = 16, r = \frac{1}{2}, n = 9$

27) $a_1 = 240, r = \frac{3}{4}, n = 7$

مثال 5

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلات الهندسية الآتية:

28) $\sum_{k=1}^{7} 4(-3)^{k-1}$

29) $\sum_{k=1}^{8} (-3)(-2)^{k-1}$

30) $\sum_{k=1}^{10} 5(-1)^{k-1}$

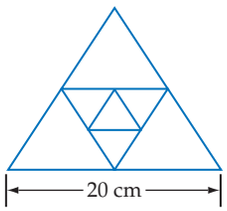
مثال 6

أوجد قيمة a_1 في كلٍّ من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين:

31) $S_n = -2912, r = 3, n = 6$

32) $S_n = 1330, a_n = 486, r = \frac{3}{2}$

33) علوم: ارتفع منطاد مملوء بغاز بعد دقيقة واحدة من إطلاقه مسافة 100 ft. وكان ارتفاعه بعد كلّ دقيقة إضافية يزيد بمقدار 50% على ارتفاعه في الدقيقة السابقة. أوجد ارتفاع المنطاد بعد 5 دقائق.



34) هندسة: في الشكل المجاور، طول ضلع المثلَّث الخارجي المتطابق الأضلاع يساوي ضعف طول ضلع المثلَّث الداخلي الذي تنصِّف رؤوسه أضلاع المثلَّث الخارجي. إذا استمر هذا النمط نحو الداخل، فما مجموع أطوال محيطات المثلَّثات الثمانية الأولى في النمط؟

35) معالجة المياه: يقوم نظام معيَّن لفلترة وتنقية المياه بإزالة 70% من الشوائب في أثناء مرور عيّنة مياه خلاله. فإذا مرّت عيّنة مياه تحتوي 900 mg من الشوائب في النظام أربع مرات، فما كمية الشوائب المتبقّية في العيّنة؟

مسائل مهارات التفكير العليا

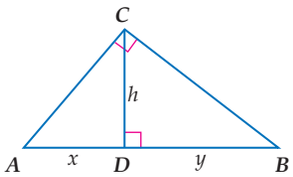
36) برهان: اشتقّ الصيغة البديلة للمجموع الجزئي في متسلسلة هندسية.

37) برهان: اشتقّ صيغة للمجموع الجزئي **لا** تتضمّن a_1

38) تبرير: وضّح التغيير الذي يجب أن تجريه على $\sum_{k=1}^{10} 3(2)^{k-1}$، للحصول على المتسلسلة نفسها إذا غيّرت $k = 1$ إلى $k = 0$. ووضّح إجابتك.

39) صيغ: اشتق صيغة الحدّ النوني للمتتابعة الهندسية.

40) تحدٍّ: استعمل حقيقة أن h هي الوسط الهندسي بين x, y في الشكل المجاور في إيجاد قيمة h^4 بدلالة x, y



41) مسألة مفتوحة: اكتب متسلسلة هندسية فيها 6 حدود، ومجموعها 252 .

42) اكتب: وضّح كيف يمكنك تحديد ما إذا كانت المتسلسلة هندسية، أم حسابية، أم أنها لا حسابية و لا هندسية، أم كليهما.

تدريب على اختبار

43) إذا كان الحدّ الأول في متسلسلة هندسية 5، وأساسها 2، ومجموعها 1275، فما عدد حدودها؟

A 5 **C** 7

B 6 **D** 8

44) إجابة قصيرة: عند أحمد مبلغ من المال، يصرف نصفه في الشهر الأول، ونصف المبلغ الباقي في الشهر الثاني وهكذا. إذا كان المبلغ الباقي بعد 4 أشهر هو 2000 ريال، فما المبلغ الأصلي؟

مراجعة تراكمية

45) نقود: اشترى عبدالعزيز جهاز تلفاز ودفع 400 ريال مقدمًا، على أن يدفع الباقي على أقساط شهرية مدة سنة ونصف. فإذا كانت قيمة القسط الواحد 200 ريال، فما المبلغ الذي سيدفعه ثمنًا للجهاز؟ (الدرس 2-6)

حدّد ما إذا كانت كلٌّ من المتتابعات الآتية حسابية، أم هندسية، أم غير ذلك، ووضّح إجابتك: (الدرس 1-6)

46) $\frac{1}{10}, \frac{3}{5}, \frac{7}{20}, \frac{17}{20}, \ldots$

47) $-\frac{7}{25}, -\frac{13}{50}, -\frac{6}{25}, -\frac{11}{50}, \ldots$

48) $-\frac{22}{3}, -\frac{68}{9}, -\frac{208}{27}, -\frac{632}{81}, \ldots$

49) إذا كانت y تتغير تغيرًا مشتركًا مع x و z، فأوجد قيمة y عندما $z = -5, x = 9$، علمًا بأن $y = -90$ عندما $z = 15$ ، $x = -6$. (الدرس 5-5)

50) أوجد قيمة المقدار $\frac{a-c}{a+c}$ إذا علمت أن $a = -2, c = -12$. (مهارة سابقة)

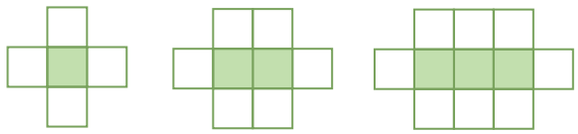
اختبار منتصف الفصل

حدّد نوع المتتابعة وهل هي حسابية، أم هندسية، أم غير ذلك في كلٍّ مما يأتي، ووضّح إجابتك:

1) $5, -3, -12, -22, -33 \ldots$

2) $\frac{1}{5}, \frac{7}{10}, \frac{6}{5}, \frac{17}{10}, \frac{11}{5} \ldots$

3) هندسة: الأشكال أدناه تُمثّل نمطًا من المربعات المظللة والمربعات غير المظلّلة.



الشكل 1 الشكل 2 الشكل 3

a) اكتب معادلة تُمثّل عدد المربعات غير المظللة (الحدّ النوني) في هذا النمط.

b) هل يمكن الحصول على 84 مربعًا (غير مظلّل) بالضبط في هذا النمط؟

أوجد الحدّ التاسع في كلٍّ من المتسلسلتين الحسابيتين الآتيتين:

4) $a_1 = 10, d = -5$

5) $a_1 = -8, d = 4$

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلتين الحسابيتين الآتيتين:

6) $-15 + (-11) + (-7) + \cdots + 53$

7) $a_1 = -12, d = 8, n = 22$

8) ما مجموع حدود المتسلسلة الحسابية $\sum_{k=11}^{50} (-3k + 1)$ ؟

9) اختيار من متعدد: ما مجموع أول 50 عددًا فرديًّا في الأعداد الطبيعية؟

A 625

B 2500

C 2499

D 2401

أوجد الحدّ المطلوب في كلٍّ من المتتابعتين الهندسيتين الآتيتين:

10) $a_2 = 8, r = 2, a_8 = ?$

11) $a_3 = 0.5, r = 8, a_{10} = ?$

12) اختيار من متعدد: ما الأوساط الهندسية في المتتابعة أدناه؟

$0.5, __?__, __?__, __?__, 2048$

A 512.375, 1024.25, 1536.125

B $-683, 1365.5, -2048$ أو $683, 1365.5, 2048$

C $-2, 8, -32$ أو $2, 8, 32$

D $-4, 32, -256$ أو $4, 32, 256$

13) دخل: يعمل فريد في شركة بناء مدة 4 أشهر في السنة. إذا كان راتبه في البداية 5200 ريال في الشهر، وتزيد الشركة راتبه بمعدل 5% شهريًّا. فما المبلغ الذي سيحصل عليه في هذه الأشهر الأربعة؟

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين:

14) $\sum_{k=1}^{8} 3 \cdot 2^{k-1}$

15) $\sum_{k=1}^{9} 4 \cdot (-1)^{k-1}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

6-4

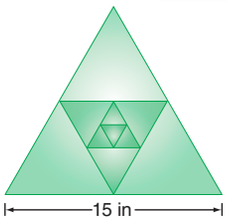
المتسلسلات الهندسية اللانهائية
Infinite Geometric Series

فيما سبق:
درست إيجاد مجموع حدود متسلسلة هندسية منتهية. (الدرس 3-6)

والآن:
- أجد مجموع حدود متسلسلة هندسية غير منتهية (لانهائية).
- أكتب الكسر العشري الدوري في صورة كسر اعتيادي.

المفردات:
المتسلسلة الهندسية اللانهائية
infinite geometric series
المجموع الجزئي لمتسلسلة لا نهائية
partial sum
المتسلسلة المتقاربة
convergent series
المتسلسلة المتباعدة
divergent series
مالانهاية
infinity

لماذا؟



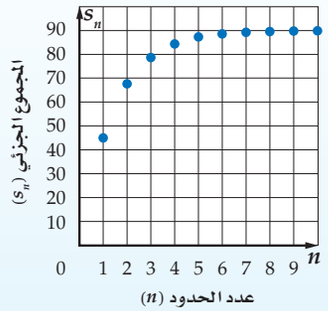
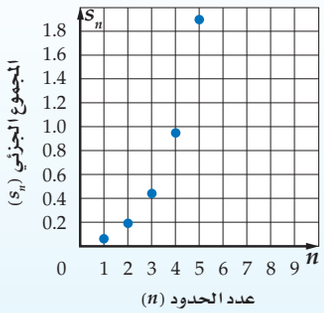
أنشأ رسامٌ لوحةً فنيةً هندسيةً مستعملًا المثلَّثات المتطابقة الأضلاع فقط كما في الشكل المجاور، إذا كان طول ضلع المثلَّث الخارجي 15 in، والمثلَّث الذي يليه من الداخل ينتج عن توصيل منتصفات أضلاع المثلَّث الخارجي، إذا استمر في عملية رسم المثلَّثات الداخلية بهذا النمط، فكم سيكون مجموع محيطات كلِّ المثلَّثات المكوّنة للشكل؟ يمكن الإجابة عن مثل هذه الأسئلة، بدراسة المتسلسلات الهندسية غير المنتهية (اللانهائية).

المتسلسلة الهندسية اللانهائية: المتسلسلة الهندسية التي لها عدد لا نهائي من الحدود تُسمى **المتسلسلة الهندسية اللانهائية**، و**المجموع الجزئي لمتسلسلة لا نهائية** (S_n) هو مجموع عدد محدد (n) من حدودها، وليس مجموع كل حدودها، والمتسلسلة الهندسية اللانهائية تكون **متقاربة** عندما تقترب مجاميعها الجزئية (S_n) من عدد ثابت كلما زادت قيمة n، وعندما لا تقترب هذه المجاميع من عدد ثابت مع زيادة قيمة n، فإن المتسلسلة الهندسية اللانهائية تكون **متباعدة**.

أوجدت في الدرس السابق مجموع أول n حدًّا من متسلسلة هندسية لا نهائية، ويمكنك أيضًا إيجاد مجموع كل حدودها. ففي فقرة "لماذا؟" أعلاه تجد أن مجموع محيطات المثلَّثات المكوّنة للشكل تُعطَى بالمتسلسلة اللانهائية $45 + 22.5 + 11.25 + \ldots$، وكلما زاد عدد حدودها، فإن مجموعها يقترب من 90 in (وهو المجموع الفعلي لها عندما يزداد عدد حدودها إلى **مالا نهاية**). والشكل أدناه يظهر التمثيل البياني للمجموع S_n، حيث $1 \le n \le 10$

مفهوم أساسي
المتسلسلات الهندسية المتقاربة والمتباعدة

أضف إلى مطويتك

المتسلسلات الهندسية المتقاربة	المتسلسلات الهندسية المتباعدة
التعبير اللفظي: إذا كانت النسبة المشتركة (الأساس) $\lvert r \rvert < 1$؛ فإن المجموع الجزئي يقترب من عدد ثابت.	**التعبير اللفظي:** إذا كانت النسبة المشتركة (الأساس) $\lvert r \rvert \ge 1$؛ فإن المجموع الجزئي لا يقترب من عدد ثابت.
مثال: $45 + 22.5 + 11.25 + \ldots$	**مثال:** $\frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \ldots$
	

مثال 1
المتسلسلات المتقاربة والمتسلسلات المتباعدة

حدّد أيّ المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين متقاربة، وأيّهما متباعدة:

a) $54 + 36 + 24 + \ldots$

إرشادات للدراسة

المجاميع الجزئية
يمكن توضيح التمثيل البياني للمجاميع الجزئية للمتسلسلة الواردة في فقرة "لماذا؟" بإنشاء الجدول التالي:

عدد الحدود n	المجموع الجزئي S_n
1	$s_1 = 45$
2	$s_2 = 45 + 22.5 = 67.5$
3	$s_3 = 45 + 22.5 + 11.25 = 78.75$
⋮	⋮

إرشادات للدراسة

القيمة المطلقة

تذكّر أن $|r| < 1$ تعني أن $-1 < r < 1$

أما $|r| \geq 1$ فتعني أن $r \geq 1$ أو $r \leq -1$

b) $8 + 12 + 18 + \ldots$

تحقق من فهمك

1A) $2 + 3 + 4.5 + \ldots$ **1B)** $100 + 50 + 25 + \ldots$

إذا كانت $|r| < 1$ ، فإن قيمة r^n تقترب من الصفر كلما زادت قيمة n ، ولذلك فإن المجاميع الجزئية للمتسلسلة الهندسية اللانهائية تقترب من: $\frac{a_1(1-0)}{1-r} = \frac{a_1}{1-r}$

مفهوم أساسي **مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية المتقاربة**

أضف إلى مطويتك

مجموع حدود المتسلسلة الهندسية اللانهائية المتقاربة يُرمز له بالرمز S حيث $|r| < 1$

ويُعطى بالصيغة $S = \frac{a_1}{1-r}$

ستتشتق صحة هذه الصيغة في السؤال (36)

وعندما تكون المتسلسلة الهندسية اللانهائية متباعدة، $(|r| \geq 1)$، فإنه لا يوجد مجموع لحدود المتسلسلة؛ لأن قيمة r^n تزداد بلا حدود مع زيادة n .

والجدول المجاور يوضّح المجاميع الجزئية للمتسلسلة الهندسية المتباعدة $4 + 16 + 64 + \ldots$ ، حيث إنه كلما زادت قيمة n، فإن S_n تزداد بسرعة كبيرة جدًّا.

n	S_n
5	1364
10	1398100
15	1431655764

مثال 2 **مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية**

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين إن وجد:

a) $\frac{2}{3} + \frac{6}{15} + \frac{18}{75} + \ldots$

الخطوة 1:

الخطوة 2:

إرشادات للدراسة

التقارب والتباعد

تتقارب المتسلسلة الهندسية اللانهائية عندما تكون القيمة المطلقة لأيِّ حدٍّ فيها أقلّ من القيمة المطلقة للحدّ السابق له. وتكون المتسلسلة الحسابية اللانهائية متباعدة دائمًا.

b) $6 + 9 + 13.5 + 20.25 + \ldots$

تحقق من فهمك

2A) $4 - 2 + 1 - 0.5 + \ldots$ **2B)** $16 + 20 + 25 + \ldots$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

يمكنك استعمال رمز المجموع لكتابة المتسلسلات الهندسية اللانهائية، وهي التي تستمر حدودها إلى ما لانهاية؛ أي أنها تستمر دون توقف، ويُستعمل الرمز ∞ فوق رمز المجموع للدلالة على ذلك.

مثال 3 رمز المجموع والمتسلسلة اللانهائية

أوجد قيمة: $\sum_{k=1}^{\infty} 18\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$

تحقق من فهمك

3) أوجد قيمة: $\sum_{k=1}^{\infty} 12\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$

إرشادات للدراسة

رمز المجموع للمتسلسلة الهندسية اللانهائية

$$a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \ldots + a_1 r^{k-1} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_1 r^{k-1}$$

الكسور الدورية: الكسر العشري الدوري هو مجموع متسلسلة هندسية لانهائية. فعلى سبيل المثال $0.\overline{45} = 0.454545\ldots = 0.45 + 0.0045 + 0.000045 + \ldots$. ويمكن استعمال صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية لتحويل هذا الكسر العشري الدوري إلى كسر اعتيادي.

مثال 4 تحويل الكسر العشري الدوري إلى كسر اعتيادي

اكتب الكسر العشري الدوري $0.\overline{63}$ في صورة كسر اعتيادي.

الطريقة 1:

الطريقة 2:

تحقق من فهمك

4) اكتب الكسر العشري الدوري $0.\overline{21}$ في صورة كسر اعتيادي.

إرشادات للدراسة

الكسور الدورية

الكسر العشري الدوري هو عدد نسبي، ويمكن كتابته في صورة كسر اعتيادي.

إرشادات لحل المسألة

اختيار الأسلوب الأفضل للحساب

في كثير من الأحيان يمكن حلُّ المسألة بأكثر من طريقة، ولذلك استعمل الطريقة التي تفضلها.

تأكد

مثال 1 حدّد أيّ المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين متقاربة، وأيّهما متباعدة:

1) $16 - 8 + 4 - \ldots$ **2)** $1 + 1 + 1 + \ldots$

مثال 2 أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين إن وجد:

3) $440 + 220 + 110 + \ldots$ **4)** $\frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{9}{16} + \ldots$

مثال 3 أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي إن وجدت:

5) $\sum_{k=1}^{\infty} 5 \cdot 4^{k-1}$ **6)** $\sum_{k=1}^{\infty} (-2) \cdot (0.5)^{k-1}$

مثال 4 اكتب كلًّا من الكسرين العشريين الدوريين الآتيين في صورة كسر اعتيادي:

7) $0.\overline{35}$ **8)** $0.\overline{642}$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 حدّد أيّ المتسلسلات الهندسية الآتية متقاربة، وأيّها متباعدة:

9) $21 + 63 + 189 + \ldots$ **10)** $\frac{3}{4} + \frac{9}{8} + \frac{27}{16} + \ldots$

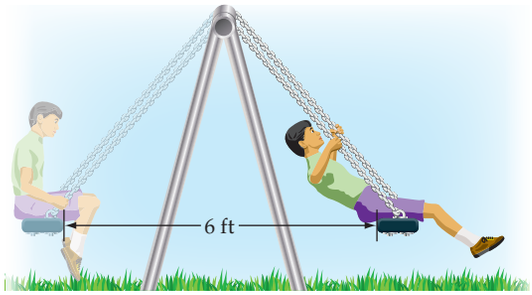
11) $0.1 + 0.01 + 0.001 + \ldots$ **12)** $0.008 + 0.08 + 0.8 + \ldots$

مثال 2 أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلات الهندسية الآتية إن وجد:

13) $18 + 21.6 + 25.92 + \ldots$ **14)** $-3 - 4.2 - 5.88 - \ldots$

15) $\frac{12}{5} + \frac{6}{5} + \frac{3}{5} + \ldots$ **16)** $32 + 40 + 50 + \ldots$

17) أراجيح: انطلق سعيد من نقطة البداية الموضّحة في الشكل المجاور، تاركًا نفسه بعد ذلك من دون دفع منه، فبدأت مسافة التأرجح تتناقص بمقدار 10% في كل تأرجح، أوجد المسافة الكلية التي يكون سعيد قد قطعها عندما تتوقّف الأرجوحة تمامًا.



مثال 3 أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي إن وجدت:

18) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{k-1}$ **19)** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^{k-1}$ **20)** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$

مثال 4 اكتب كلًّا من الكسور العشرية الدورية الآتية في صورة كسر اعتيادي:

21) $0.3\overline{21}$ **22)** $4.\overline{96}$ **23)** $0.12\overline{14}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

الربط بالحياة

استُعملت البطاريات في العالم منذ أكثر من 100 عام، وهي مطلوبة الآن أكثر من أي وقت مضى، ولذلك فإن أكثر من 3 بلايين بطارية تتلف في كلّ عام. ويمكن استعمال بطارية واحدة من البطاريات القابلة للشحن بدلًا من 100 بطارية عادية.

24) بطاريات قابلة للشحن: أعلنت إحدى شركات صناعة البطاريات القابلة للشحن، عن بطارية تشحن بفاعلية نسبتها 99.9% من الفاعلية السابقة بعد كل مرة يتم فيها شحن البطارية. إذا كانت شحنتها في البداية تكفي للعمل 8 ساعات، فما أكبر عدد من الساعات يمكن أن تُستعمل فيه البطارية؟

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلات الآتية إن وجد:

25) $\frac{15}{4}+\frac{5}{2}+\frac{5}{3}+\ldots$ **26)** $-\frac{16}{9}+\frac{4}{3}-1+\ldots$ **27)** $\frac{21}{16}+\frac{7}{4}+\frac{7}{3}+\ldots$

28) تمثيلات متعددة ستحتاج في هذه المسألة إلى بطاقة مربعة الشكل طول ضلعها لا يقل عن 8 بوصات.

a) حسيًّا: افترض أن مساحة البطاقة تُمثّل وحدة مربعة. قُصّ البطاقة نصفين، خذ أحدهما واعتبره الحدّ الأول، ثم قُصَّ النصف الآخر نصفين واعتبر أحدهما الحدّ الثاني. استمر في هذه العملية، واكتب المتسلسلة اللانهائية، التي تعبِّر عن الأجزاء لديك.

b) عدديًّا: إذا أمكن تقسيم البطاقة بهذه الطريقة إلى مالانهاية، فما مجموع المتسلسلة التي أوجدتها في الفرع **a**؟

c) ما العلاقة بين مجموع المتسلسلة ومساحة البطاقة الأصلية؟

29) فيزياء: في تجربة فيزيائية دُحرجت كرة من الفولاذ على مسار أفقي، وتركت لتتدحرج تلقائيًّا، فإذا قطعت الكرة في الدقيقة الأولى 120 ft ، ثم بدأت تقطع في كلّ دقيقة 40% فقط من المسافة التي قطعتها في الدقيقة السابقة، فما المسافة الكلية التي تقطعها الكرة حتى تقف؟

30) بندول: يقطع بندول مسافة 12 cm في الاهتزازة الأولى، وبعد ذلك يقطع 95% من الاهتزازة السابقة، ويستمر على هذا المنوال. أوجد المسافة الكلية التي يقطعها البندول حتى يتوقّف عن الحركة.

31) كرات: أُسقطت كرة مطاطية من ارتفاع 30 ft، فكانت ترتدّ في كلّ مرة مسافة تعادل 95% من المسافة السابقة. إذا استمرت الكرة في الحركة على هذا المنوال، فأوجد المسافة التي تقطعها حتى تقف.

32) متحف العلوم: يُتيح أحد المعارض في متحف للعلوم الفرصة للزوار لتجربة حركة الأجسام على زنبرك. فإذا قام أحدّ الزوار بسحب جسم معلّق بزنبرك إلى أسفل، ثم تركه ليقطع مسافة 1.2 ft إلى أعلى قبل أن يُغيّر اتجاه حركته، وفي كلّ مرة يغيّر الجسم اتجاه حركته تنقص المسافة التي يقطعها بمقدار 20% بالمقارنة مع المسافة في الاتجاه الآخر السابق، فأوجد المسافة الكلية التي يقطعها الجسم.

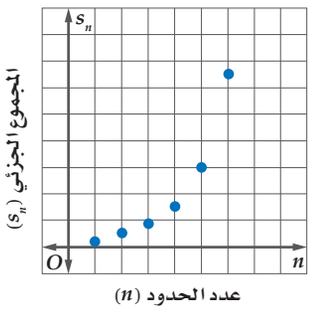
إرشادات للدراسة

أساس المتسلسلة

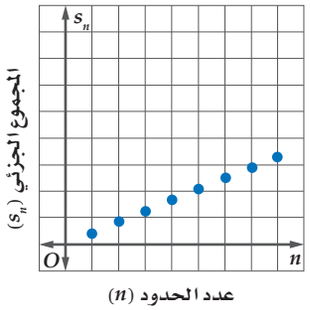
في السؤال 32 تنقص المسافة التي يقطعها الجسم المعلّق بالزنبرك 20%، أي أن المسافة التي يقطعها الجسم تمثّل 80% من المسافة السابقة لها قبل أن يغيّر اتجاه حركته.

اربط بين كلِّ شكل والوصف المناسب له:

33)



34)



a) متسلسلة هندسية متقاربة.

b) متسلسلة هندسية متباعدة.

c) متسلسلة حسابية متقاربة.

d) متسلسلة حسابية متباعدة.

مسائل مهارات التفكير العليا

35) اكتشف الخطأ: طُلِب إلى كلٍّ من عليٍّ وأحمد أن يجد مجموع المتسلسلة $\ldots - 1 + 1 - 1$ فكانت إجابتاهما كما يأتي. فهل إجابة أيٍّ منهما صحيحة؟ وضّح تبريرك.

علي	أحمد
المجموع صفر؛ لأن مجموع كلّ زوج من الحدود في المتسلسلة هو الصفر.	لا يمكن إيجاد المجموع؛ لأن $\lvert r \rvert \geq 1$، والمتسلسلة متباعدة.

36) صيغ: اشتقّ معادلة مجموع متسلسلة هندسية لا نهائية.

37) تحدٍّ: ما قيم b التي يمكن عندها إيجاد مجموع المتسلسلة $\ldots + 81b^3 + 27b^2 + 9b + 3$ ؟

38) تبرير: متى يكون للمتسلسلة الهندسية مجموع، ومتى لا يكون؟ وضّح تبريرك.

39) مسألة مفتوحة: اكتب المتسلسلة $\ldots - 12 + 6 - 3$ باستعمال رمز المجموع وبطريقتين مختلفتين.

40) اكتب: وضّح لماذا تكون المتسلسلة الحسابية متباعدة دائمًا.

تدريب على اختبار

41) مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية التي حدُّها الأول 27، وأساسها $\frac{2}{3}$ هو :

A 81

B 65

C 34

D 18

42) هندسة: ضُرب نصف قطر كرة كبيرة في العدد $\frac{1}{3}$ للحصول على كرة أصغر. ما حجم الكرة الصغيرة بالمقارنة مع حجم الكرة الكبيرة؟

A $\frac{1}{9}$ حجم الكبيرة

B $\frac{1}{\pi^3}$ حجم الكبيرة

C $\frac{1}{27}$ حجم الكبيرة

D $\frac{1}{3}$ حجم الكبيرة

مراجعة تراكمية

43) مسابقات: تُقيم إحدى محطات التلفاز مسابقة ثقافية، وبعد نهاية كلّ جولة من المسابقة، يتم إقصاء نصف عدد المشاركين. فإذا كان عدد المشاركين في الجولة الأولى 512 شخصًا، فاكتب معادلة لإيجاد عدد المشاركين المتبقّي في المسابقة بعد مرور n جولة. (الدرس 6-3)

44) حياكة: مشْغَلٌ فيه 9 عاملات، تنتج كلٌّ منهن فستانًا واحداً يوميًّا. أوجد الحدود الثمانية الأولى من المتتابعة التي تبيِّن مجموع الفساتين التي ينتجها المشغل بعد كلِّ يوم. (الدرس 6-2)

أوجد ناتج الضرب في كلٍّ مما يأتي: (مهارة سابقة)

45) $(y + 4)(y + 3)$

46) $(9p - 1)(3p - 2)$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق
رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

الهدف أستعمل الحاسبة البيانية TI-nspire لأستكشف نهاية متتابعة.

لعلك لاحظت في بعض المتتابعات الهندسية أنه كلما زاد ترتيب الحدّ في المتتابعة اقتربت قيمته من العدد صفر، وبطريقة أخرى كلما زادت قيمة n فإن قيمة a_n تقترب من الصفر. ويُسمّى "الصفر" في هذه الحالة نهايةَ المتتابعة.

توجد أنواع مختلفة من المتتابعات اللانهائية التي يوجد لها نهاية، ولكن إذا لم تقترب حدود المتتابعة من عدد وحيد، فإننا نقول: إن المتتابعة ليس لها نهاية، أو إن نهاية المتتابعة غير موجودة.

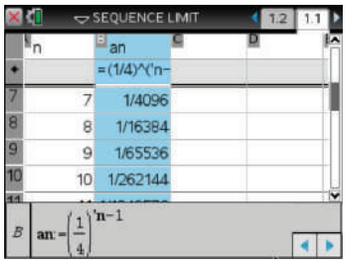
نشاط

أوجد نهاية المتتابعة الهندسية $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \ldots$

الخطوة 1: أدخل المتتابعة.

صيغة الحد النوني في هذه المتتابعة هي: $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

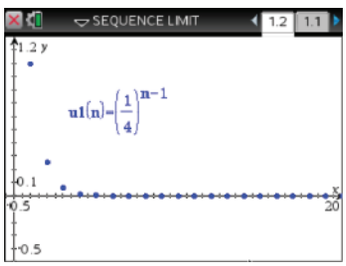
- افتح الآلة الحاسبة بالضغط على (on) .
- من الشاشة الظاهرة اختر 1 مستند جديد ، ومنها اختر 4: إضافة تطبيق القوائم وجداول البيانات فيظهر جدول إلكتروني.
- اكتب في أعلى العمود A الرمز n ثم اضغط (enter) ، واكتب في أعلى العمود B الرمز a_n ثم اضغط (enter) .
- أدخل قيم n في العمود n بالترتيب، وفي العمود الثاني اكتب صيغة الحدِّ النوني $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ ثم اضغط (enter) واختر مرجع المتغير فتظهر الشاشة المجاورة.



لاحظ أنه كلما زادت قيمة n ، فإن قيم الحدود تقترب من العدد 0 ، وإذا نزلت إلى أسفل ستلاحظ أنه عندما $n \geq 7$ ، فإن قيمة كلِّ حدٍّ تكون قريبة من 0 ، مما يشير إلى أن نهاية المتتابعة هي 0 .

الخطوة 2: مثِّل المتتابعة.

- اضغط المفتاح (on) واختر من الشاشة الظاهرة ، ثم اضغط (enter) فيظهر أمامك مستوى إحداثي، ثم اضغط على (menu) واختر منها 3: إدخال/تحرير الرسم البياني ومنها اختر 1: متتابعة ومنها 6: متتابعة ، فتظهر شاشة أدخل فيها صيغة الحدّ النوني والحدّ الأول للمتتابعة واضغط (enter) .
- لإظهار الشكل كاملًا اضغط (menu) ومنها 4: تكبير/تصغير النافذة واختر منها 6: تكبير/تصغير الربع الأول .



ستلاحظ أن التمثيل البياني أيضًا يوضّح أن قيم الحدود تقترب من 0. وفي الواقع عندما $n \geq 3$ ، فإن النقاط تظهر كأنها على المحور الأفقي، ممّا يعني أن نهاية المتتابعة هي 0 .

تمارين:

أوجد نهاية كلٍّ من المتتابعات الآتية:

1) $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

2) $a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

3) $a_n = 5^n$

4) $a_n = \frac{1}{n^2}$

5) $a_n = \frac{3^n}{3^n + 1}$

6) $a_n = \frac{n^2}{n+2}$

وزارة التعليم
Ministry of Education

6-5

نظرية ذات الحدَّين
The Binomial Theorem

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

فيما سبق:
درست التوافيق واستعمالاتها.
(مهارة سابقة)

والآن:
- أستعمل مثلَّث باسكال في إيجاد معاملات مفكوك المقدار $(a+b)^n$.
- أستعمل نظرية ذات الحدَّين في إيجاد مفكوك المقدار $(a+b)^n$.

المفردات:
مثلَّث باسكال
Pascal's triangle
نظرية ذات الحدَّين
Binomial Theorem

لماذا؟

يريد مدير معمل للتحاليل الطبية أن يستأجر 6 متخصِّصين من منطقتين مختلفتين بشكل عشوائي. فإذا كان عدد المتخصصين في المنطقتين متساويًا، فما احتمال أن يختار 4 متخصِّصين من المنطقة الأولى، واثنين من المنطقة الثانية؟

مثلَّث باسكال: يُنسبُ مثلَّث باسكال إلى العالم الفرنسي بليز باسكال (1662–1623)، على الرغم من قيام العديد من العلماء بدراسته قبله في بلاد المسلمين والهند وبلاد فارس والصين وإيطاليا، ويتكون المثلَّث من صفوف يكون بداية كل صف فيه ونهايته العدد 1، وكل عدد من الأعداد الأخرى في الصف، يكون ناتج جمع العددين اللذين فوقه على اليمين واليسار مباشرة، ويمكن استعماله لإيجاد معاملات مفكوك المقدار: $(a+b)^n$.

$(a+b)^0$ 1
$(a+b)^1$ 1 1
$(a+b)^2$ 1 2 1
$(a+b)^3$ 1 3 3 1
$(a+b)^4$ 1 4 6 4 1

1 3 3 1
+ + +
4 6 4

فيكون مفكوك $(a+b)^4$ هو

الأُسس تبدأ من 0 وتتناقص إلى صفر

$$(a+b)^4 = 1a^4b^0 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1a^0b^4$$

الأُسس تبدأ من صفر وتتزايد إلى 4

$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

لاحظ أن عدد الحدود في مفكوك $(a+b)^4$ هو 5 حدود، ومجموع الأسس في كل حدٍّ هو 4

مثال 1 من واقع الحياة

استعمال مثلَّث باسكال

بالعودة إلى فقرة "لماذا؟"، أوجد احتمال اختيار 4 متخصِّصين من المنطقة الأولى، واثنين من المنطقة الثانية، وذلك بإيجاد مفكوك $(a+b)^6$.

تحقق من فهمك

2) بالعودة إلى فقرة "لماذا"، إذا أراد مدير معمل التحاليل الطبية أن يستأجر 8 متخصِّصين، فما احتمالات أن يختار 6 متخصِّصين من المنطقة الأولى واثنين من المنطقة الثانية؟

تاريخ الرياضيات

أبو بكر محمد بن الحسن الكرخي
عالم رياضي مسلم، وهو أول من أوجد المثلَّث المشهور الذي يُسمى الآن مثلَّث باسكال.

مراجعة المفردات
التوافيق يسمى عدد طرق التشكيل الممكنة لمجموعة عناصر ليس لترتيبها أهمية بالتوافيق.

نظرية ذات الحدَّين: يمكن استعمال **نظرية ذات الحدَّين**؛ لإيجاد مفكوك ذات الحدَّين بدلًا من استعمال مثلَّث باسكال.

مفهوم أساسي — نظرية ذات الحدين

أضف إلى مطويتك

إذا كان n عددًا طبيعيًا، فإن :

$$(a+b)^n = {}_nC_0\, a^n b^0 + {}_nC_1\, a^{n-1} b^1 + {}_nC_2\, a^{n-2} b^2 + \ldots + {}_nC_n\, a^0 b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, a^{n-k}\, b^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\, a^{n-k}\, b^k$$

عند استعمال النظرية عوِّض عن n بقيمة الأُسِّ. ولاحظ كيف ستتبع الحدود النمطَ نفسَه في مثلَّث باسكال، وكيف تتماثل المعاملات، وإذا كانت الإشارة بين الحدّين سالبة $(a-b)^n$، فاكتبها بالشكل $(a+(-b))^n$ قبل إيجاد المفكوك.

مثال 2 — استعمال نظرية ذات الحدين

أوجد مفكوك $(a+b)^7$.

الطريقة الأولى: استعمال التوافيق .

الطريقة الثانية: استعمال مثلَّث باسكال

تحقق من فهمك

2) أوجد مفكوك $(x+y)^{10}$.

عندما يكون معاملا الحدَّين في ذات الحدَّين يختلف عن العدد 1، فإن المعاملات لن تكون متماثلة. وفي مثل هذه الحالة استعمل نظرية ذات الحدَّين.

مثال 3 — استعمال نظرية ذات الحدَّين عندما يختلف المعاملان عن 1

أوجد مفكوك $(5a-4b)^4$.

تحقق من فهمك

3) أوجد مفكوك $(3x-2y)^5$.

قراءة الرياضيات

كُتب عدد التوافيق لعناصر عددها ن مأخوذ ر عنصرًا كل مرَّة سابقًا بالرمز ${}^{ن}ق_{ر}$ ، وسيُرمز له في هذا الكتاب بالرمز ${}_nC_r$.

إرشادات للدراسة

توافيق

- $0! = 1$
- ${}_nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$
- ${}_nC_0 = \frac{\cancel{n!}}{0!\,\cancel{(n-0)!}} = \frac{1}{1} = 1$
- ${}_nC_n = 1$
- ${}_nC_n = \frac{\cancel{n!}}{\cancel{n!}(n-n)!} = \frac{1}{1} = 1$

إرشادات للدراسة

الحاسبة العلمية

يمكن حساب قيمة ${}_nC_r$ باستعمال الحاسبة العلمية. اضغط على العدد n ثم ÷ ثم SHIFT ثم العدد r ثم = مثال

$6C_3$: 6 SHIFT ÷ 3 = 20

إرشادات للدراسة

إشارات حدود مفكوك $(a+b)^n$

عند إيجاد مفكوك $(a+b)^n$، تكون إشارة كلِّ حدٍّ في المفكوك تعتمد على إشارة كلٍّ من a ، b. فتكون إشارة الحدود كلها موجبة إذا كانت إشارة a وإشارة b موجبتين، وتكون إشارة الحدود الزوجية سالبة إذا كانت إشارة b فقط سالبة.

تحتاج في بعض الأحيان إلى إيجاد قيمة أحد الحدود في المفكوك، ويمكنك عندها استعمال الحد العام في صيغة المجموع لنظرية ذات الحدَّين بحيث تجد الحدَّ الذي ترتيبه $k+1$ أو t_{k+1} في مفكوك $(a+b)^n$ باستعمال الصيغة $t_{k+1} = {}_nC_k\, a^{n-k}\, b^k$

مثال 4 إيجاد قيمة حدّ معيّن

أوجد قيمة الحدّ الخامس في مفكوك $(y+z)^{11}$.

تحقق من فهمك

4) أوجد قيمة الحدِّ السادس في مفكوك $(c+d)^{10}$.

ملخص المفاهيم مفكوك ذات الحدَّين

أضف إلى مطويتك

في مفكوك ذات الحدَّين $(a+b)^n$:

- عدد الحدود $n+1$.
- أسُّ a في الحدِّ الأول هو n، وكذلك أسُّ b في الحدِّ الأخير هو n .
- يقلُّ أسُّ a بمقدار واحد، ويزيد أسُّ b بمقدار واحد في أيِّ حدّين متتاليين.
- مجموع الأسس في أي حدٍّ يساوي n دائمًا.
- المعاملات في المفكوك متماثلة.

تأكـد

الأمثلة 1–3 أوجد مفكوك كلٍّ مما يأتي:

1) $(g+h)^7$ **2)** $(x+3)^5$ **3)** $(y-4z)^4$

4) ولادة: إذا كان احتمال ولادة ذكر يساوي احتمال ولادة أنثى عند المرأة، فاستعمل نظرية ذات الحدَّين لإيجاد احتمال أن يكون عدد الإناث 5 في ست ولادات. (لا تحسب التوائم).

مثال 4 أوجد قيمة الحدِّ المطلوب في مفكوك كلٍّ ممّا يأتي:

5) الحدّ السادس في مفكوك $(2c-3d)^8$

6) الحدّ الأخير في مفكوك $(5x+y)^5$

7) الحدّ الأول في مفكوك $(3a+8b)^5$

تدرب وحل المسائل

الأمثلة 1–3 أوجد مفكوك كلٍّ ممّا يأتي:

8) $(c-d)^7$ **9)** $(2a+4b)^4$ **10)** $(3a-4b)^5$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

11) لجان: إذا أردنا تكوين لجنة من 10 طلاب من طلاب الصفَّين الأول الثانوي والثاني الثانوي في مدرسة، فما احتمال أن يكون في اللجنة 7 طلاب من الصف الأول الثانوي، علمًا بأن عدد طلَّاب الصفَّين متساوٍ، وأن الاختيار يتم عشوائيًّا.

مثال 4 أوجد قيمة الحدّ المطلوب في كلٍّ ممَّا يأتي:

12) الحدّ الرابع في مفكوك $(y - 3x)^6$.

13) الحدّ السادس في مفكوك $(4x + 5y)^6$.

14) الحدّ الخامس في مفكوك $(x - 4)^9$.

15) الحدّ الرابع في مفكوك $(c + 6)^8$.

أوجد مفكوك كلٍّ ممّا يأتي:

16) $\left(x - \frac{1}{3}\right)^4$

17) $\left(2b + \frac{1}{4}\right)^5$

18) كرة سلَّة: إذا كان احتمال النجاح في رمي كرة السلَّة لأحد اللاعبين يساوي احتمال الفشل عند رميها من مسافة محدَّدة، فأوجد احتمال أن ينجح هذا اللاعب في إصابة الهدف في 11 مرَّة من بين 12 محاولة.

19) كرة قدم: إذا كان احتمال أن يسجِّل خالد هدفًا من ضربة جزاء هو 70% ، فأوجد احتمال أن يسجِّل 9 أهداف من 10 ضربات.

إرشادات لحل المسألة

نظرية ذات الحدَّين والاحتمال

يمكنك استعمال نظرية ذات الحدَّين في حساب نتائج التجارب المستقلة المتكرِّرة. فإذا كان p يمثل احتمال النجاح، و $(q = 1 - p)$ يمثِّل احتمال الفشل، فإن احتمال أن تكون x محاولة ناجحة من بين n محاولة تُعطى بالصيغة التالية $p(x) = {}_nC_x\, p^x\, q^{n-x}$

مسائل مهارات التفكير العليا

20) تحدٍّ: أوجد قيمة الحدّ السادس في مفكوك $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^{12}$، ووضّح إجابتك .

21) تبرير: وضّح كيف تتشابه الحدود في مفكوك كلٍّ من $(x - y)^n$, $(x + y)^n$ ، وكيف تختلف.

22) مسألة مفتوحة: اكتب قوة لذات حدَّين، الحدّ الثاني في مفكوكها يساوي $6x^4y$.

23) اكتب: وضّح كيف يمكنك كتابة حدود مثلَّث باسكال.

تدريب على اختبار

24) احتمال: يحتوي صندوق على 7 أقلام رصاص حمراء مبرية، و5 أقلام رصاص صفراء مبرية، و5 أقلام صفراء غير مبرية. إذا تمَّ سحب قلم من الصندوق بصورة عشوائية، فما احتمال أن يكون القلم أصفر، علمًا بأنه من الأقلام المبرية؟

A $\frac{5}{12}$ **B** $\frac{7}{15}$ **C** $\frac{5}{10}$ **D** $\frac{1}{5}$

25) أيُّ العلاقات التالية تُمثّل دالّة خطِّية؟

A $y = \frac{x+3}{x+2}$ **B** $y = (3x + 2)^2$ **C** $y = \frac{x+3}{2}$ **D** $y = |3x| + 2$

مراجعة تراكمية

أوجد الحدود الخمسة الأولى في كلٍّ من المتتابعتين الحسابيتين الآتيتين: (الدرس 2-6)

26) $a_1 = -2,\ a_{n+1} = a_n + 5$

27) $a_6 = -7,\ a_7 = -1$

28) أوجد مجموع المتسلسلة $-6 + 3 - \frac{3}{2} + \ldots$. (الدرس 4-6)

29) بيّن ما إذا كانت الجملة $\frac{(n+1)(n+1)}{2} = 2$ صحيحة عندما $n = 1$ ، أم لا، وفسّر إجابتك. (مهارة سابقة)

التوافيق ومثلّث باسكال
Combinations and Pascal's Triangle

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

الهدف أستعمل التوافيق ومثلّث باسكال لإيجاد عدد طرق اختيار الجوائز في الألعاب.

تذكّر أن اختيار مجموعة من العناصر بحيث يكون الترتيب غير مهمّ يُسمّى توفيقًا. فعلى سبيل المثال، اختيار قطعتين من الشطائر من بين 6 قطع هو توافيق 6 عناصر مأخوذة مثنى مثنى في كل مرّة. ويمكن كتابة عدد التوافيق في هذه الحالة في الصورة: ${}_6C_2$ أو $C(6, 2)$.

نشاط

مسابقة ثقافية تتكون من 5 مراحل، للفائز في كل مرحلة جائزة (يختارها من بين جوائز المسابقة الخمس). فإذا اشترك مهند في المسابقة، فإن عدد الجوائز التي يمكن الحصول عليها هو 5 أو 4 أو 3 أو 2 أو 1 أو 0 جوائز. أوجد عدد الطرق الممكنة لاختيار الجوائز.

الخطوة 1: إذا لم يفُز المتسابق في أيِّ مرحلة من مراحل المسابقة؛ فإنه يحصل على 0 جائزة، وهذا يُمثّل 5 عناصر مأخوذة 0 في كل مرَّة.

وتعلم مسبقًا أن ${}_nC_0 = 1$ ؛ لذا فإن ${}_5C_0 = 1$.

وهذا يعني أنه توجد طريقة واحدة فقط للحصول على 0 من الجوائز.

أما إذا فاز المتسابق في مرحلة واحدة، فإن أيًّا من الجوائز الخمس يمكنه اختيارها. وإذا فاز في مرحلتين فيمكنه اختيار أيِّ جائزتين. وإذا فاز في ثلاث مراحل فيمكنه اختيار أيِّ 3 جوائز وهكذا. بكم طريقة يمكن له اختيار جائزة واحدة، وجائزتين، و3 جوائز، و4 جوائز، و5 جوائز؟

يمكن تحديد عدد الطرق باستعمال مثلّث باسكال.

الخطوة 2: تفحّص مثلّث باسكال.

اكتب قائمة الصفوف لمثلّث باسكال من 0 إلى 5

الصف 0					1					
الصف 1				1		1				
الصف 2			1		2		1			
الصف 3		1		3		3		1		
الصف 4	1		4		6		4		1	
الصف 5	1	5		10		10		5		1

يمكن الحصول على عدد طرق اختيار الجوائز من الصفّ الخامس. فالعدد الأول في الصفّ الخامس يُمثّل عدد طرق الحصول على 0 جائزة، والعدد الثاني يُمثّل عدد طرق الحصول على جائزة واحدة، والعدد الثالث يُمثّل عدد طرق الحصول على جائزتين وهكذا.

حلِّل النتائج:

1) اكتب تخمينًا حول كيفية استعمال الأعداد في أحد صفوف مثلّث باسكال لإيجاد عدد طرق اختيار n من العناصر 0, 1, 2, 3, 4, ..., n من بين n من العناصر.

2) على افتراض أن قواعد المسابقة تغيّرت، بحيث أصبح عدد المراحل 6 وعدد الجوائز 6. فأوجد عدد الطرق التي يمكن من خلالها اختيار 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 جوائز.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

6-6

البرهان باستعمال مبدأ الاستقراء الرياضيّ
Proof by Principle of Mathematical Induction

فيما سبق:
درست إيجاد مجموع متسلسلة حسابية. (الدرس 2-6)

والآن:
- أبرهن الجمل الرياضية باستعمال مبدأ الاستقراء الرياضيّ.
- أثبت خطأ جملة رياضية بإيجاد مثال مضادٍّ.

المفردات:
مبدأ الاستقراء الرياضيّ
mathematical induction
فرضية الاستقراء
induction hypothesis

لماذا؟

إذا صُفَّت قطع الدومينو متقاربة كما في الصورة المجاورة، فإن كل ما نحتاج إليه لإسقاط القطع جميعها هو إسقاط القطعة الأولى. وينطبق هذا تمامًا على مبدأ الاستقراء الرياضيّ.

مبدأ الاستقراء الرياضيّ: مبدأ الاستقراء الرياضيّ هو أسلوب لبرهنة الجمل الرياضية المتعلِّقة بالأعداد الطبيعية.

مفهوم أساسيٌّ

أضف الى مطويتك

مبدأ الاستقراء الرياضيّ

لبرهنة أن جملة ما صحيحة للأعداد الطبيعية جميعها n، اتبع الخطوات الآتية :

الخطوة 1: برهن أن الجملة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن الجملة صحيحة عند العدد الطبيعي k . وهذا الفرض يُسمّى فرضية الاستقراء .

الخطوة 3: برهن أن الجملة صحيحة عند العدد الطبيعي التالي $k + 1$.

مثال 1

برهان المجموع

برهن أن : $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

الخطوة 1:

الخطوة 2:

الخطوة 3:

تحقق من فهمك

1) برهن أن : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

وكما في برهان المجموع فإن مبدأ الاستقراء الرياضيّ يمكنك استعماله لبرهنة قابلية القسمة أيضًا.

مثال 2 برهان قابلية القسمة

برهن أن $8^n - 1$ يقبل القسمة على 7 لكل عدد طبيعي n .

الخطوة 1:

الخطوة 2:

الخطوة 3:

إرشادات للدراسة

قابلية القسمة

يقال عن عدد ما: إنه يقبل القسمة على 4 إذا أمكن كتابة ذلك العدد في الصورة $4r$، حيث r عدد طبيعي، ويُستعمل هذا التعبير في برهان قابلية القسمة.

تحقق من فهمك

2) برهن أن $7^n - 1$ يقبل القسمة على 6 لكل عدد طبيعي n.

مراجعة المفردات

مثال مضادٌّ

أحد معاني كلمة مضادّ هو مناقض، لذلك فإن المثال المضادّ هو مثال يناقض الفرضية.

الأمثلة المضادَّة يمكنك إثبات خطأ جملة رياضية من خلال مبدأ الاستقراء الرياضيّ، وأسهل طريقة لعمل ذلك هي إيجاد مثال مضادٍّ تكون عنده الجملة الرياضية خاطئة.

مثال 3 استعمال المثال المضادّ لإثبات خطأ جملة رياضية

أعطِ مثالًا مضادًّا يبيّن خطأ الجملة: "$2^n + 2n^2$ تقبل القسمة على 4 ، حيث n أي عدد طبيعي".

n	$2^n + 2n^2$	هل تقبل القسمة على العدد 4 ؟
1	$2^1 + 2(1)^2 = 2 + 2 = 4$	نعم
2	$2^2 + 2(2)^2 = 4 + 8 = 12$	نعم
3	$2^3 + 2(3)^2 = 8 + 18 = 26$	لا

تحقق من فهمك

3) أعطِ مثالًا مضادًّا يبيّن خطأ الجملة: "$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(3n-1)}{2}$، حيث n أي عدد طبيعي".

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

تأكد

مثال 1 برهن صحّة كلٍّ من الجملتين الآتيتين للأعداد الطبيعية جميعها:

1) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ **2)** $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

3) نظرية الأعداد: يُسمّى العدد عددًا مثلَّثيًّا، إذا أمكن تمثيله بنقاط على شكل مثلَّث كما في الشكل أدناه.

a) إذا علمت أن العدد المثلَّثي الأول هو 1، فأوجد الأعداد المثلَّثية الخمسة التالية.

b) اكتب قاعدة لإيجاد العدد المثلَّثي الذي ترتيبه n .

c) برهن أنّ مجموع أول n من الأعداد المثلَّثية يساوي: $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

مثال 2 برهن صحّة كلٍّ من الجملتين الآتيتين للأعداد الطبيعية جميعها:

4) $10^n - 1$ يقبل القسمة على 9 **5)** $4^n - 1$ يقبل القسمة على 3

مثال 3 أعطِ مثالًا مضادًّا يُبيّن خطأ كلٍّ من الجملتين الآتيتين، حيث n أيّ عدد طبيعي:

6) $3^n + 1$ يقبل القسمة على 4 **7)** $2^n + 3^n$ يقبل القسمة على 4

تدرب وحل المسائل

مثال 1 برهن صحّة كلٍّ من الجمل الآتية للأعداد الطبيعية جميعها:

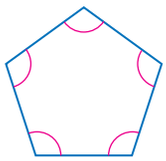
8) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$

9) $2 + 5 + 8 + \ldots + (3n - 1) = \frac{n(3n+1)}{2}$

10) $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

11) $3 + 7 + 11 + \cdots + (4n - 1) = 2n^2 + n$

12) هندسة: مستعملًا مبدأ الاستقراء الرياضيّ والهندسة؛ برهن صحة قاعدة مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلَّع محدَّب $[(n-2).180]$، حيث n عدد الأضلاع. لكل $n \geq 3$.



مثال 2 برهن صحّة كلٍّ من الجملتين الآتيتين للأعداد الطبيعية جميعها:

13) $9^n - 1$ يقبل القسمة على 8.

14) $12^n + 10$ يقبل القسمة على 11.

مثال 3 أعطِ مثالًا مضادًّا يُبيّن خطأ كلٍّ من الجملتين الآتيتين، حيث n أيّ عدد طبيعي:

15) $1 + 8 + 27 + \cdots + n^3 = (2n + 2)^2$

16) $n^2 + n + 23$ عدد أولي.

الربط بالحياة

تظهر حدود متتابعة فيبوناشي كثيرًا، كما في بذور قرص تباع الشمس، إذ يمكن رسم 13 أو 21 أو 55 شكلًا حلزونيًا اعتمادًا على درجة ميل الشكل، وجميعها من عناصر متتابعة فيبوناشي.

17) **متتابعة فيبوناشي:** تبدأ متتابعة فيبوناشي بالحدود ... , 8 , 5 , 3 , 2 , 1 , 1 ، ويكون الحدّ التالي فيها مساويًا لمجموع الحدّين السابقين له مباشرة (وذلك بعد الحدّ الثاني). فإذا كان f_n يمثّل عدد فيبوناشي ذا الرقم n، فبرهن أن:

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1$$

برهن صحة كلِّ جملة مما يأتي لجميع الأعداد الطبيعية، أو أعطِ مثالًا مضادًّا يُثبت خطأها:

18) $5 + 7^n$ يقبل القسمة على 6

19) $1 - 18^n$ يقبل القسمة على 17

20) $7 + 21n + n^2$ عدد أولي.

21) $3 + 3n + n^2$ عدد أولي.

22) $500 + 100 + 20 + \ldots + 4 \cdot 5^{4-n} = 625\left(1 - \frac{1}{5^n}\right)$

مسائل مهارات التفكير العليا

23) **تحدٍّ:** اكتب قاعدة تُمثّل المجموع $2n + \ldots + 6 + 4 + 2$، ثم برهنها باستعمال مبدأ الاستقراء الرياضيّ.

تبرير: **حدّد ما إذا كانت كلٌّ من الجملتين الآتيتين صحيحة أم خطأً. وضّح إجابتك.**

24) إذا لم تستطع إيجاد مثال مضادٍّ في جملة رياضية فإنها تكون صحيحة.

25) إذا كانت جملة ما صحيحة عند $n = k$ ، وعند $n = k + 1$، فإنها تكون صحيحة عند $n = 1$

26) **تحدٍّ:** برهن أن : $2 + 5^2 (11^n)$ يقبل القسمة على 3 لكل عدد طبيعي n .

27) **مسألة مفتوحة:** اكتب قاعدة لإيجاد مجموع متسلسلة ما، ثم برهن على صحتها باستعمال مبدأ الاستقراء الرياضيّ.

28) **اكتب:** وضّح مبدأ الاستقراء الرياضيّ بمثال من واقع الحياة (غير قطع الدومينو).

تدريب على اختبار

29) أيُّ الأعداد الآتية يُعدّ مثالًا مضادًّا لإثبات خطأ الجملة:

$n^2 + n - 11$ عدد أولي؟

A $n = -6$

B $n = 4$

C $n = 5$

D $n = 6$

30) **مبدأ العدّ:** يريد حسن وضع كلمة سر للحاسوب الخاص به مكوّنة من 7 رموز، بحيث تكون الرموز الثلاثة الأولى مكوّنة من أحرف اسمه، والرموز الأربعة التالية مكوَّنة من أرقام العدد 1986 ، والتي هي سنة ميلاده. ما أكبر عدد من كلمات السر التي يستطيع حسن تكوينها بهذه الطريقة؟

A 72

B 144

C 288

D 576

مراجعة تراكمية

أوجد قيمة الحدّ المطلوب في كلٍّ ممّا يأتي: (الدرس 5-6)

31) الحدّ الرابع في مفكوك $(x + 2y)^6$

32) الحدّ الخامس في مفكوك $(a + b)^6$

33) الحدّ الرابع في مفكوك $(x - y)^9$

أوجد مجموع كلٍّ من المتسلسلتين الآتيتين :

34) $5 + 10 + 15 + 20 + \ldots + 1000$ (الدرس 2-6)

35) $\frac{1}{5} - \frac{1}{15} + \frac{1}{45} - \frac{1}{135} + \ldots$ (الدرس 4-6)

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

المتتابعات والمتسلسلات الحسابية (الدرسان 6-2 ، 6-1)

- الحدّ النوني a_n في متتابعة حسابية حدّها الأول a_1 ، وأساسها d يُعطى بالصيغة:
$a_n = a_1 + (n-1)d$، حيث n أي عدد صحيح موجب.
- مجموع أول n حدًّا في متتابعة حسابية: S_n يُعطى بإحدى الصيغتين:
$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$, $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$.

المتتابعات والمتسلسلات الهندسية (الدرسان 6-4 , 6-3)

- الحدّ النوني a_n في متتابعة هندسية حدّها الأول a_1 وأساسها r يُعطى بالصيغة: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ ، حيث n أي عدد صحيح موجب.
- مجموع أول n حدًّا في متسلسلة هندسية S_n يُعطى بإحدى الصيغتين:
$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$, $S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1-r}$، حيث $r \neq 1$
- مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية يُعطى بالصيغة:
$S = \frac{a_1}{1-r}$ ، حيث $|r| < 1$.

نظرية ذات الحدَّين (الدرس 6-5)

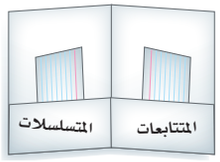
- نظرية ذات الحدَّين:
$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} k! \frac{n!}{(n-k)!} a^{n-k} b^k$

مبدأ الاستقراء الرياضيّ (الدرس 6-6)

- مبدأ الاستقراء الرياضيّ هو طريقة أو أسلوب لبرهنة الجمل المتعلقة بالأعداد الطبيعية.

المطويات منظم افكار

تأكَّد من أن المفاهيم الأساسية مدوَّنة في مطويتك.



المفردات

المتتابعة ص 124
الحدّ ص 124
المتتابعة المنتهية ص 124
المتتابعة غير المنتهية ص 124
المتتابعة الحسابية ص 124
أساس المتتابعة الحسابية (الفرق المشترك) ص 124
المتتابعة الهندسية ص 126
أساس المتتابعة الهندسية (النسبة المشتركة) ص 126
الأوساط الحسابية ص 131
المتسلسلة ص 132
المتسلسلة الحسابية ص 132
المجموع الجزئي ص 132
رمز المجموع ص 133
الأوساط الهندسية ص 139
المتسلسلة الهندسية ص 140
المتسلسلة الهندسية اللانهائية ص145
المجموع الجزئي لمتسلسلة لانهائية ص 145
المتسلسلة المتقاربة ص 145
المتسلسلة المتباعدة ص 145
ما لا نهاية ص 145
مثلّث باسكال ص 152
نظرية ذات الحدّين ص 153
مبدأ الاستقراء الرياضيّ ص 157
فرضية الاستقراء ص 157

اختبار المفردات

حدّد ما إذا كانت كلٌّ من العبارات الآتية صحيحة أم لا. وإذا كانت غير صحيحة، فعدِّل المصطلح الذي تحته خطٌّ لتصبح العبارة صحيحة:

1) تُسمّى المتسلسلة اللانهائية التي يمكن إيجاد مجموع لها، متسلسلة متقاربة.

2) مبدأ الاستقراء الرياضيّ هو أسلوب لبرهنة الجمل الرياضية المتعلِّقة بالأعداد الطبيعية.

3) الأوساط الحسابية للمتتابعة، هي الحدود الموجودة بين أي حدّين غير متتاليين في متتابعة حسابية.

4) الحدّ هو سلسلة من الأعداد مرتّبة بطريقة معينة.

5) يُسمّى مجموع أول n حدًّا من متسلسلة، المجموع الجزئي.

6) المتتابعة الهندسية هي متتابعة نحصل على كل حدٍّ فيها بإضافة قيمة ثابتة إلى الحدّ السابق.

7) تُسمّى المتسلسلة الهندسية اللانهائية التي لا يمكن إيجاد مجموع لها، متسلسلة متقاربة.

8) 17 , 11 هما وسطان هندسيان بين العددين 23 , 5 في المتتابعة 5, 11, 17, 23 .

9) باستعمال نظرية ذات الحدّين فإن:
$(x-2)^4 = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$.

مراجعة الدروس

6-1 المتتابعات بوصفها دوالّ ص 124-129

أوجد قيمة الحدّ المطلوب في كلٍّ من المتتابعات الحسابية الآتية:

10) $a_1 = 9, d = 3, a_{14} = ?$

11) $a_1 = -3, d = 6, a_{22} = ?$

حدِّد نوع المتتابعة، ثم أوجد الحدود الأربعة التالية في كل من المتتابعتين الآتيتين ومثّل الحدود السبعة الأولى بيانيًّا:

12) $10, 7, 4, \ldots$

13) $800, 200, 50, \ldots$

مثال 1

أوجد الحدّ الحادي عشر في المتتابعة الحسابية التي فيها:

$a_1 = -15, d = 6$

$a_n = a_1 + (n-1)d$	الحدّ النوني في المتتابعة الحسابية
$a_{11} = -15 + (11-1)6$	$n = 11, a_1 = -15, d = 6$
$a_{11} = 45$	بسّط

6-2 المتتابعات والمتسلسلات الحسابية ص 130-137

أوجد الأوساط الحسابية في كلٍّ من المتتابعات الآتية:

14) $-12, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 8$

15) $15, \underline{?}, \underline{?}, 29$

16) $12, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, -8$

17) $72, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 24$

18) توفير: يوفِّر باسل 160 ريالًا كل شهرين. إذا استمر في التوفير بهذا المعدل مدَّة سنتين، فما المبلغ الذي سيوفِّره في نهاية السنتين؟

أوجد S_n كلٍّ من المتسلسلات الحسابية الآتية:

19) $a_1 = 16, a_n = 48, n = 6$

20) $a_1 = 8, a_n = 96, n = 20$

21) $9 + 14 + 19 + \cdots + 74$

22) $16 + 7 + (-2) + \cdots + (-65)$

23) مسرح: لكي يؤدِّي أيمن دوره بإتقان في مسرحية تاريخية، بدأ بالتدرب على النصِّ مرَّتين في اليوم الأول، وأربع مرَّات في اليوم الثاني، وست مرَّات في اليوم الثالث وهكذا. ما عدد المرَّات التي سيتدرَّبها في اليوم العشرين؟

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلات الحسابية الآتية:

24) $\sum_{k=5}^{21} (3k-2)$

25) $\sum_{k=0}^{10} (6k-1)$

26) $\sum_{k=4}^{12} (-2k+5)$

مثال 2

أوجد الوسطين الحسابيين بين العددين 3, 39 .

$a_n = a_1 + (n-1)d$	الحدّ النوني في المتتابعة الحسابية
$a_4 = 3 + (4-1)d$	$n = 4, a_1 = 3$
$39 = 3 + 3d$	$a_4 = 39$
$12 = d$	بسّط

الوسطان الحسابيان هما: $3 + 12 = 15, 15 + 12 = 27$

مثال 3

أوجد S_n للمتسلسلة الحسابية التي فيها:

$a_1 = 18, a_n = 56, n = 8$

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$	صيغة المجموع
$S_8 = \frac{8}{2}(18 + 56)$	$n = 8, a_1 = 18, a_n = 56$
$= 296$	بسّط

مثال 4

أوجد مجموع المتسلسلة الحسابية: $\sum_{k=3}^{15} (5k+1)$

استعمل الصيغة $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$.

في المتسلسلة 13 حدًّا، وحدُّها الأول $a_1 = 5(3) + 1 = 16$

$a_{13} = 5(15) + 1 = 76$

$S_{13} = \frac{13}{2}(16 + 76)$

$= 598$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

6-3 المتتابعات والمتسلسلات الهندسية ص 138-143

أوجد قيمة الحدّ المطلوب في كلٍّ من المتتابعات الهندسية الآتية:

27 $a_1 = 5, r = 2, a_7 = ?$

28 $a_1 = 11, r = 3, a_3 = ?$

29 $a_1 = 128, r = -\frac{1}{2}, a_5 = ?$

أوجد الأوساط الهندسية المطلوبة في كلٍّ من المتتابعات الآتية:

30 $6, \underline{?}, \underline{?}, 162$

31 $8, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 648$

32 $-4, \underline{?}, \underline{?}, 108$

33 **تخفيضات:** أعلن أحد المتاجر عن تخفيضات كبرى، فبلغت مبيعاته 2048000 ريال في اليوم الأول، ومع نفاد بعض السلع فإن مبيعاته صارت تقلُّ إلى النصف يوميًّا. إذا استمر انخفاض المبيعات بهذا المعدّل، فكم ريالًا ستكون مبيعات المتجر في اليوم الثاني عشر من التخفيضات؟

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلتين الآتيتين:

34 $\sum_{k=1}^{7} 3 \cdot (-2)^{k-1}$

35 $\sum_{k=1}^{8} -1\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$

مثال 5

أوجد الحدّ السادس في المتتابعة الهندسية التي فيها $a_1 = 9, r = 4$.

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$	الحدّ النوني في المتتابعة الهندسية
$a_6 = 9 \cdot 4^{6-1}$	$n = 6, a_6 = 9, r = 4$
$a_6 = 9216$	

مثال 6

أوجد وسطين هندسيين بين 1, 27

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$	الحدّ النوني في المتتابعة الهندسية
$a_4 = 1 \cdot r^{4-1}$	$n = 4, a_1 = 1$
$27 = r^3$	$a_4 = 27$
$3 = r$	بسّط

الوسطان الهندسيان هما: $1(3) = 3$، $3(3) = 9$.

مثال 7

أوجد مجموع حدود المتسلسلة الهندسية $\sum_{k=1}^{6} 2 \cdot (4)^{k-1}$.

$S_6 = \frac{2 - 2 \cdot 4^6}{1 - 4}$	$n = 6, a_1 = 2, r = 4$
$= \frac{-8190}{-3} = 2730$	بسّط

6-4 المتسلسلات الهندسية اللانهائية ص 145-150

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلات الهندسية اللانهائية فيما يأتي إن وجد:

36 $a_1 = 8, r = \frac{3}{4}$

37 $\frac{5}{6} - \frac{20}{18} + \frac{80}{54} - \frac{320}{162} + \ldots$

38 $\sum_{k=1}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

39 **ألعاب:** أُسقطت كرة من سطح بناية ارتفاعها $60\ ft$، فارتدَّت مسافة $\frac{2}{3}$ الارتفاع السابق. إذا استمرَّ ارتداد الكرة بهذه الطريقة، فما المسافة الكلية التي تقطعها الكرة إلى أن تتوقف؟

مثال 8

أوجد مجموع حدود المتسلسلة الهندسية اللانهائية التي فيها: $a_1 = 15, r = \frac{1}{3}$

$S = \frac{a_1}{1 - r}$	صيغة المجموع
$= \frac{15}{1 - \frac{1}{3}}$	$a_1 = 15, r = \frac{1}{3}$
$= \frac{15}{\frac{2}{3}} = 22.5$	بسّط

وزارة التعليم
Ministry of Education
1442 - 1443

6-5 نظرية ذات الحدَّين ص 152-155

أوجد مفكوك كلٍّ ممّا يأتي:

40 $(a+b)^3$

41 $(y-3)^7$

42 $(3-2z)^5$

43 $(4a-3b)^4$

44 $\left(x-\frac{1}{4}\right)^5$

أوجد قيمة الحدّ المطلوب في كلٍّ ممّا يأتي:

45 الحدّ الثالث في مفكوك $(a+2b)^8$

46 الحدّ السادس في مفكوك $(3x+4y)^7$

47 الحدّ الثاني في مفكوك $(4x-5)^{10}$

مثال 9

أوجد مفكوك $(x-3y)^4$.

$$(x-3y)^4 = x^4 + {}_4C_1x^3(-3y) + {}_4C_2x^2(-3y)^2 + {}_4C_3x(-3y)^3 + {}_4C_4(-3y)^4$$
$$= x^4 + -12x^3y + 54x^2y^2 + -108xy^3 + 81y^4$$

مثال 10

أوجد قيمة الحدّ الرابع في مفكوك $(x+y)^8$.

استعمل نظرية ذات الحدّين لكتابة المفكوك

$$(x+y)^8 = \sum_{k=0}^{8} \frac{8!}{k!(8-k)!}\, x^{8-k}y^k$$

بالنسبة للحدّ الرابع فإن $k=3$، لذلك يكون الحدّ الرابع هو

$$\frac{8!}{3!(8-3)!}\, x^{8-3}y^3 = 56x^5y^3$$

6-6 البرهان باستعمال مبدأ الاستقراء الرياضيّ ص 157-160

برهن صحة كلِّ جملة مما يأتي للأعداد الطبيعية جميعها:

48 $2+6+12+\cdots+n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

49 5^n-1 يقبل القسمة على 4 .

أعطِ مثالًا مضادًّا يُبيّن خطأ كلٍّ من الجمل الآتية، حيث n أيُّ عدد طبيعي:

50 8^n+3 يقبل القسمة على 11 .

51 $6^{n+1}-2$ يقبل القسمة على 17 .

52 n^2+2^n+4 عدد أولي .

53 $n+19$ عدد أولي.

مثال 11

برهن أن 9^n+3 يقبل القسمة على 4 لكل عدد طبيعي n

الخطوة 1 عندما $n=1$ ، فإن: $9^n+3 = 9^1+3 = 12$.
وبما أن 12 يقبل القسمة على 4 فالجملة صحيحة عندما $n=1$.

الخطوة 2 افترض أن 9^k+3 يقبل القسمة على 4 حيث k عدد صحيح موجب؛ إذن $9^k+3 = 4r$ حيث r عدد كلي.

الخطوة 3 برهن صحَّة الجملة عند $n=k+1$ ، أي برهن أنَّ $(9^{k+1}+3)$ يقبل القسمة على 4

$9^k+3 = 4r$	فرضية الاستقراء
$9^k = 4r-3$	اطرح 3 لكلا الطرفين
$9^{k+1} = 36r-27$	اضرب كلا الطرفين في 9
$9^{k+1}+3 = 36r-27+3$	أضف 3 لكلا الطرفين
$9^{k+1}+3 = 36r-24$	بسّط
$9^{k+1}+3 = 4(9r-6)$	حلّل

وبما أن r عدد كلي فإن $9r-6$ عدد كلي، وهذا يعني أن: $9^{k+1}+3$ يقبل القسمة على 4. إذن الجملة صحيحة عند $n=k+1$

إذن 9^n+3 يقبل القسمة على 4 لكل عدد صحيح موجب n .

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلتين الآتيتين إن وجد:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} 9 \cdot 2^{n-1}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (4) \cdot (0.5)^{n-1}$

3) أوجد الحدود الأربعة التالية في المتتابعة الحسابية
$81, 72, 63, \ldots$.

4) أوجد الحدّ الخامس والعشرين في المتتابعة الحسابية التي فيها
$a_1 = 9, d = 5$

5) **اختيار من متعدد:** ما الحدّ الثامن في المتتابعة الحسابية
$18, 20.2, 22.4, 24.6, \ldots$ ؟

A 26.8 **C** 31.2
B 29 **D** 33.4

6) أوجد أربعة أوساط حسابية بين $-9, 11$.

7) أوجد مجموع المتسلسلة الحسابية التي فيها
$a_1 = 11, n = 14, a_n = 22$

8) **اختيار من متعدد:** ما الحدّ التالي في المتتابعة الهندسية أدناه؟
$10, \frac{5}{2}, \frac{5}{8}, \frac{5}{32} \ldots$

A $\frac{13}{32}$ **C** $\frac{5}{128}$
B $\frac{5}{32}$ **D** $\frac{5}{8}$

9) أوجد ثلاثة أوساط هندسية بين $6, 1536$

10) أوجد مجموع حدود المتسلسلة الهندسية التي فيها
$a_1 = 15, r = \frac{2}{3}, n = 5$

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلتين الآتيتين (إن وجد):

11) $\sum_{k=2}^{12} (3k - 1)$

12) $45 + 37 + 29 + \cdots + -11$

13) اكتب الكسر العشري الدوري $0.\overline{65}$ في صورة كسر اعتيادي.

أوجد الحدود الخمسة الأولى في كلٍّ من المتتابعتين الآتيتين:

14) $a_1 = -1, a_{n+1} = 3a_n + 5$

15) $a_1 = 4, a_{n+1} = a_n + n$

16) أوجد مفكوك $(2a - 3b)^4$

17) أوجد معامل الحدّ الخامس في مفكوك $(m + 3n)^6$

18) أوجد الحدّ الرابع في مفكوك $(c + d)^9$.

برهن صحة كلٍّ من الجملتين الآتيتين، لكل عدد طبيعي n

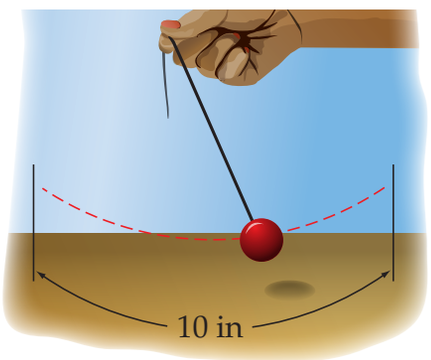
19) $1 + 6 + 36 + \cdots + 6^{n-1} = \frac{1}{5}(6^n - 1)$

20) $11^n - 1$ يقبل القسمة على 10 .

21) أوجد مثالًا مضادًّا يُبيّن خطأ الجملة الآتية، حيث n أيُّ عدد طبيعي: $2^n + 4^n$ يقبل القسمة على 4

22) **مدرسة:** إذا كان عدد طلاب الصف الأول الثانوي يساوي عدد طلاب الصف الثاني الثانوي في مدرسة ثانوية، وأراد معلم العلوم اختيار 8 طلاب عشوائيًّا من الصفين لتمثيل المدرسة في مسابقة للعلوم، فما احتمال أن يكون 5 من الطلاب الثمانية من الصف الأول الثانوي؟

23) **بندول:** يقوم سعد بتحريك بندول، بحيث تتناقص المسافة التي يقطعها البندول في كل اهتزازة بنسبة 15%. إذا كانت أول مسافة قطعها البندول 10 in، فأوجد المسافة الكلية التي يكون البندول قد قطعها عندما يتوقّف عن الحركة.



البحث عن نمط

تعتبر استراتيجية البحث عن نمط من أكثر استراتيجيات حلِّ المسألة استعمالًا. وتعدّ القدرة على تمييز النمط، ونمذجته جبريًّا، وتوسيع النمط أدوات مهمّة جدًّا في حلِّ المسألة.

استراتيجيات البحث عن نمط

خطوة 1

تعرُّف النمط.

- قارن بين الأعداد، والأشكال، والتمثيلات البيانية في النمط.
- اسأل نفسك: ما العلاقة بين حدود النمط؟
- اسأل نفسك: هل توجد عمليات مشتركة تتوصَّلُ من خلالها من حدٍّ إلى الحدّ الذي يليه في النمط؟

خطوة 2

عمّم النمط.

- باستعمال الكلمات اكتب قاعدة تصف طريقة الحصول على الحدود المختلفة في النمط.
- حدّد متغيرات، ثم اكتب عبارة جبرية لنمذجة النمط، إن كان ذلك مناسبًا.

خطوة 3

أوجد الحدود المفقودة، وتوسّع في النمط، وحُلّ المسألة.

- استعمل النمط أو القاعدة التي حصلت عليها في إيجاد الحدود المفقودة، أو في توسيع النمط لحل المسألة.
- تحقّق من إجابتك لتتأكّد من أن إجابتك منطقية.

مثال

اقرأ المسألة الآتية جيدًا، وحدِّد المطلوب فيها، ثم استعمل المعطيات لحلّها:

انظر إلى متتابعة الأشكال المربَّعة المعطاة. ما عدد المربعات التي تحتاج إليها لتكوين الشكل التاسع من المتتابعة؟

شكل 1 شكل 2 شكل 3

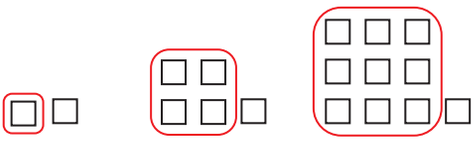
A 55 C 74

B 65 D 82

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

الخطوة 1: تعرَّف النمط.

- اقرأ المسألة بعناية. معك 3 أشكال من متتابعة، وتريد إيجاد عدد المربعات التي تحتاج إليها لعمل الشكل التاسع.
- ابحث عن نمط في الأشكال المكوّنة من مربعات. عُدّ المربعات في كل شكل، ولاحظ أن عدد المربعات في كل شكلٍ هو



$1 + 1$ $\quad$ $4 + 1$ $\quad$ $9 + 1$

$1^2 + 1$ $\quad$ $2^2 + 1$ $\quad$ $3^2 + 1$

الخطوة 2: عمّم النمط.

- أي أن عدد مربعات الشكل التالي هو $4^2 + 1$ أو 17
- اكتب العبارة الجبرية التي تُمثّل نموذجًا لهذا النمط.

التعبير اللفظي	عدد المربعات في الشكل يساوي مربع رقم الشكل زائد واحد.
متغير	افترض أن n يُمثّل رقم الشكل.
المعادلة	$a_n = n^2 + 1$

الخطوة 3: وسِّع النمط.

- استعمل العبارة التي حصلت عليها لتوسيع النمط، ثم أوجد عدد المربعات في الشكل التاسع.

$$a_9 = 9^2 + 1 = 82$$

إذن الشكل التاسع سيكون فيه 82 مربعًا. الإجابة الصحيحة هي D.

تمارين ومسائل

اقرأ المسألة. استعمل نمطًا لحلّ المسألة.

1) الأعداد أدناه متتابعة مشهورة في الرياضيات كما تعلم وهي: "متتابعة فيبوناشي". ما الحدّ التالي في هذه المتتابعة؟

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …

A 36 **B** 34 **C** 31 **D** 29

2) ما العدد المفقود في الجدول أدناه؟

n	a_n
1	0
2	2
3	6
4	12
5	??
6	30

A 17 **B** 20 **C** 18 **D** 21

وزارة التعليم
Ministry of Education

اختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1) أوجد قيمة الحدّ التالي في المتتابعة الحسابية:

7, 13, 19, 25, 31, …

A 36

B 37

C 38

D 39

2) أوجد قيمة $\sum_{k=1}^{15}(8k-1)$

A 119

B 826

C 945

D 1072

3) صيغة الحدّ النوني للمتتابعة الهندسية الممثَّلة في الجدول المجاور هي:

n	a_n
1	5
2	10
3	20
4	40
5	80

A $a_n = (5)^n$

B $a_n = 5(2)^{n-1}$

C $a_n = 2(5)^{n-1}$

D $a_n = 5(2)^n$

4) تدَّعي شركة صانعة لأحد أنواع مصافي الهواء، أن المصفاة تستطيع إزالة 90% من الشوائب في الهواء الداخل إلى المصفاة. إذا تم إدخال الكمية نفسها من الهواء إلى المصفاة 3 مرَّات متتابعة، فما نسبة الشوائب التي سوف تُزال؟

A 0.1%

B 0.01%

C 99.99%

D 99.9%

5) أيُّ المتسلسلات الهندسية الآتية متباعدة؟

A $\sum_{k=1}^{\infty}4\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}$

B $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$

C $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{7}{6}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

D $\sum_{k=1}^{\infty}(-2)\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$

6) إذا علمت أن $x-5$ عامل من عوامل كثيرة الحدود x^3-7x^2+7x+k ، فما قيمة k ؟

A 1

B 7

C 15

D 35