الفصل 5

العلاقات والدوالّ النسبية
Rational Functions and Relations

فيما سبق:

درست حل المعادلات التربيعية: بالتحليل إلى العوامل، وبيانيًا.

والآن:

- أتعرّف العبارات النسبية وأبسطها.
- أمثّل دوالّ نسبية بيانيًا.
- أحل مسائل التغيّر الطردي والتغيّر المشترك والتغيّر العكسي والتغيّر المركب.
- أحل معادلات ومتباينات نسبية.

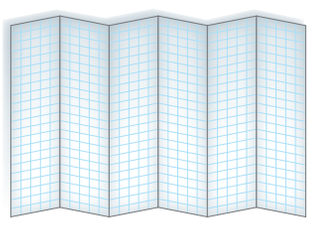
لماذا؟

سفر: يمكن استعمال الدوالّ النسبية للتعبير عن المسافة، والزمن، والسرعة، عند السفر بالسيارة، أو بالطائرة، فإذا أردت الوصول إلى وجهة معينة في زمن معين، فيمكنك استعمال العلاقات النسبية للتوصل إلى السرعة المناسبة التي يجب أن تسير بها لتحقق هدفك.

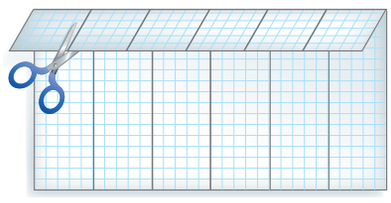
المطويات منظم أفكار

العلاقات والدوالّ النسبية: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول العلاقات والدوالّ النسبية، مبتدئًا بورقة رسم بياني.

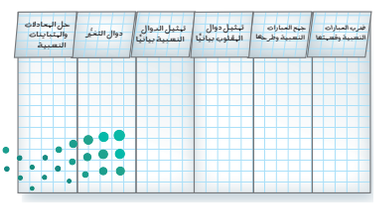
1. **اطو** الورقة عرضيًا ست طيات متساوية.



2. **اطو** الحافة العلوية للورقة بعرض 2cm، ثم قصّ 6 أشرطة مبتدئًا من الحافة حتى خط الطيّ العرضي.



3. **اكتب** عناوين الدروس على الجهات الخارجية العلوية لأشرطة الطيات الست، واستعمل الجهات الداخلية للطيات لكتابة التعريفات والملاحظات.



وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

التهيئة للفصل الخامس

أجب عن الاختبار الآتي: انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

حُلّ كلَّ معادلة مما يأتي، واكتب الحل في أبسط صورة. (تستعمل مع الدرس 1-5)

1) $\frac{5}{14}=\frac{1}{3}x$

2) $\frac{1}{8}m=\frac{7}{3}$

3) $\frac{8}{5}=\frac{1}{4}k$

4) $\frac{10}{9}p=7$

5) **شاحنات:** استهلكت شاحنة $\frac{1}{3}$ سعة خزان وقودها الممتلئ في إحدى الرحلات، فإذا بقي في الخزان 80 لترًا من الوقود عند نهاية الرحلة، فما سعة خزان وقود الشاحنة؟

بسّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي: (تستعمل مع الدرس 2-5)

6) $\frac{3}{4}-\frac{7}{8}$

7) $\frac{8}{9}-\frac{7}{6}+\frac{1}{3}$

8) $\frac{9}{10}-\frac{4}{15}+\frac{1}{3}$

9) $\frac{10}{3}+\frac{5}{6}+3$

10) **دقيق:** تستعمل علياء $\frac{2}{3}$ كوب من الدقيق لعمل كعكة الفراولة، في حين تستعمل $\frac{3}{4}$ كوب لعمل كعكة الفانيليا. كم كوبًا من الدقيق تحتاج لعمل الكعكتين؟

حُلّ كلَّ تناسب مما يأتي: (تستعمل مع الدرس 4-5)

11) $\frac{9}{12}=\frac{p}{36}$

12) $\frac{9}{18}=\frac{6}{m}$

13) $\frac{2}{7}=\frac{5}{k}$

14) **تسوق:** تسوق أحمد من متجر في موسم التخفيضات، فاشترى ملابس سعرها الأصلي 550 ريالًا، ودفع مبلغ 440 ريالًا بعد الخصم. إذا أراد شراء ملابس أخرى من المتجر نفسه سعرها الأصلي 350 ريالًا وبنسبة التخفيض نفسها، فكم يدفع؟

مراجعة سريعة

مثال 1

حُلّ المعادلة: $\frac{9}{11}=\frac{7}{8}r$، واكتب الحل في أبسط صورة.

$\frac{9}{11}=\frac{7}{8}r$ — المعادلة الأصلية

$\frac{72}{11}=7r$ — اضرب كل من الطرفين في العدد 8

$\frac{72}{77}=r$ — اقسم كل من الطرفين على العدد 7

بما أن القاسم المشترك الأكبر للعددين 77 , 72 هو 1، فإن الحل في أبسط صورة.

مثال 2

بسّط العبارة: $\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-\frac{5}{6}$.

$\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-\frac{5}{6}$ — العبارة الأصلية

$=\frac{1}{3}\left(\frac{4}{4}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{3}{3}\right)-\frac{5}{6}\left(\frac{2}{2}\right)$ — المضاعف المشترك الأصغر للمقامات 6, 4, 3 هو العدد 12

$=\frac{4}{12}+\frac{9}{12}-\frac{10}{12}$ — بسّط

$=\frac{3}{12}$ — اجمع، ثم اطرح

$=\frac{3\div 3}{12\div 3}=\frac{1}{4}$ — بسّط

مثال 3

حُلّ التناسب: $\frac{5}{8}=\frac{u}{11}$.

$\frac{5}{8}=\frac{u}{11}$ — المعادلة الأصلية

$5(11)=8u$ — بالضرب التبادلي

$55=8u$ — بسّط

$\frac{55}{8}=u$ — اقسم كل من الطرفين على 8

بما أن القاسم المشترك الأكبر للعددين 8 ,55 هو 1، فإن الناتج في أبسط صورة.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

5-1

ضرب العبارات النسبية وقسمتها
Multiplying and Dividing Rational Expressions

فيما سبق:
درست تحليل كثيرات الحدود. (مهارة سابقة)

والآن:
- أتعرف العبارات النسبية.
- أبسّط عبارات نسبية.
- أبسّط كسورًا مركّبة.

المفردات:
العبارة النسبية
rational expression
الكسر المركّب
complex fraction

لماذا؟

يستطيع الغواصون الوصول إلى أعماق تزيد على 33 ft باستعمال أجهزة التنفس تحت الماء، وتعطي الدالّة النسبية $T(d) = \frac{1700}{d - 33}$ أكبر زمن يمكن للغواص قضاؤه في هذه الأعماق، بحيث يبقى قادرًا على الصعود إلى السطح بمعدل ثابت دون توقف، حيث $T(d)$ زمن الغوص بالدقائق، و d العمق بالأقدام.

تبسيط العبارات النسبية: تُسمى النسبة بين كثيرتي حدود مثل: $\frac{1700}{d - 33}$ **"عبارة نسبية"**.

بما أن المتغيِّرات في الجبر تمثِّل أعدادًا حقيقية في أغلب الأحيان، فإن العمليات على العبارات النسبية تشبه العمليات على الأعداد النسبية. وكما في تبسيط الكسور فإنه عند تبسيط العبارات النسبية يتم قسمة كلٍّ من البسط والمقام على القاسم المشترك الأكبر (GCF) لهما.

$$\frac{8}{12} = \frac{2 \cdot \cancel{4}}{3 \cdot \cancel{4}} = \frac{2}{3}$$

1 فوق $\cancel{4}$ — GCF = 4

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 6x + 5} = \frac{(x - 3)(\cancel{x - 1})}{(x - 5)(\cancel{x - 1})} = \frac{x - 3}{x - 5}$$

1 فوق $\cancel{x - 1}$ — GCF = $x - 1$

قراءة الرياضيات

GCF
الرمز (GCF) يمثِّل اختصارًا لـ:
Greatest Common Factor
القاسم (العامل) المشترك الأكبر

مثال 1 تبسيط عبارة نسبية

بسّط العبارة: $\frac{5x(x^2 + 4x + 3)}{(x - 6)(x^2 - 9)}$

تحقق من فهمك

(1A) $\frac{4y(y - 3)(y + 4)}{y(y^2 - y - 6)}$

(1B) $\frac{2z(z + 5)(z^2 + 2z - 8)}{(z - 1)(z + 5)(z - 2)}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

تكون العبارة النسبية غير معرَّفة عند قيم المتغيِّر التي تجعل مقامها صفرًا.

مثال 2 على اختبار

ما قيم x التي تجعل العبارة $\frac{x^2(x^2-5x-14)}{4x(x^2+6x+8)}$ غير معرَّفة؟

A $-2, -4$ **B** $-2, 7$ **C** $0, -2, -4$ **D** $0, -4, 7$

تحقق من فهمك

2) ما قيم x التي تجعل العبارة $\frac{x(x^2+8x+12)}{-6(x^2-3x-10)}$ غير معرَّفة؟

A $5, 0$ **B** $5, -2$ **C** $0, -2$ **D** $5, -6$

في بعض الأحيان، يمكنك إخراج العدد 1- كعامل مشترك من البسط أو المقام للمساعدة في تبسيط العبارة النسبية.

مثال 3 تبسيط عبارة نسبية بإخراج 1– كعامل مشترك

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

a) $\frac{(4w^2-3wy)(w+y)}{(3y-4w)(5w+y)}$

b) $\frac{x^3-y^3}{y-x}$

تحقق من فهمك

3A) $\frac{(xz-4z)}{z^2(4-x)}$

3B) $\frac{8a^3-b^3}{b-2a}$

قراءة الرياضيات

قيم x التي تجعل العبارة غير معرَّفة

لإيجاد قيم x التي تكون العبارة عندها غير معرَّفة، استعمل العبارة المعطاة قبل تبسيطها.

إرشادات للاختبار

بدائل السؤال

يمكنك في بعض الأحيان اختصار الوقت بحذف بعض البدائل غير المنطقية، ثم الاختيار من بين البدائل المتبقية.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

تستعمل طريقة ضرب الكسور أو قسمتها في ضرب العبارات النسبية أو قسمتها؛ فعندما تضرب كسرين فإنك تضرب البسط في البسط والمقام في المقام. أما عند قسمة كسرين، فإنك تضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه، أو تضرب المقسوم في النظير الضربي للمقسوم عليه.

والجدول الآتي يلخصُ قواعد ضرب العبارات النسبية وقسمتها:

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

ضرب العبارات النسبية

التعبير اللفظي: لضرب عبارتين نسبيتين، اضرب البسط في البسط والمقام في المقام.

الرموز: إذا كانت $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ عبارتين نسبيتين، حيث $b \neq 0, d \neq 0$، فإنَّ $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

مثال:
$$\frac{2}{9} \cdot \frac{15}{4} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{1}{\cancel{3}} \cdot 5}{\underset{1}{\cancel{3}} \cdot 3 \cdot \underset{1}{\cancel{2}} \cdot 2} = \frac{5}{3 \cdot 2} = \frac{5}{6}$$

قسمة العبارات النسبية

التعبير اللفظي: لقسمة عبارة نسبية على أخرى، اضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه.

الرموز: إذا كانت $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ عبارتين نسبيتين، حيث $b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$، فإنَّ

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

مثال:
$$\frac{3}{5} \div \frac{6}{35} = \frac{3}{5} \cdot \frac{35}{6} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot \overset{1}{\cancel{5}} \cdot 7}{\underset{1}{\cancel{5}} \cdot 2 \cdot \underset{1}{\cancel{3}}} = \frac{7}{2}$$

مثال 4 ضرب عبارات نسبية وقسمتها

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

a) $\frac{6c}{5d} \cdot \frac{15cd^2}{8a}$

b) $\frac{18xy^3}{7a^2b^2} \div \frac{12x^2y}{35a^2b}$

إرشادات للدراسة

العوامل المشتركة

تأكد من اختصار العوامل المشتركة في كلٍّ من البسط والمقام.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

تحقق من فهمك

(4A $\frac{12c^3d^2}{21ab} \cdot \frac{14a^2b}{8c^2d}$

(4B $\frac{6xy}{15ab^2} \cdot \frac{21a^3}{18x^4y}$

(4C $\frac{16mt^2}{21a^4b^3} \div \frac{24m^3}{7a^2b^2}$

(4D $\frac{12x^4y^2}{40a^4b^4} \div \frac{6x^2y^4}{16a^2x}$

في بعض الأحيان عليك أن تحلّل البسط أو المقام أو كليهما قبل تبسيط ناتج ضرب عبارات نسبية أو قسمتها.

إرشادات للدراسة

تحليل كثيرات الحدود

عند تبسيط عبارات نسبية قد تظهر عوامل إحدى كثيرتي الحدود في كثيرة الحدود الأخرى، ويتم اختصارها كما في المثال 5a.

مثال 5 عبارات نسبية تتضمن كثيرات حدود في كلٍّ من بسطها ومقامها

بسّط كلًّا من العبارتين الآتيتين:

(a $\frac{x^2 - 6x - 16}{x^2 - 16x + 64} \cdot \frac{x - 8}{x^2 + 5x + 6}$

(b $\frac{x^2 - 16}{12y + 36} \div \frac{x^2 - 12x + 32}{y^2 - 3y - 18}$

تحقق من فهمك

(5A $\frac{8x - 20}{x^2 + 2x - 35} \cdot \frac{x^2 - 7x + 10}{4x^2 - 16}$

(5B $\frac{x^2 - 9x + 20}{x^2 + 10x + 21} \div \frac{x^2 - x - 12}{6x + 42}$

تبسيط الكسور المركّبة: الكسر المركّب يحوي بسطه ومقامه أو أحدهما كسورًا، والعبارات الآتية كسور مركّبة:

$\frac{\frac{c}{6}}{5d}$ $\quad \frac{\frac{8}{x}}{x-2}$ $\quad \frac{\frac{x-3}{8}}{\frac{x-2}{x+4}}$ $\quad \frac{\frac{4}{a}+6}{\frac{12}{a}-3}$

ولتبسيط كسر مركّب، اكتبه أولًا على صورة قسمة عبارتين.

مثال 6 تبسيط الكسور المركبة

بسّط كلًّا من العبارتين الآتيتين:

a) $\dfrac{\dfrac{a+b}{4}}{\dfrac{a^2+b^2}{4}}$

b) $\dfrac{\dfrac{x^2}{x^2-y^2}}{\dfrac{4x}{y-x}}$

تحقق من فهمك

6A) $\dfrac{\dfrac{(x-2)^2}{2(x^2-5x+4)}}{\dfrac{x^2-4}{4x-10}}$

6B) $\dfrac{\dfrac{x^2-y^2}{y^2-49}}{\dfrac{y-x}{y+7}}$

تأكـد

مثال 1 بسّط كلًّا من العبارتين الآتيتين:

1) $\dfrac{x^2-5x-24}{x^2-64}$

2) $\dfrac{c+d}{3c^2-3d^2}$

مثال 2

3) اختيار من متعدد: حدِّد قيم x التي تجعل العبارة $\dfrac{x+7}{x^2-3x-28}$ غير معرَّفة.

A $-7, 4$ **B** $4, 7$ **C** $-7, 4, 7$ **D** $-4, 7$

الأمثِلة 3-6 بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

4) $\dfrac{y^2+3y-40}{25-y^2}$

5) $\dfrac{a^2x-b^2x}{by-ay}$

6) $\dfrac{x^3+27}{3x+9}$

7) $\dfrac{27x^2y^4}{16yz^3} \cdot \dfrac{8z}{9xy^3}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

8) $\dfrac{12x^3y}{13ab^2} \div \dfrac{36xy^3}{26b}$

9) $\dfrac{x^2-4x-21}{x^2-6x+8} \cdot \dfrac{x-4}{x^2-2x-35}$

10) $\dfrac{\dfrac{a^3b^3}{xy^4}}{\dfrac{a^2b}{x^2y}}$

11) $\dfrac{\dfrac{4x}{x+6}}{\dfrac{x^2-3x}{x^2+3x-18}}$

12) $\dfrac{a^2-b^2}{3a^2-6a+3} \div \dfrac{4a+4b}{a^2-1}$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

13) $\dfrac{x(x-3)(x+6)}{x^2+x-12}$

14) $\dfrac{y^2(y^2+3y+2)}{2y(y-4)(y+2)}$

15) $\dfrac{(x^2-9)(x^2-z^2)}{4(x+z)(x-3)}$

16) $\dfrac{(x^2-16x+64)(x+2)}{(x^2-64)(x^2-6x-16)}$

مثال 2

17) اختيار من متعدد: حدِّد قيم x التي تجعل العبارة $\dfrac{(x-3)(x+6)}{(x^2-7x+12)(x^2-36)}$ غير معرَّفة.

A $-6, 3$ **B** $4, 6$ **C** $-6, 6$ **D** $-6, 3, 4, 6$

الأمثِّلة 3-6 بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

18) $\dfrac{x^2-5x-14}{28+3x-x^2}$

19) $\dfrac{x^3-9x^2}{x^2-3x-54}$

20) $\dfrac{16-c^2}{c^2+c-20}$

21) $\dfrac{3-3y}{y^3-1}$

22) $\dfrac{3ac^3f^3}{8a^2bcf^4} \cdot \dfrac{12ab^2c}{18ab^3c^2f}$

23) $\dfrac{14xy^2z^3}{21w^4x^2yz} \cdot \dfrac{7wxyz}{12w^2y^3z}$

24) $\dfrac{64a^2b^5}{35b^2c^3f^4} \div \dfrac{12a^4b^3c}{70abcf^2}$

25) $\dfrac{9x^2yz}{5z^4} \div \dfrac{12x^4y^2}{50xy^4z^2}$

26) $\dfrac{y^2+8y+15}{y-6} \cdot \dfrac{y^2-9y+18}{y^2-9}$

27) $\dfrac{c^2-6c-16}{c^2-d^2} \div \dfrac{c^2-8c}{c+d}$

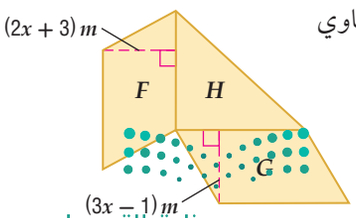
28) $\dfrac{\dfrac{x^2-9}{6x-12}}{\dfrac{x^2+10x+21}{x^2-x-2}}$

29) $\dfrac{\dfrac{y-x}{z^3}}{\dfrac{x-y}{6z^2}}$

30) $\dfrac{\dfrac{a^2-b^2}{b^3}}{\dfrac{b^2-ab}{a^2}}$

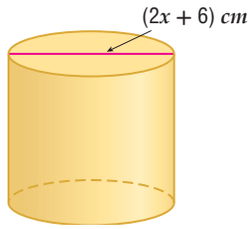
31) $\dfrac{\dfrac{x-y}{a+b}}{\dfrac{x^2-y^2}{b^2-a^2}}$

32) هندسة: في الشكل المجاور، إذا كانت مساحة متوازي الأضلاع F تساوي $(8x^2+10x-3)\text{m}^2$، وارتفاعه $(2x+3)\text{m}$، ومساحة متوازي الأضلاع G تساوي $(6x^2+13x-5)\text{m}^2$، وارتفاعه $(3x-1)\text{m}$، فأوجد مساحة المثلَّث القائم الزاوية H.

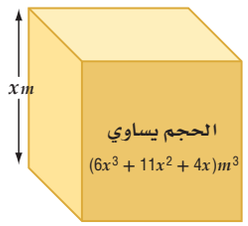


وزارة التعليم
Ministry of Education

33) هندسة: إذا كان حجم الأسطوانة في الشكل أدناه $(x^2 - 3x - 18)(x + 3)\pi \text{ cm}^3$، فأوجد ارتفاعها.



34) هندسة: يمكن استعمال كثيرة الحدود $(6x^3 + 11x^2 + 4x)\text{m}^3$ للتعبير عن حجم الصندوق في الشكل أدناه الذي له شكل منشور متوازي مستطيلات، حيث x ارتفاع الصندوق.



a) أوجد بعدي الصندوق الآخرين.

b) أوجد النسبة بين أبعاد الصندوق الثلاثة عندما $x = 2$.

c) هل النسبة بين أبعاد الصندوق الثلاثة ثابتة لكلِّ قيم x ؟

الربط بالحياة

يُعد تلوث مياه البحار بالنفط من أخطر الملوثات في عصرنا؛ وذلك لصعوبة مكافحته، وأثره الضار على البيئة وصحة الإنسان.

35) تلوث: تمثِّل الدالّة $T(x) = \frac{0.4(x^2 - 2x)}{x^3 + x^2 - 6x}$ سُمْك بقعة نفط تسربت من إحدى ناقلات النفط، حيث T سُمك البقعة التي تبعد x m عن مكان التسرب وتقاس بالمتر.

a) اكتب الدالّة في أبسط صورة.

b) ما سمك البقعة التي تبعد 100 m عن مكان التسرب؟

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

36) $\frac{x^2 - 16}{3x^3 + 18x^2 + 24x} \cdot \frac{x^3 - 4x}{2x^2 - 7x - 4}$

37) $\frac{3x^2 - 17x - 6}{4x^2 - 20x - 24} \div \frac{6x^2 - 7x - 3}{2x^2 - x - 3}$

38) $\frac{9 - x^2}{x^2 - 4x - 21} \cdot \left(\frac{2x^2 + 7x + 3}{2x^2 - 15x + 7}\right)^{-1}$

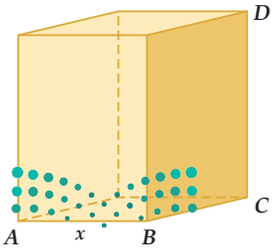
39) $\left(\frac{3xy^3z}{2a^2bc^2}\right)^3 \cdot \frac{16a^4b^3c^5}{15x^7yz^3}$

40) $\left(\frac{2xy^3}{3abc}\right)^{-2} \div \frac{6a^2b}{x^2y^4}$

41) $\frac{\frac{2x^2 + 7x - 30}{-6x^2 + 13x + 5}}{\frac{4x^2 + 12x - 72}{3x^2 - 11x - 4}}$

42) $\frac{\frac{4x^2 - 1}{3x^3 - 6x^2 - 24x}}{\frac{12x^2 + 12x - 9}{-2x^2 + 5x + 12}}$

43) هندسة: مساحة قاعدة المنشور (متوازي المستطيلات) المجاور تساوي 20 cm^2 .



a) أوجد طول الضلع $\overline{BC}$ بدلالة x.

b) إذا كان $DC = 3BC$، فأوجد مساحة المنطقة المظللة بدلالة x.

c) أوجد حجم المنشور بدلالة x.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

44) $\dfrac{x^2+4x-32}{2x^2+9x-5} \cdot \dfrac{3x^2-75}{3x^2-11x-4} \div \dfrac{6x^2-18x-60}{x^3-4x}$

45) $\dfrac{8x^2+10x-3}{3x^2-12x-36} \div \dfrac{2x^2-5x-12}{3x^2-17x-6} \cdot \dfrac{4x^2+3x-1}{4x^2-40x+24}$

46) $\dfrac{4x^2-9x-9}{3x^2+6x-18} \div \dfrac{-2x^2+5x+3}{x^2-4x-32} \div \dfrac{8x^2+10x+3}{6x^2-6x-12}$

47) **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذا السؤال العلاقة بين العبارة النسبية قبل تبسيطها وبعده.

a) جبريًا: بسّط العبارة: $\dfrac{x^2-5x+4}{x-4}$.

b) جدوليًا: إذا كانت $f(x)=\dfrac{x^2-5x+4}{x-4}$، فاستعمل العبارة التي حصلت عليها في الفرع (a) لكتابة الدالّة $g(x)$ المرتبطة بالدالّة $f(x)$، ثم استعمل الحاسبة البيانية لعمل جدول لقيم x لكلّتا الدالّتين، حيث $0 \le x \le 10$.

c) تحليليًا: أوجد قيمة كلٍّ من $f(4)$، و $g(4)$، ثم وضِّح الفرق بين القيمتين.

d) لفظيًا: ماذا تستنتج بالنسبة للعبارة الأصلية في الفرع (a) والدالّة $g(x)$؟

مسائل مهارات التفكير العليا

48) **تبرير:** قارن بين كلٍّ من $\dfrac{(x-6)(x+2)(x+3)}{x+3}$ و $(x-6)(x+2)$.

49) **اكتشف الخطأ:** قام كلٌّ من علي ومحمد بتبسيط العبارة $\dfrac{x+y}{x-y} \div \dfrac{4}{y-x}$. أيُّهما إجابته صحيحة؟ فسِّر إجابتك.

علي

$$\frac{x+y}{x-y} \div \frac{4}{y-x} = \frac{x-y}{x+y} \cdot \frac{4}{y-x}$$
$$= \frac{-4}{x+y}$$

محمد

$$\frac{x+y}{x-y} \div \frac{4}{y-x} = \frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{y-x}{4}$$
$$= -\frac{x+y}{4}$$

50) **تحدٍّ:** ما قيمة y التي تجعل الجملة $\dfrac{x-6}{x+3} \cdot \dfrac{y}{x-6} = x-2$ صحيحة دائمًا، عدا عند $x=6$ و $x=-3$؟

51) **تبرير:** هل الجملة الآتية صحيحة دائمًا، أم صحيحة أحيانًا، أم غير صحيحة أبدًا؟ فسِّر إجابتك.
"العبارة النسبية التي تتضمن متغيرًا في المقام تكون معرَّفة لجميع الأعداد الحقيقية".

52) **مسألة مفتوحة:** اكتب عبارة نسبية ناتج تبسيطها $\dfrac{x-1}{x+4}$.

53) **اكتب:** إذا علمت أن ناتج تبسيط العبارة النسبية $\dfrac{x^2+3x}{4x}$ هو $\dfrac{x+3}{4}$. فوضِّح لماذا لا تكون هذه العبارة معرَّفة لجميع قيم x؟

تدريب على اختبار

54) احتمال: إذا رمي مكعب مرقم من 1-6 مرة واحدة، فما احتمال ظهور عدد أقل من 4 ؟

A $\frac{1}{6}$ **C** $\frac{1}{2}$

B $\frac{1}{3}$ **D** $\frac{2}{3}$

55) ما أبسط صورة للعبارة النسبية $\frac{5-c}{c^2-c-20}$ ؟

A $\frac{5-c}{c-4}$ **C** $\frac{5-c}{c+4}$

B $\frac{1}{c+4}$ **D** $-\frac{1}{c+4}$

مراجعة تراكمية

حُلّ كلًّا من المعادلتين الآتيتين:

56) $\sqrt{x-8}+5=7$ (مهارة سابقة)

57) $\sqrt[3]{n+8}-6=-3$ (مهارة سابقة)

58) بسط العبارة $\frac{h^{\frac{1}{2}}+1}{h^{\frac{1}{2}}-1}$ (مهارة سابقة)

بسّط كلًّا مما يأتي: (مهارة سابقة)

59) $(2a+3b)+(8a-5b)$

60) $(x^2-4x+3)-(4x^2+3x-5)$

61) $(5y+3y^2)+(-8y-6y^2)$

62) $2x(3y+9)$

63) $(x+6)(x+3)$

64) $(x+1)(x^2-2x+3)$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

5-2

جمع العبارات النسبية وطرحها
Adding and Subtracting Rational Expressions

فيما سبق:
درست جمع كثيرات حدود وطرحها. (مهارة سابقة)

والآن:
- أجد المضاعف المشترك الأصغر (LCM) لكثيرات حدود.
- أجمع عبارات نسبية وأطرحها.

لماذا؟

عندما نكون في الشارع وتقترب سيارة إطفاء، نسمع صفيرها وهي تقترب منا بتردد أعلى؛ لأن طول موجة الصوت ينضغط إلى حدٍّ ما بفعل سرعة قدومها في اتجاهنا، وبعد أن تتجاوزنا متباعدة عنا، نسمع صوت صفيرها بتردد منخفض؛ لأن طول موجتها يزداد استطالة. ويعرف ذلك بتأثير دوبلر (Doppler) . ويمكن تمثيل هذه الظاهرة بالعبارة النسبية $f_s\left(\frac{v}{v-v_s}\right)$ ، حيث f_s تردد صوت صفير سيارة الإطفاء، و v سرعة الصوت في الهواء، و v_s سرعة سيارة الإطفاء.

المضاعف المشترك الأصغر (LCM) لكثيرات الحدود: تمامًا كما في الأعداد النسبية التي على الصورة الكسرية، فعند جمع عبارتين نسبيتين بمقامين مختلفين أو طرحهما، يجب أن تجد أولًا المضاعف المشترك الأصغر (LCM) للمقامين.

ولإيجاد (LCM) لعددين أو لكثيرتي حدود أو أكثر، يجب أن تُحلل كلًّا منها إلى عواملها الأولية أولًا، ثم تضرب جميع العوامل التي لها الأس الأكبر.

الأعداد	كثيرات الحدود
$\frac{5}{6}+\frac{4}{9}$	$\frac{3}{x^2-3x+2}+\frac{5}{2x^2-2}$
LCM للعددين 6, 9	$x^2-3x+2, 2x^2-2$ لكثيرتي الحدود LCM
$6 = 2 \cdot 3$	$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$
$9 = 3 \cdot 3$	$2x^2-2=2\cdot(x-1)(x+1)$
$\text{LCM} = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$	$\text{LCM} = 2(x-1)(x-2)(x+1)$

قراءة الرياضيات
LCM
الرمز (LCM) يمثِّل اختصارًا لـ: Least Common Multiple (المضاعف المشترك الأصغر)

مثال 1 LCM لوحيدات الحد وكثيرات الحدود

أوجد LCM لكلِّ مجموعة من كثيرات الحدود ممَّا يأتي:

a $6xy, 15x^2, 9xy^4$

b $y^4+8y^3+15y^2 , y^2-3y-40$

تحقق من فهمك

1A $12a^2b, 15abc, 8b^3c^4$

1B $4a^2-12a-16, a^3-9a^2+20a$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

جمع العبارات النسبية وطرحها: عند جمع عبارتين نسبيتين أو طرحهما يجب أن نوحِّد مقاميهما، تمامًا كما في جمع الكسور وطرحها.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

جمع العبارات النسبية وطرحها

التعبير اللفظي: لجمع العبارات النسبية أو طرحها، أعد كتابة العبارات بحيث تكون مقاماتها متساوية، ثم اجمع أو اطرح.

الرموز: لأي عبارتين نسبيتين $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$، حيث $b \neq 0, d \neq 0$، فإنَّ:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd} \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}-\frac{bc}{bd}=\frac{ad-bc}{bd}$$

ومن الأفضل أن يكون المقام المشترك للمقامات هو (LCM).

مثال:
$$\frac{2}{5}\pm\frac{1}{3}=\frac{2\cdot3}{5\cdot3}\pm\frac{5\cdot1}{5\cdot3}=\frac{2\cdot3\pm5\cdot1}{5\cdot3}$$

مثال 2 جمع عبارات نسبية مقاماتها وحيدات حد وطرحها

بسّط العبارة: $\frac{3y}{2x^3}+\frac{5z}{8xy^2}$

إرشادات للدراسة

تبسيط العبارات النسبية

يمكن تبسيط العبارة النسبية الناتجة عن جمع أو طرح عبارتين نسبيتين في بعض الأحيان.

تحقق من فهمك

(2A) $\frac{4}{5a^3b^2}+\frac{9c}{10ab}$

(2B) $\frac{3a^2}{16b^2}-\frac{8x}{5a^3b}$

يستعمل LCM أيضًا لجمع أو طرح عبارات نسبية مقاماتها كثيرات حدود.

مثال 3 جمع عبارات نسبية مقاماتها كثيرات حدود وطرحها

بسِّط العبارة: $\frac{5}{6x-18}-\frac{x-1}{4x^2-14x+6}$

تحقق من فهمك

(3A) $\frac{x-1}{x^2-x-6}-\frac{4}{5x+10}$

(3B) $\frac{x-8}{4x^2+21x+5}+\frac{6}{12x+3}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

من طرائق تبسيط الكسور المركَّبة تبسيط كلٍّ من البسط والمقام على حدة، ثم تبسيط العبارة الناتجة.

مثال 4 تبسيط الكسور المركَّبة بتبسيط كلٍّ من البسط والمقام على حدة

بسّط العبارة $\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{x}{y}}$

إرشادات للدراسة

حدود غير معرَّفة

تذكّر أن هناك قيودًا على المتغيرات في المقام.

تحقق من فهمك

(4A) $\dfrac{1-\frac{y}{x}}{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}}$

(4B) $\dfrac{\frac{c}{d}-\frac{d}{c}}{\frac{d}{c}+2}$

وهناك طريقة أخرى لتبسيط الكسور المركّبة هي إيجاد LCM لمقامات البسط والمقام، ثم اختصارها بضرب كلٍّ من بسط العبارة ومقامها في LCM .

مثال 5 تبسيط الكسور المركَّبة بإيجاد (LCM) للمقامات

بسّط العبارة $\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{x}{y}}$

تحقق من فهمك

(5A) $\dfrac{1+\frac{2}{x}}{\frac{3}{y}-\frac{4}{x}}$

(5B) $\dfrac{\frac{1}{d}-\frac{d}{c}}{\frac{1}{c}+6}$

(5C) $\dfrac{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}}{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}}$

(5D) $\dfrac{\frac{a}{b}+1}{1-\frac{b}{a}}$

تأكـد

مثال 1 أوجد LCM لكلِّ مجموعة من كثيرات الحدود ممَّا يأتي:

1) $16x, 8x^2y^3, 5x^3y$

2) $7a^2, 9ab^3, 21abc^4$

3) $3y^2 - 9y, y^2 - 8y + 15$

4) $x^3 - 6x^2 - 16x, x^2 - 4$

المثالان 3 , 2 بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

5) $\frac{12y}{5x} + \frac{5x}{4y^3}$

6) $\frac{5}{6ab} + \frac{3b^2}{14a^3}$

7) $\frac{7b}{12a} - \frac{1}{18ab^3}$

8) $\frac{y^2}{8c^2d^2} - \frac{3x}{14c^4d}$

9) $\frac{4x}{x^2 + 9x + 18} + \frac{5}{x + 6}$

10) $\frac{8}{y - 3} + \frac{2y - 5}{y^2 - 12y + 27}$

11) $\frac{4}{3x + 6} - \frac{x + 1}{x^2 - 4}$

12) $\frac{3a + 2}{a^2 - 16} - \frac{7}{6a + 24}$

المثالان 5 , 4 بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

13) $\frac{4 + \frac{2}{x}}{3 - \frac{2}{x}}$

14) $\frac{6 + \frac{4}{y}}{2 + \frac{6}{y}}$

15) $\frac{\frac{3}{x} + \frac{2}{y}}{1 + \frac{4}{y}}$

16) $\frac{\frac{2}{b} + \frac{5}{a}}{\frac{3}{a} - \frac{8}{b}}$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 أوجد LCM لكلِّ مجموعة من كثيرات الحدود ممَّا يأتي:

17) $24cd, 40a^2c^3d^4, 15abd^3$

18) $4x^2y^3, 18xy^4, 10xz^2$

19) $x^2 - 9x + 20, x^2 + x - 30$

20) $6x^2 + 21x - 12, 4x^2 + 22x + 24$

المثالان 3 , 2 بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

21) $\frac{5a}{24cf^4} + \frac{a}{36bc^4f^3}$

22) $\frac{4b}{15x^3y^2} - \frac{3b}{35x^2y^4z}$

23) $\frac{5b}{6a} + \frac{3b}{10a^2} + \frac{2}{ab^2}$

24) $\frac{4}{3x} + \frac{8}{x^3} + \frac{2}{5xy}$

25) $\frac{8}{3y} + \frac{2}{9} - \frac{3}{10y^2}$

26) $\frac{1}{16a} + \frac{5}{12b} - \frac{9}{10b^3}$

27) $\frac{8}{x^2 - 6x - 16} + \frac{9}{x^2 - 3x - 40}$

28) $\frac{6}{y^2 - 2y - 35} + \frac{4}{y^2 + 9y + 20}$

29) $\frac{12}{3y^2 - 10y - 8} - \frac{3}{y^2 - 6y + 8}$

30) $\frac{6}{2x^2 + 11x - 6} - \frac{8}{x^2 + 3x - 18}$

31) $\frac{2x}{4x^2 + 9x + 2} + \frac{3}{2x^2 - 8x - 24}$

32) $\frac{4x}{3x^2 + 3x - 18} - \frac{2x}{2x^2 + 11x + 15}$

المثالان 5 , 4 بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

33) $\frac{\frac{2}{x - 3} + \frac{3x}{x^2 - 9}}{\frac{3}{x + 3} - \frac{4x}{x^2 - 9}}$

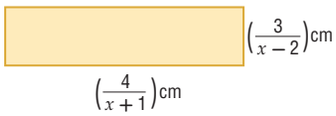
34) $\frac{\frac{4}{x + 5} + \frac{9}{x - 6}}{\frac{5}{x - 6} - \frac{8}{x + 5}}$

35) $\frac{\frac{5}{x + 6} - \frac{2x}{2x - 1}}{\frac{x}{2x - 1} + \frac{4}{x + 6}}$

36) $\frac{\frac{8}{x - 9} - \frac{x}{3x + 2}}{\frac{3}{3x + 2} + \frac{4x}{x - 9}}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

37) هندسة: أوجد محيط المستطيل في الشكل المجاور.

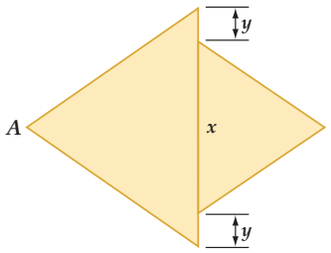


38) أحياء: يمكن قياس PH أو درجة الحموضة A في فم شخص بعد تناوله الطعام باستعمال الصيغة $A = \frac{20.4t}{t^2+36} + 6.5$، حيث t عدد الدقائق التي مرّت بعد تناول الطعام.

a) بسّط الصيغة السابقة.

b) أوجد درجة الحموضة في فم شخص بعد مُضِيِّ 30 min على تناوله الطعام.

39) هندسة: إذا كان كلٌّ من المثلَّثين في الشكل المجاور متطابق الضلعين، وكانت مساحة المثلَّث الأصغر $200\ cm^2$، ومساحة المثلَّث الأكبر $300\ cm^2$، فأوجد البُعد بين النقطة A والنقطة B بدلالة x , y في أبسط صورة.



40) إنتاج النفط: قدّر مهندسو إحدى شركات استخراج النفط إنتاج إحدى الآبار مستعملين الدالّة $R(x) = \frac{20}{x} + \frac{200x}{3x^2+20}$، حيث $R(x)$ معدل إنتاج البئر بآلاف البراميل سنويًّا بعد x سنة من بدء الإنتاج.

a) بسّط الدالّة $R(x)$.

b) ما معدّل إنتاج البئر بعد مرور 50 سنة؟

الربط بالحياة

يقع حقل الغوار في المملكة العربية السعودية، وتبلغ مساحته $3000\ km^2$، وتم اكتشافه عام 1948م. وتقدّر إنتاجيته بنحو 65% من إنتاج المملكة؛ أي حوالي 5 مليون برميل يوميًا، ويقدّر احتياطيّه من 70 إلى 170 مليار برميل.

أوجد LCM لكلٍّ ممَّا يأتي:

41) $-6abc^2, 18a^2b^2, 15a^4c, 8b^3$

42) $x^2-3x-28, 2x^2+9x+4, x^2-16$

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

43) $\frac{1}{12a} + 6 - \frac{3}{5a^2}$

44) $\frac{5}{16y^2} - 4 - \frac{8}{3x^2y}$

45) $\frac{5}{6x^2+46x-16} + \frac{2}{6x^2+57x+72}$

46) $\frac{1}{8x^2-20x-12} + \frac{4}{6x^2+27x+12}$

47) $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{y}{x+y} - \frac{x}{x-y}$

48) $\frac{x^2+x}{x^2-9x+8} + \frac{4}{x-1} - \frac{3}{x-8}$

49) $\frac{\frac{2}{a-1}+\frac{3}{a-4}}{\frac{6}{a^2-5a+4}}$

50) $\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)(x+y)}$

51) هندسة: يُعطى طول مستطيل بالعبارة $\frac{x^2-9}{x-2}$، ويعطى طول مستطيل آخر بالعبارة $\frac{x+3}{x^2-4}$. أوجد النسبة بين طولي المستطيلين، ثم اكتبها في أبسط صورة.

52) زوارق: قطع علي مسافة 20 mi راكبًا زورقه، حيث قطع نصف المسافة بسرعة معينة والنصف الثاني بسرعة تقل عن السرعة الأولى بمقدار 2 mi/h .

a) إذا كانت x تعبِّر عن السرعة الأولى بالأميال لكلِّ ساعة، فاكتب عبارة تمثِّل الزمن الذي استغرقه علي لقطع النصف الأول من المسافة.

b) اكتب عبارة تمثِّل الزمن الذي استغرقه لقطع النصف الثاني من المسافة.

c) اكتب عبارة تمثِّل الزمن الذي استغرقه لقطع المسافة كلها.

الربط بالحياة

الكاميرا الرقمية آلة تلتقط الصور الفوتوغرافية وتخزنها إلكترونيًا بدلاً من الأفلام. وبإمكان بعضها تسجيل الصوت أو الفيديو مع الصور. وتمتاز بالسرعة، وسهولة الاستخدام.

53) تصوير: يحدِّد البُعد البؤري لعدسة آلة التصوير المسافة التي يمكن خلالها التصوير بهذه الآلة؛ فكلما كان البُعد البؤري أصغر كانت مسافة التصوير أكبر. فإذا كان البُعد البؤري لعدسة آلة تصوير 70 mm وأردنا تصوير جسم على بُعد x mm من العدسة، فإنه يجب أن يكون الفيلم على بُعد y mm من العدسة. ويمكن تمثيل ذلك بالمعادلة $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{70}$.

a) اكتب y كدالّة في المتغير x.

b) هل يمكن تصوير جسم على بُعد 70 mm من العدسة؟ ولماذا؟

54) أدوية: يتناول أحد المرضى نوعين من الدواء. فإذا كان تركيزهما في دمه بوحدة الجرام/ لتر (g/L) يُعطى بالدالّتين: $g(t)=\frac{3t}{2t^2+6t+4}$, $f(t)=\frac{2t}{3t^2+9t+6}$ حيث t الزمن بالساعات بعد تناول الدواء.

a) اجمع الدالّتين لتحصل على دالّة تمثِّل تركيز النوعين معًا في دم المريض.

b) ما تركيز النوعين في دم المريض بعد 8 ساعات من تناولهما؟

مسائل مهارات التفكير العليا

55) تحدٍّ: بسّط العبارة $\frac{5x^{-2}-\frac{x+1}{x}}{\frac{4}{3-x^{-1}}+6x^{-1}}$.

56) تبرير: حدِّد إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أم خاطئة، ووضِّح إجابتك:

$\frac{6}{x+2}+\frac{4}{x-3}=\frac{10x-10}{(x+2)(x-3)}$ لأيِّ عدد حقيقي x.

57) مسألة مفتوحة: اكتب ثلاث وحيدات حدٍّ، على أن يكون LCM لهنّ يساوي $180a^4b^6c$.

58) اكتب: اكتب طريقة منظمة لجمع عبارات نسبية مختلفة المقامات.

تدريب على اختبار

59) إذا كان $\frac{2a}{a}+\frac{1}{a}=4$، فما قيمة a؟

A) $-\frac{1}{8}$ **B)** $\frac{1}{8}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** 2

مراجعة تراكمية

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي: (الدرس 1-5)

60) $\frac{-4ab}{21c}\cdot\frac{14c^2}{22a^2}$ **61)** $\frac{x^2-y^2}{6y}\div\frac{x+y}{36y^2}$ **62)** $\frac{n^2-n-12}{n+2}\div\frac{n-4}{n^2-4n-12}$

مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا، وحدِّد مجالها ومداها (مهارة سابقة)

63) $y=-\sqrt{2x+1}$ **64)** $y=\sqrt{5x-3}$ **65)** $y=2\sqrt{3-4x}+3$

مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا: (مهارة سابقة)

66) $y=4(x+3)^2+1$ **67)** $y=-(x-5)^2-3$ **68)** $y=\frac{1}{4}(x-2)^2+4$

69) $y=\frac{1}{2}(x-3)^2-5$ **70)** $y=x^2+6x+2$ **71)** $y=x^2-8x+18$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

5-3

تمثيل دوالّ المقلوب بيانيًّا
Graphing Reciprocal Functions

فيما سبق:
درست تمثيل دوالّ كثيرات الحدود بيانيًا. (مهارة سابقة)

والآن:
- أحدِّد خصائص دوالّ المقلوب.
- أمثِّل تحويلات دوالّ المقلوب بيانيًا.

المفردات:
- خط التقارب asymptote
- خط التقارب الرأسي vertical asymptote
- خط التقارب الأفقي horizontal asymptote
- دالّة المقلوب reciprocal function
- القطع الزائد hyperbola

لماذا؟

خطّطَت مجموعة من الطلبة لجمع مبلغ 5000 ريال للقيام بعمل خيري، فقرروا أن يتبرع كل منهم بريال واحد يوميًّا، فإذا كان عدد الطلاب n طالبًا، فإن عدد الأيام c اللازمة لجمع المبلغ يُعطى بالعلاقة $c = \frac{5000}{n}$.

خطوط التقارب الرأسية والأفقية: **خط التقارب** لدالّة: هو مستقيم يقترب منه التمثيل البياني للدالّة. ولدالّة المقلوب $f(x) = \frac{1}{a(x)}$ **خط تقارب رأسي** عند القيمة المستثناة من مجالها، و**خط تقارب أفقي** يبيّن سلوك طرفي التمثيل البياني للدالّة.

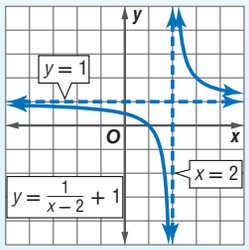
مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

خطوط التقارب للدالّة $y = \frac{a}{x-b} + c$

التعبير اللفظي: للدالّة $y = \frac{a}{x-b} + c$، $a \neq 0$ خط تقارب رأسي عند قيمة x التي تجعل المقام صفرًا، أي أن خط التقارب الرأسي للدالّة هو $x = b$، ويكون لها خط تقارب أفقي عند $y = c$.

مثال:



وأما مجال الدالّة $y = \frac{a}{x-b} + c$ فهو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا $x = b$، وأما مداها فهو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا $y = c$، ولأنه لا يمكن رسم هذه الدالّة دون رفع القلم عن الورقة؛ لذا اختر قيمًا لـ x على جانبي خط التقارب الرأسي لترسم جزأي منحنى الدالّة.

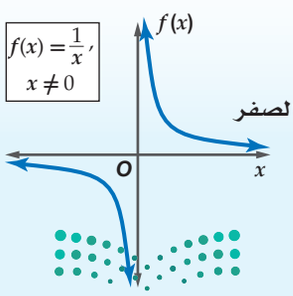
تمثِّل الدالّة $c = \frac{5000}{n}$ دالّة مقلوب، و**دالّة المقلوب** التي سندرسها هي الدالّة المكتوبة على الصورة $f(x) = \frac{1}{a(x)}$، حيث $a(x)$ دالّة خطية، و $a(x) \neq 0$.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

الدالّة الرئيسة (الأم) لدوالّ المقلوب

الدالّة الرئيسة (الأم):	$f(x) = \frac{1}{x}$
شكل التمثيل البياني:	قطع زائد
المجال والمدى:	جميع الأعداد الحقيقية ما عدا الصفر
خطا التقارب:	$x = 0$ و $y = 0$
المقطعان:	لا يوجد
تكون الدالّة غير معرَّفة عندما:	$x = 0$



وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

مجال دالّة المقلوب هو مجموعة القيم التي تكون الدالّة عندها معرَّفة.

فمثلًا الدوالّ: $f(x)=\frac{-3}{x+2}$ ، $g(x)=\frac{4}{x-5}$ ، $h(x)=\frac{3}{x}$

غير معرَّفة عندما: $x=-2$ ، $x=5$ ، $x=0$

مثال 1 القيود على المجال (تحديد القيم التي تجعل الدالّة غير معرَّفة)

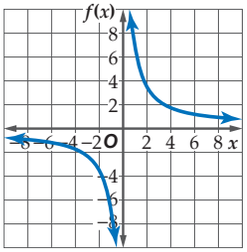
حدِّد قيمة x التي تجعل الدالّة $f(x)=\frac{3}{2x+5}$ غير معرَّفة.

تحقق من فهمك

1A) $f(x)=\frac{2}{x-1}$

1B) $f(x)=\frac{7}{3x+2}$

قد لا تكون بعض قيم x في دالّة المقلوب منطقية، وذلك في مسائل من واقع الحياة. فعلى سبيل المثال في التمثيل البياني المجاور، إذا كانت قيم x تمثِّل زمنًا، أو مسافة أو عدد أشخاص فلا يمكن أن تكون هذه القيم سالبة في سياق المسألة، ولذلك لا حاجة للجزء الأيسر من التمثيل البياني والذي تكون فيه قيم x سالبة.



مثال 2 من واقع الحياة تمثيل دالّة المقلوب بيانيًّا

سفر: مثِّل الدالّة $f(x)=\frac{20}{x}$ بيانيًّا، حيث تمثِّل x عدد الأشخاص في منطاد هوائي، وتمثِّل $f(x)$ متوسط المساحة المخصصة لكلِّ شخص بالأقدام المربعة.

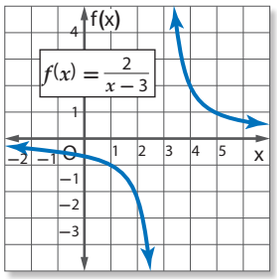
تحقق من فهمك

2) حدائق: حديقة مستطيلة الشكل مساحتها $18\ \text{cm}^2$ ، والدالّة $l=\frac{18}{w}$ تبيّن العلاقة بين طولها وعرضها. مثِّل هذه الدالّة بيانيًّا.

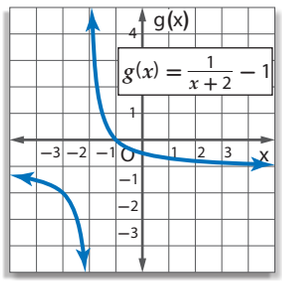
مثال 3 تحديد خصائص دوالّ المقلوب

حدِّد خطوط التقارب والمجال والمدى لكلٍّ من الدالّتين الآتيتين:

(a)



(b)



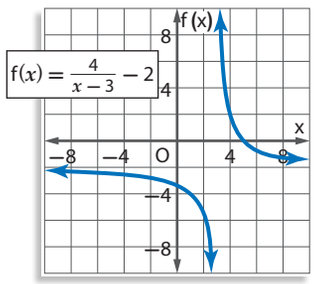
إرشادات للدراسة

خطوط التقارب

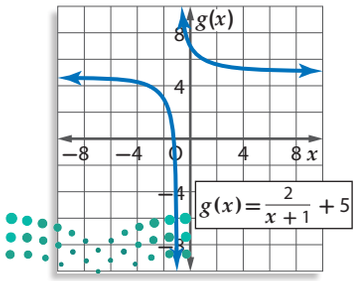
يبين خط التقارب الرأسي قيمة x التي تكون الدالّة عندها غير معرَّفة. أما خط التقارب الأفقي فيبيِّن سلوك طرفَي التمثيل البياني.

تحقق من فهمك

(3A)



(3B)



يمكنك استعمال دوالّ المقلوب لحل مسائل حياتية عديدة.

الربط بالحياة

تأسست الخطوط الجوية العربية السعودية في عام 1946 م، وكانت أولى رحلاتها الدولية إلى مطار (اللد) الفلسطيني لنقل الحجاج. وفي عام 2013 م حققت الشركة أعلى معدل نقل للركاب (25.241.421 راكبًا) على (177.435) رحلة داخلية ودولية، وأحرزت المركز الثاني عالميًا (90.46%) في انضباط مواعيد الرحلات.

مثال 4 من واقع الحياة — كتابة معادلات دوالّ المقلوب

طيران: تقطع طائرة ركاب مسافة 7500 ميل في إحدى الرحلات.

a) اكتب دالّة تبين الزمن t الذي تحتاج إليه الطائرة لتقطع هذه المسافة بدلالة السرعة r. ومثِّل هذه الدالّة بيانيًّا.

b) وضِّح أيَّة قيود يمكن وضعها على كلٍّ من المجال والمدى في هذه الحالة.

تحقق من فهمك

4) رحلات: نظَّم طلاب الصف الثاني الثانوي في مدرسة أهلية رحلة إلى منطقة أثرية بإشراف إدارة مدرستهم، حيث دفع كل واحد منهم 45 ريالًا ثمنًا للوجبات الغذائية، وتكفلت إدارة المدرسة بنفقات إضافية للرحلة وهي 2500 ريال. اكتب دالّة تمثِّل متوسط التكلفة الكلِّية للطالب الواحد ومثِّلها بيانيًّا. ووضِّح أية قيود يمكن وضعها على كلٍّ من المجال والمدى.

تأكد

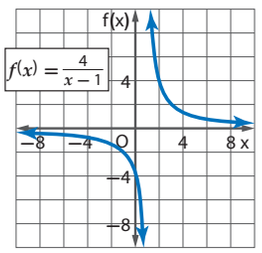
مثال 1 **1)** حدِّد قيمة x التي تجعل الدالّة $f(x) = \frac{5}{4x - 8}$ غير معرَّفة.

مثال 2 مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا، وحدِّد مجال ومدى كلٍّ منها:

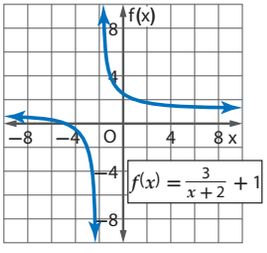
2) $f(x) = \frac{5}{x}$ **3)** $f(x) = \frac{2}{x + 3}$

مثال 3 حدِّد خطوط التقارب والمجال والمدى لكلٍّ من الدالّتين الآتيتين:

4)



5)



مثال 4 **6) هدية جماعية:** يرغب بعض الطلاب في إرسال هدية ثمنها 150 ريالًا إلى أحد أصدقائهم.

a) فإذا كانت c تمثِّل المبلغ الذي يدفعه كلٌّ منهم، وf عدد الأصدقاء، فاكتب دالّة تمثِّل المبلغ الذي يدفعه كلٌّ منهم بدلالة عدد الأصدقاء.

b) مثِّل هذه الدالّة بيانيًّا.

c) وضِّح أيَّة قيود يمكن وضعها على كلٍّ من المجال والمدى في هذه الحالة.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

مثال 1 حدِّد قيمة x التي تجعل كلَّ دالّة فيما يأتي غير معرَّفة.

7) $f(x)=\frac{5}{2x}$ **8)** $f(x)=\frac{x}{x-7}$ **9)** $f(x)=\frac{4}{3x+9}$

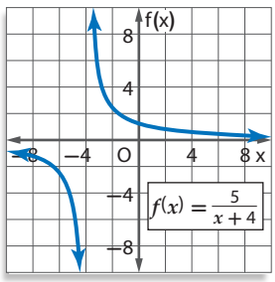
مثال 2 مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا، وحدِّد مجال ومدى كلٍّ منها:

10) $f(x)=\frac{3}{x}$ **11)** $f(x)=\frac{-4}{x+2}$ **12)** $f(x)=\frac{2}{x-6}$

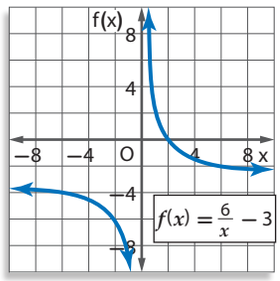
13) $f(x)=\frac{-2}{x-5}$ **14)** $f(x)=\frac{3}{x-7}-8$ **15)** $f(x)=\frac{9}{x+3}+6$

مثال 3 حدِّد خطوط التقارب والمجال والمدى لكلٍّ من الدالّتين الآتيتين:

16)



17)



مثال 4 **18) كيمياء:** لدى محمد 200 جرام (g) من سائل مجهول. وتساعد معرَّفة كثافة السائل على تحديد نوعه. ويمكن حساب كثافة السائل بقسمة كتلته على حجمه.

a) اكتب دالّة تمثِّل كثافة هذا السائل (d) بدلالة حجمه (v).

b) مثِّل هذه الدالّة بيانيًّا.

c) استعمل التمثيل البياني لتحديد خطوط التقارب والمجال والمدى لهذه الدالّة.

مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا، وحدِّد مجال ومدى كلٍّ منها:

19) $f(x)=\frac{5}{3x}$ **20)** $f(x)=\frac{2}{4x+1}$ **21)** $f(x)=\frac{1}{2x+3}$

22) تمثيلات متعددة: افترض أن $g(x)=\frac{1}{x^2}$, $f(x)=\frac{1}{x}$.

a) جدوليًّا: أنشئ جدول قيم للمقارنة بين الدالّتين.

b) **بيانيًّا:** استعمل القيم في الجدول لتمثيل كِلتا الدالّتين بيانيًّا.

c) **لفظيًّا:** قارن بين التمثيلين البيانيين، ثم حدِّد أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بينهما.

d) تحليليًّا: اكتب تخمينًا حول الفرق بين التمثيل البياني للدوالّ التي على الصورة $f(x)=\frac{1}{x^n}$، عندما تكون n عددًا زوجيًّا، وعندما تكون n عددًا فرديًّا.

مسائل مهارات التفكير العليا

23) **مسألة مفتوحة:** اكتب دالّة مقلوب يكون لتمثيلها البياني خط تقارب رأسي عند $x = -4$، وخط تقارب أفقي عند $y = 6$.

24) **تبرير:** قارن بين التمثيلين البيانيين لكلِّ زوج من المعادلات الآتية موضِّحا أوجه الشبه وأوجه الاختلاف.

a) $y = \frac{1}{x}, y - 7 = \frac{1}{x}$ **b)** $y = \frac{1}{x}, y = 4\left(\frac{1}{x}\right)$ **c)** $y = \frac{1}{x}, y = \frac{1}{x+5}$

d) استعمل ملاحظاتك في الفروع a – c؛ لتمثيل الدالّة $y - 7 = 4\left(\frac{1}{x+5}\right)$ بيانيًّا دون استعمال جدول قِيم.

25) **أيُّها لا ينتمي؟** حدِّد الدالّة المختلفة عن الدوالّ الثلاث الأخرى، ووضِّح إجابتك.

$f(x) = \frac{3}{x+1}$ $g(x) = \frac{x+2}{x^2+1}$ $h(x) = \frac{5}{x^2+2x+1}$ $j(x) = \frac{20}{x-7}$

26) **تحدٍّ:** اكتب دالَّتَي مقلوب، يكون للتمثيل البياني لكلٍّ منهما خطا التقارب نفساهما، ثم مثِّل هاتين الدالّتين بيانيًّا.

27) **اكتب:** ارجع إلى فقرة "لماذا" في بداية هذا الدرس، ووضِّح كيف يمكن استعمال دوالّ المقلوب عند جمع التبرعات. وبيِّن لماذا يكون جزء من التمثيل البياني للدالّة فقط منطقيًّا بالنسبة لسياق الموقف.

تدريب على اختبار

28) ما مجال الدالّة $f(x) = \frac{8}{x+3}$؟

A مجموعة الأعداد الحقيقية.

B مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة.

C مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا 3.

D مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا 3−.

29) ما قيمة العبارة $(x+y)\ (x+y)$، إذا كانت $xy = -3, x^2 + y^2 = 10$؟

A 4

B 7

C 13

D 16

مراجعة تراكمية

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي: (الدرس 1-5)

30) $\frac{\frac{p^3}{2n}}{-\frac{p^2}{4n}}$ **31)** $\frac{\frac{m+q}{5}}{\frac{m^2+q^2}{5}}$ **32)** $\frac{\frac{x+y}{2x-y}}{\frac{x+y}{2x+y}}$

أوجد $(f+g)(x), (f-g)(x), (f.g)(x), \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ **للدالّتين** $f(x), g(x)$ **في كلٍّ ممَّا يأتي:** (مهارة سابقة)

33) $f(x) = x+9$, $g(x) = x-9$ **34)** $f(x) = 2x-3$, $g(x) = 4x+9$ **35)** $f(x) = 2x^2$, $g(x) = 8-x$

مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا، وحدِّد مجال ومدى كلٍّ منها: (مهارة سابقة)

36) $f(x) = \begin{cases} x & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$ **37)** $f(x) = |x-5|$ **38)** $f(x) = x^2 - 4$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

1) $\frac{2x^2y^5}{7x^3yz} \cdot \frac{14xyz^2}{18x^4y}$

2) $\frac{24a^4b^6}{35ab^3} \div \frac{12abc}{7a^2c}$

3) $\frac{3x-3}{x^2+x-2} \cdot \frac{4x+8}{6x+18}$

4) $\frac{m^2+3m+2}{9} \div \frac{m+1}{3m+15}$

5) $\frac{\frac{r^2+3r}{r+1}}{\frac{3r}{3r+3}}$

6) $\frac{\frac{2y}{y^2-4}}{\frac{3}{y^2-4y+4}}$

7) اختيار من متعدد: إذا كانت $r \neq \pm 2$، فأيٌّ ممَّا يأتي تكافئ العبارة $\frac{r^2+6r+8}{r^2-4}$؟

A $\frac{r-2}{r+4}$ C $\frac{r+2}{r-4}$

B $\frac{r+4}{r-2}$ D $\frac{r+4}{r+2}$

8) اختيار من متعدد: ما قيم x التي تجعل العبارة $\frac{x^2-16}{(x^2-6x-27)(x+1)}$ غير معرّفة؟

A $-3, -1$ C $-3, -1, 9$

B $-9, 1, 3$ D -1

9) أوجد LCM لكثيرتَي الحدود $3-3x$, x^2-x .

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

10) $\frac{2x}{4x^2y} + \frac{x}{3xy^3}$

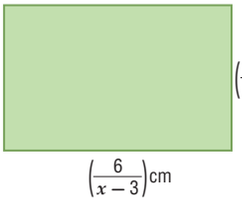
11) $\frac{3}{4m} + \frac{2}{3mn^2} - \frac{4}{n}$

12) $\frac{6}{r^2-3r-18} - \frac{1}{r^2+r-6}$

13) $\frac{3x+6}{x+y} + \frac{6}{-x-y}$

14) $\frac{x-4}{x^2-3x-4} + \frac{x+1}{2x-8}$

15) هندسة: أوجد محيط المستطيل في الشكل المجاور.



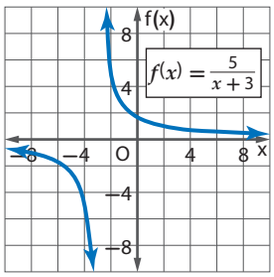
16) سفر: سافر محمد إلى الشاطئ الذي يبعد 100 km عن بيته، فقطع نصف المسافة بسرعة معينة، والنصف الثاني بسرعة أقل بمقدار 15 km/h .

a) إذا كانت x تمثِّل السرعة الأولى، فاكتب عبارةً تمثِّل الزمن الذي استغرقه في قطع النصف الأول من المسافة.

b) اكتب عبارة تمثِّل الزمن الذي استغرقه في قطع النصف الثاني من المسافة.

c) اكتب عبارة تمثِّل الزمن الذي استغرقه في قطع الرحلة كاملة في أبسط صورة.

17) حدِّد خطوط التقارب والمجال والمدى للدالّة الآتية:



مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا، وحدِّد مجال ومدى كلٍّ منها:

18) $f(x) = \frac{6}{x-1}$

19) $f(x) = \frac{-2}{x} + 4$

20) $f(x) = \frac{3}{x+2} - 5$

21) $f(x) = -\frac{1}{x-3} + 2$

22) شطائر: أحضر مجموعة من الأصدقاء 45 شطيرة لتناولها بالتساوي في رحلة ترفيهية. ويعتمد عدد الشطائر التي سيأكلها كلُّ شخص على عدد الأشخاص المشتركين في الرحلة.

a) إذا كانت x تمثِّل عدد الأصدقاء المشاركين في الرحلة، فاكتب دالّة تمثِّل هذا الموقف.

b) مثِّل هذه الدالّة بيانيًّا.

مجموعة رقمية الرياضيات
رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

5-4 تمثيل الدوالّ النسبية بيانيًّا
Graphing Rational Functions

فيما سبق:
درست تمثيل دوالّ المقلوب بيانيًّا. الدرس (3-5)

والآن:
- أمثّل بيانيًّا دوالّ نسبية لها خطوط تقارب رأسية وأفقية.
- أمثّل بيانيًّا دوالّ نسبية لها نقاط انفصال.

المفردات:
الدالّة النسبية
rational function
نقطة الانفصال
point discontinuity

لماذا؟

اشترى أحمد آلة تصوير رقمية وطابعة لطباعة الصور بمبلغ إجمالي مقداره 1350 ريالًا، وكانت تكلفة الحبر وورق الطباعة للصورة الواحدة 1.5 ريال.

يمكنه استعمال الدالّة النسبية $C(p) = \frac{1.5p + 1350}{p}$ لحساب تكلفة طباعة p من الصور.

خطوط التقارب الرأسية والأفقية: **الدالّة النسبية** هي دالّة على الصورة $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$، حيث $a(x)$ و $b(x)$ كثيرتا حدود، و $b(x) \neq 0$.

لتمثيل الدالّة النسبية بيانيًّا يكون من المفيد تحديد أصفارها، وخطوط التقارب لها. فأصفار الدالّة $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ هي جميع قيم x التي يكون عندها $a(x) = 0$.

مفهوم أساسي خطوط التقارب الرأسية والأفقية

أضف إلى مطويتك

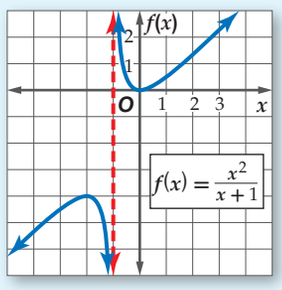
التعبير اللفظي: إذا كان $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$، حيث $a(x)$, $b(x)$ كثيرتا حدود لا يوجد بينهما عوامل مشتركة غير الواحد، و $b(x) \neq 0$ فإنه:

- يوجد للدالّة $f(x)$ خط تقارب رأسي عندما $b(x) = 0$.
- يوجد للدالّة $f(x)$ خط تقارب أفقي واحد على الأكثر.
- إذا كانت درجة $a(x)$ أكبر من درجة $b(x)$ فلا يوجد خط تقارب أفقي.
- إذا كانت درجة $a(x)$ أقل من درجة $b(x)$، فإن خط التقارب الأفقي هو المستقيم $y = 0$.
- إذا كانت درجة $a(x)$ تساوي درجة $b(x)$، فإن خط التقارب الأفقي هو المستقيم:

$$y = \frac{\text{المعامل الرئيس لـ } a(x)}{\text{المعامل الرئيس لـ } b(x)}.$$

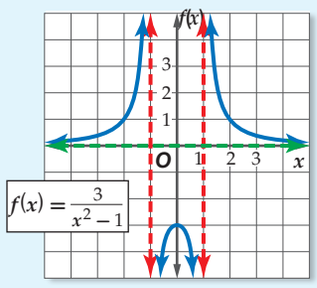
أمثلة:

لا يوجد خط تقارب أفقي



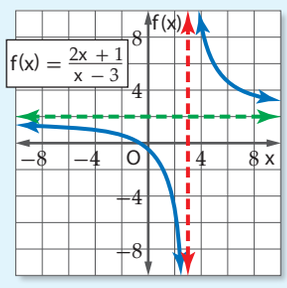
خط التقارب الرأسي:
$x = -1$

يوجد خط تقارب أفقي واحد



خطا التقارب الرأسي:
$x = -1, x = 1$

خط التقارب الأفقي:
$y = 0$



خط التقارب الرأسي:
$x = 3$

خط التقارب الأفقي:
$y = 2$

إرشادات للدراسة

مجال الدالّة النسبية
مجال الدالّة النسبية $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ هي: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء تلك الأعداد التي تجعل المقام صفرًا.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

يمكنك استعمال خطوط التقارب لتسهيل تمثيل الدالّة النسبية بيانيًّا، كما يمكنك استعمالها لتوضيح عدد الأجزاء التي ينقسم إليها التمثيل البياني للدالّة، فإذا كان هناك خط تقارب رأسي واحد، فإن التمثيل ينقسم إلى فرعين، أما إذا كان هناك خطًّا تقارب فإنه ينقسم إلى ثلاثة أفرع.

مثال 1 التمثيل البياني لدالّة نسبية ليس لها خط تقارب أفقي

مثِّل الدالّة $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ بيانيًّا.

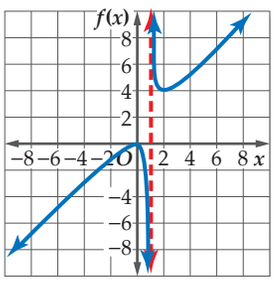
الخطوة 1

الخطوة 2

الخطوة 3

الخطوة 4

x	$f(x)$
-3	-2.25
-2	-1.33
-1	-0.5
0	0
0.5	-0.5
1.5	4.5
2	4
3	4.5



إرشادات للدراسة

الحاسبة البيانية

يمكنك استعمال تطبيق القوائم وجداول البيانات في الحاسبة البيانية لإنشاء جدول قيم للدالّة عندما تكون القيم في الصورة العشرية.

تحقق من فهمك

1) $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$.

مثال 2 من واقع الحياة

استعمال التمثيل البياني للدوالّ النسبية

الربط بالحياة

تقوم قوات خفر السواحل بعمليات المراقبة والحراسة الحدودية والإنقاذ وتقديم المساعدة لمستخدمي المياه الإقليمية في المملكة.

متوسط السرعة: يسير قارب خفر سواحل عكس اتجاه الموج بسرعة مقدارها r_1 mi/h. وخلال عودته إلى نقطة الانطلاق سار القارب في اتجاه الموج بسرعة مقدارها r_2 mi/h. ويُعطى مقدار متوسط سرعة القارب خلال رحلة الذهاب والعودة بالصيغة $R = \frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2}$.

a) إذا كان r_1 هو المتغيِّر المستقل، و R هو المتغيِّر التابع، فمثِّل الصيغة بيانيًّا عندما $r_2 = 10$ mi/h.

c) ما قيم المجال والمدى المنطقية في سياق المسألة؟

تحقق من فهمك

2) رواتب: تستعمل إحدى الشركات الدالّة $S(x) = \frac{13500x + 250}{x + 1}$ لحساب راتب موظف خلال السنة x من عمله لديها، مثِّل هذه الدالّة بيانيًّا. وحدِّد القيم المنطقية لمجال الدالّة ومداها في سياق المسألة، وعلى ماذا يدل خط التقارب الأفقي في هذه المسألة؟

نقطة الانفصال: يوجد في بعض الأحيان **نقط انفصال** في التمثيل البياني للدالّة النسبية، وتظهر هذه النقط على شكل فجوات في التمثيل البياني للدالّة؛ لأن الدالّة تكون غير معرّفة عند تلك النقاط ومُعرفةً حولها.

مفهوم أساسي

نقطة الانفصال

أضف إلى مطويتك

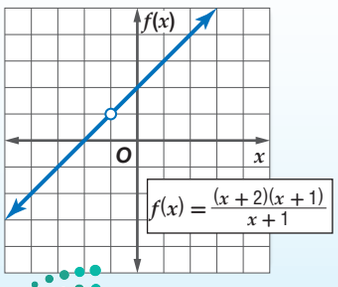
التعبير اللفظي: إذا كانت $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$، حيث $b(x) \neq 0$، وكان $x - c$ عاملًا مشتركًا بين $a(x)$ و $b(x)$، فإنه توجد نقطة انفصال عندما $x = c$.

مثال:

$$f(x) = \frac{(x + 2)(x + 1)}{x + 1}$$
$$= x + 2, \quad x \neq -1$$

نقطة الانفصال هي:

$$(-1, f(-1)) = (-1, 1)$$



وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

مثال 3 التمثيل البياني لدالّة تتضمن نقطة انفصال

مثِّل الدالّة $f(x)=\frac{x^2-16}{x-4}$ بيانيًّا .

تنبيه !

فجوات التمثيل البياني

تذكر أن وجود عامل مشترك بين البسّط والمقام يدل على وجود فجوة في التمثيل البياني للدالّة.

تحقق من فهمك

3A $f(x)=\frac{x^2+4x-5}{x+5}$

3B $f(x)=\frac{x^3+2x^2-9x-18}{x^2-9}$

تأكـد

مثال 1 مثِّل الدالّتين الآتيتين بيانيًّا:

1) $f(x)=\frac{x^2-2}{x-1}$

2) $f(x)=\frac{x^2}{x+2}$

مثال 2

3) كرة سلة : في بداية تدريب لفريق كرة سلة، أحرز سعيد 7 أهداف من 11 رمية حرة لعبها، ويرغب في تحسين النسبة المئوية للأهداف التي يحرزها والممثِّلة بالدالّة $P(x)=\frac{7+x}{11+x}$، حيث x عدد الرميات الحرة الأخرى التي سيلعبها.

a) مثِّل هذه الدالّة بيانيًّا.

b) أيُّ جزء من التمثيل البياني للدالّة منطقي في سياق المسألة؟

c) ماذا يمثِّل مقطع المحور الرأسي للتمثيل البياني؟

d) ما معادلة خط التقارب الأفقي؟ وما النسبة المئوية التي يمثِّلها؟ وهل يمكن الوصول إلى هذه النسبة؟

مثال 3 مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا:

4) $f(x)=\frac{x^2-4x-5}{x+1}$

5) $f(x)=\frac{x^2+x-12}{x+4}$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 مثِّل كلًّا من الدالّتين الآتيتين بيانيًّا:

6) $f(x)=\frac{x^2}{6x+12}$

7) $f(x)=\frac{x^2-16}{x-1}$

مثال 2 مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا:

8) $f(x)=\frac{x}{x+2}$

9) $f(x)=\frac{5}{(x-1)(x+4)}$

10) $f(x)=\frac{1}{(x+2)^2}$

11) $f(x)=\frac{2x}{(x+2)(x-5)}$

12) $f(x)=\frac{4}{(x-2)^2}$

13) $f(x)=\frac{x-3}{x+1}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

14) كهرباء: دائرة كهربائية تحتوي على 3 مقاومات موصولة على التوالي، وتُعطى شدة التيار الكهربائي بالأمبير فيها بالمعادلة $C = \frac{V}{R_1 + R_2 + R_3}$ ، حيث V فرق الجهد بالفولت، و R_1 , R_2 , R_3 المقاومات بالأوم.

a) إذا كان R_1 هو المتغيِّر المستقل، و C هو المتغيِّر التابع، فمثِّل المعادلة بيانيًّا عندما تكون $V = 120\text{ v}, R_2 = 25\ \Omega, R_3 = 75\ \Omega$.

b) اكتب معادلة خط التقارب الرأسي، وأوجد مقطع المحور R_1، ومقطع المحور C للتمثيل البياني.

c) أوجد قيمة C عندما تكون $R_1 = 140\ \Omega$.

d) ما قيم المجال والمدى المنطقية في سياق المسألة؟

مثال 3

مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا:

15) $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 8}{x - 4}$

16) $f(x) = \frac{x^2 + 4x - 12}{x - 2}$

17) $f(x) = \frac{x^2 - 64}{x - 8}$

18) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

أوجد معادلات خطوط التقارب الرأسية، ونقط الانفصال (إن وجدت) للتمثيل البياني لكلِّ دالّة ممَّا يأتي:

19) $f(x) = \frac{x + 4}{x^2 + 9x + 20}$

20) $f(x) = \frac{2}{x^2 + 3x}$

21) $f(x) = \frac{x^2 - 5x}{x - 5}$

22) اتصالات: اشترى أحمد هاتفًا محمولًا مزودًا بخدمة إنترنت، وكان ثمن الهاتف 1500 ريال، ومتوسط تكلفة مكالماته الشهرية 200 ريال بالإضافة إلى 100 ريال شهريًّا لخدمة الإنترنت. إذا علمت أن التكلفة الشهرية لأحمد تشمل: ثمن الهاتف، ومتوسط تكلفة المكالمات، وثمن خدمة الإنترنت.

a) اكتب دالّة نسبية تمثِّل متوسط التكلفة الشهرية لأحمد، بعد مرور x شهرًا من شراء الهاتف، ومثِّلها بيانيًّا.

b) اكتب معادلات خطوط تقارب التمثيل البياني للدالّة؟

c) لماذا يكون الربع الأول من المستوى الإحداثي هو المهم في هذا الموقف؟

d) بعد كم شهر من شراء الهاتف يكون متوسط التكلفة الشهرية لأحمد 450 ريالًا؟

الربط بالحياة

أشار مسح عالمي إلى أن مستخدمي الهواتف النقالة في المملكة العربية السعودية أكثر من أي دولة في العالم؛ بمعدل 180 هاتفًا نقالًا لكل 100 فرد.

المصدر: وزارة الاتصالات وتقنية المعلومات
http://www.mcit.gov.sa/Ar/Communication

مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا:

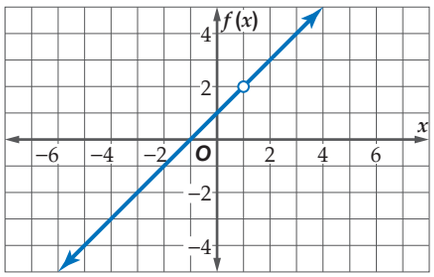
23) $f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 6x + 5}$

24) $f(x) = \frac{x^2 - 10x - 24}{x + 2}$

مسائل مهارات التفكير العليا

25) مسألة مفتوحة: مثِّل بيانيًّا بشكل تقريبيٍّ دالّة نسبية لها خط تقارب أفقي معادلته $y = 1$، وخط تقارب رأسي معادلته $x = -2$.

26) تحدٍّ: اكتب دالّة نسبية لها التمثيل البياني المجاور .



27) تبرير: ما الفرق بين التمثيلين البيانيين للدالّتين:

$f(x) = x - 2, g(x) = \frac{(x + 3)(x - 2)}{x + 3}$ ؟

28) برهان: إذا علمت أن الدالّة النسبية هي دالّة على الصورة: $f(x)=\frac{a(x)}{b(x)}$، حيث $a(x)$ و $b(x)$ كثيرتا حدود، و $b(x)\neq 0$، فأثبت أن $f(x)=\frac{x}{a-b}+c$ دالّة نسبية.

29) اكتب: وضِّح كيف يمكن استعمال تحليل البسِّط والمقام إلى عوامل لإيجاد خطوط التقارب الرأسية أو نقطة الانفصال لدالّة نسبية.

تدريب على اختبار

30) يريد عليٌّ أن يختار كتابين معًا من بين 6 كتب مختلفة. بكم طريقة يمكنه القيام بذلك؟

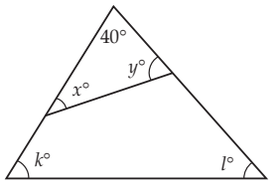
A 48

B 18

C 15

D 12

31) هندسة: في الشكل المجاور، ما قيمة $x+y+k+l$ ؟



A 140

B 280

C 320

D 360

مراجعة تراكمية

مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا، وحدِّد مجال ومدى كلٍّ منها: (الدرس 3-5)

32) $f(x)=\frac{-5}{x+2}$

33) $f(x)=\frac{4}{x-1}-3$

34) $f(x)=\frac{1}{x+6}+1$

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي: (الدرس 2-5)

35) $\frac{m}{m^2-4}+\frac{2}{3m+6}$

36) $\frac{d-4}{d^2+2d-8}+\frac{d+2}{d^2-16}$

37) $\frac{y}{y+3}-\frac{6y}{y^2-9}$

38) $\frac{5}{x^2-3x-28}+\frac{7}{2x-14}$

39) سفر: يبين الجدول المجاور المسافات التي يقطعها أحمد عند سفره إلى مدينة مجاورة بعد مرور زمن معين. (مهارة سابقة)

الزمن (h)	المسافة (km)
0	0
1	55
2	110
3	165
4	165
5	225

a) أوجد معدل تغير المسافة بين الساعتين الأولى والثالثة من الانطلاق.

b) أوجد معدل تغير المسافة بعد مرور 5 ساعات من الانطلاق.

تمثيل الدوالّ النسبية بيانيًّا
Graphing Rational Functions

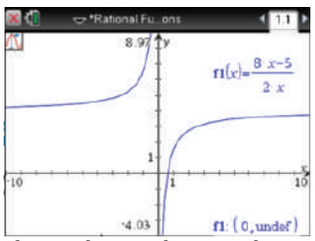
يمكن استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire لاستكشاف التمثيلات البيانية للدوالّ النسبية.

نشاط 1 التمثيل البياني لدالّة لها خطوط تقارب

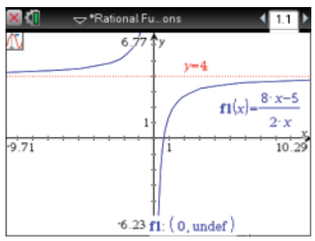
مثِّل الدالّة $y = \frac{8x - 5}{2x}$ بيانيًّا، وأوجد معادلات خطوط التقارب.

الخطوة 1: مثِّل الدالّة بيانيًّا:

اضغط مفتاح (on)، ومن الشاشة الظاهرة اختر 1 مستند جديد، ثم اختر 2:اضافة تطبيق الرسوم البيانية واختر (ctrl) (÷)، ثم اكتب الدالّة واضغط (enter). ولتحديد خطوط التقارب اضغط (menu)، ومنها اختر 5:تتبع المسار، ومنها 1:تتبع مسار التمثيل البياني، ثم تتبع التمثيل البياني بتحريك الأسهم، ستلاحظ أنه لا يوجد قيمة لِـ y عندما $x = 0$، وتظهر النقطة (0, undef) وخط التقارب الرأسي.



[−10, 10] scl:1 by [−4.3, 8.97] scl:1



[−9.71, 10.29] scl:1 by [−6.23, 6.77] scl:1

الخطوة 2: أوجد معادلات خطوط التقارب.

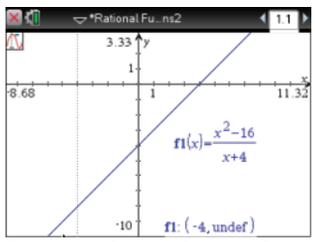
بالنظر إلى المعادلة، يمكننا معرَّفة أن الدالّة غير معرَّفة عندما $x = 0$، لذا فإن لها خط تقارب رأسيًّا معادلته $x = 0$. لاحظ ما يحدث لقيم y عندما تزداد قيم x وعندما تقل. لعلك لاحظت أن قيم y تقترب من العدد 4 في الحالتين، وعليه يكون للدالّة خط تقارب أفقي معادلته $y = 4$.

نشاط 2 التمثيل البياني لدالّة تتضمَّن نقطة انفصال

مثِّل الدالّة $y = \frac{x^2 - 16}{x + 4}$ بيانيًّا.

الخطوة 1: مثِّل الدالّة بيانيًّا:

اضغط مفتاح (on) ومن الشاشة الظاهرة اختر 1 مستند جديد ثم اختر 2:اضافة تطبيق الرسوم البيانية واختر (ctrl) (÷)، ثم اكتب الدالّة واضغط (enter). ولتحديد نقاط الانفصال اضغط (menu) ومنها اختر 5:تتبع المسار ومنها 1:تتبع مسار التمثيل البياني، ثم تتبَّع التمثيل البياني بتحريك الأسهم، فستلاحظ أنه لا يوجد قيمة لِـ y عند $x = -4$، وتظهر فجوة عند نقطة الانفصال $(-4, \text{undef})$.



[−8.68, 11.32] scl:1 by [−10, 3.33] scl:1

الخطوة 2: أوجد نقاط الانفصال.

يبدو التمثيل البياني على شكل مستقيم بفجوة عندما $x = -4$ ؛ لأن المقام يساوي صفرًا عندما $x = -4$، مما يعني أن الدالّة غير معرَّفة عندما $x = -4$.

تمارين:

استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل كلِّ دالّة مما يأتي بيانيًّا، ثم اكتب الإحداثي x لنقاط الانفصال ومعادلات خطوط التقارب (إن وجدت):

1) $f(x) = \frac{1}{x}$

2) $f(x) = \frac{x}{x + 2}$

3) $f(x) = \frac{2}{x - 4}$

4) $f(x) = \frac{2x}{3x - 6}$

5) $f(x) = \frac{4x + 2}{x - 1}$

6) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

5-5

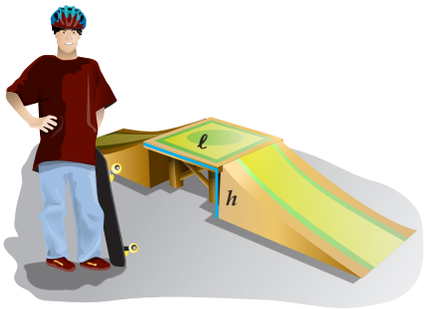
دوالّ التغيُّر
Variation Functions

فيما سبق:
درست كتابة معادلات خطية وتمثيلها بيانيًا.
(مهارة سابقة)

والآن:
- أحل مسائل التغيُّر الطردي والتغيُّر المشترك.
- أحل مسائل التغيُّر العكسي والتغيُّر المركّب.

المفردات:
التغيُّر الطردي
direct variation
ثابت التغيُّر
constant of variation
التغيُّر المشترك
joint variation
التغيُّر العكسي
inverse variation
التغيُّر المركّب
combined variation

لماذا؟

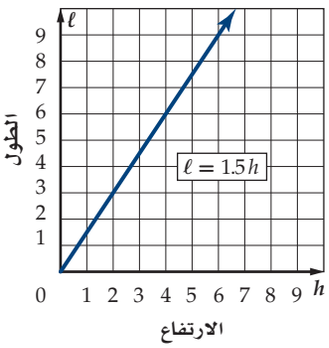


وجد عبدالله خلال بنائه منحدرًا للتزحلق، أن أنسب المنحدرات هي التي يكون فيها طول المنصّة ℓ مساويًا 1.5 مرة من ارتفاعها h .

كما تلاحظ من الجدول المجاور، فإن طول المنصّة يعتمد على ارتفاعها، حيث يزداد الطول كلما ازداد الارتفاع بينما تبقى نسبة الطول إلى الارتفاع ثابتة، وعندما تكون النسبة بين كميتين متغيرتين ثابتة، تسمى العلاقة بينهما (**تغيّرًا طرديًا**) كما درست سابقًا، وبهذا فإن طول المنصة يتغيَّر طرديًا مع ارتفاعها.

الطول (ℓ)	الارتفاع (h)	النسبة $(\frac{\ell}{h})$
3	2	1.5
6	4	1.5
9	6	1.5
12	8	1.5

التغيُّر الطردي والتغيُّر المشترك إن المعادلة $\frac{\ell}{h} = 1.5$ يمكن كتابتها على الصورة $\ell = 1.5h$ وهي مثال على التغيُّر الطردي، حيث يعبّر عن التغيُّر الطردي بمعادلة على الصورة $y = kx$ ، ويُسمى k في هذه المعادلة **ثابت التغيُّر**.



لاحظ أن التمثيل البياني للمعادلة $\ell = 1.5h$ هو مستقيم يمرُّ بنقطة الأصل، لذا فالتغيُّر الطردي حالة خاصة من معادلة مستقيم مكتوبة على الصورة $y = mx + b$ ، حيث $m = k$ و $b = 0$. وهذا يعني أن ميل المستقيم الممثل لمعادلة التغيُّر الطردي هو ثابت التغيُّر.

وللتعبير عن التغيُّر الطردي، فإننا نقول إن y تتغيَّر طرديًا مع x. وبمعنى آخر كلما زادت x، فإن y تزداد بنسبة ثابتة إذا كان ثابت التغير موجبًا، وينقص بنسبة ثابتة إذا كان ثابت التغير سالبًا.

إرشادات للدراسة

ثابت التغيُّر
في التغير الطردي، المستقيم الذي له ثابت تغيُّر موجب ، يكون صاعدًا إلى أعلى من اليسار إلى اليمين ، بينما المستقيم الذي له ثابت تغيُّر سالب، فإنه يكون هابطًا نحو الأسفل من اليسار إلى اليمين.

مفهوم أساسي — **التغيُّر الطردي**

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: تتغيّر y طرديًا مع x إذا وجد عدد $k \neq 0$ ، بحيث $y = kx$ ويسمى العدد k ثابت التغيُّر.

مثال: إذا كانت $y = 3x$ ، فإن y تتغير طرديًا مع x . فكلما زادت x بمقدار 1، فإن y تزداد بمقدار 3، فعندما تكون قيمة $x = 1$ ، فإن $y = 3$، وعندما $x = 2$ فإن $y = 6$ وهكذا.

إذا كانت y تتغيَّر طرديًا مع x ، وعُلمت بعض القيم، فإنه يمكنك استعمال التناسب لإيجاد القيم الأخرى المجهولة.

$$y_1 = kx_1 \quad , \quad y_2 = kx_2$$
$$\frac{y_1}{x_1} = k \qquad \frac{y_2}{x_2} = k$$

ومن ذلك نجد أن $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$ (يسمّى هذا التناسب تناسبًا طرديًا؛ أي أن y تتناسب طرديًا مع x).

ويمكنك استعمال خصائص المساواة لإيجاد تناسبات أخرى تربط بين قيم x وقيم y .

مثال 1 التغيُّر الطردي

إذا كانت y تتغيَّر طرديًّا مع x ، وكانت $y = 15$ عندما $x = 5$ ، فأوجد قيمة y عندما $x = 7$.

تحقق من فهمك

1) إذا كانت r تتغيَّر طرديًّا مع t ، وكانت $r = -20$ عندما $t = 4$ ، فأوجد قيمة r عندما $t = -6$.

هناك نوع آخر من التغيُّر يُسمى **التغيُّر المشترك**، ويحدث عندما تتغيَّر كمية ما طرديًّا مع حاصل ضرب كميتين أخريين أو أكثر.

إرشادات للدراسة

التغيُّر المشترك

يصنّف بعض الرياضيين التغيُّر المشترك بوصفه حالة خاصة من التغيُّر المركّب الذي ستدرسه لاحقًا.

مفهوم أساسي التغيُّر المشترك

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: تتغيَّر y تغيُّرًا مشتركًا مع x و z إذا وجد عدد $k \neq 0$ ، بحيث $y = kxz$.

مثال: إذا كانت: $y = -60, z = -2, x = 6$ ، وكانت y تتغير تغيرًا مشتركًا مع x وَ z، حيث إن: $y = -60 = 5(6)(-2) = kxz \Rightarrow k = 5$ ، فإن قيمة y عندما $z = -5$، $x = 4$ تكون: $y = 5 \times 4 \times (-5) = -100$.

إذا كانت y تتغيَّر تغيُّرًا مشتركًا مع x و z ، وعلمتَ بعض القيم، فإنه يمكنك استعمال التناسب لإيجاد القيم الأخرى المجهولة.

$$y_1 = kx_1z_1 \quad , \quad y_2 = kx_2z_2$$
$$\frac{y_1}{x_1z_1} = k \qquad \frac{y_2}{x_2z_2} = k$$

ومن ذلك نجد أن $\frac{y_1}{x_1z_1} = \frac{y_2}{x_2z_2}$ (يسمى هذا التناسب تناسبًا مشتركًا، أي أن y تتناسب طرديًّا مع حاصل ضرب x ، z).

مثال 2 التغيُّر المشترك

إذا كانت y تتغيَّر تغيّرًا مشتركًا مع x و z ، وكانت $y = 20$ عندما $x = 5$ و $z = 3$، فأوجد قيمة y عندما $x = 9$ و $z = 2$.

تحقق من فهمك

2) إذا كانت r تتغيَّر تغيُّرًا مشتركًا مع v و t ، وكانت $r = 70$ عندما $v = 10$ و $t = 4$ ، فأوجد قيمة r عندما $v = 2$ ، و $t = 8$.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

التغيُّر العكسي والتغيُّر المركّب هناك نوع ثالث من التغيُّر هو **التغيُّر العكسي**، فإذا تغيَّرت الكميتان عكسيًّا فحاصل ضربهما يساوي ثابتًا هوَ k .

تتغير كميتان موجبتان أو سالبتان معًا عكسيًّا إذا كانت إحداهما تزيد بنقصان الأخرى. وتتغير كميتان إحداهما موجبة والأخرى سالبة عكسيًّا إذا كانت إحداهما تزيد بزيادة الأخرى، فعلى سبيل المثال تتغيَّر السرعة والزمن اللازمان لقطع مسافة ثابتة تغيّرًا عكسيًّا؛ فكلما زادت السرعة قلّ الزمن اللازم لقطع المسافة.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

التغيُّر العكسي

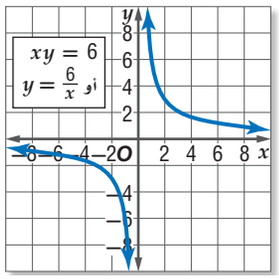
التعبير اللفظي: تتغيَّر y عكسيًّا مع x إذا وجد عدد $k \neq 0$ ، بحيث

$x\,y = k$ أو $y = \frac{k}{x}$، حيث $x \neq 0$ و $y \neq 0$

مثال: إذا كانت $xy = 12$ ، فإن y تتغير عكسيًّا مع x. فكلما زادت x نقصت y والعكس، فعندما $x = 2$ فإن $y = 6$، بينما عندما $x = 3$ فإن $y = 4$.

إذا كانت y تتغيَّر مع x كما في الجدول المجاور، فإنك تلاحظ أن قيم x تزداد بتناقص قيم y، وهما كميتان موجبتان؛ لذا فإن y تتغير تغيُّرًا عكسيًّا مع x بحيث $xy = 6$ أو $y = \frac{6}{x}$، ويكون التمثيل البياني لهذه المعادلة كما في الشكل المجاور.

x	6	3	2
y	1	2	3



وبما أن k عدد موجب فإن قيم y تتناقص بازدياد قيم x .

لاحظ أن التمثيل البياني للتغيُّر العكسي يشبه التمثيل البياني لدالّة المقلوب تمامًا.

يمكنك استعمال التناسب لحل مسائل تتضمن تغيّرًا عكسيًّا مُعطىً فيها بعض القيم، والتناسب الآتي هو أحد التناسبات التي يمكن تكوينها.

$$x_1 y_1 = k \text{ ، } x_2 y_2 = k$$

$$x_1 y_1 = x_2 y_2$$

ومن ذلك نجد أنَّ $\frac{x_1}{y_2} = \frac{x_2}{y_1}$ (يسمى هذا التناسب تناسبًا عكسيًّا؛ أي أن y تتناسب عكسيًّا مع x).

مثال 3

التغيُّر العكسي

إذا كانت a تتغيَّر عكسيًّا مع b وكانت $a = 28$ عندما $b = 2$، فأوجد قيمة a عندما $b = 10$.

تحقق من فهمك

3) إذا كانت x تتغيَّر عكسيًّا مع y ، وكانت $x = 24$ عندما $y = -4$ ، فأوجد قيمة x عندما $y = -12$.

يُستعمل التغيُّر العكسي في كثيرٍ من التطبيقات الحياتية.

مثال 4 من واقع الحياة — كتابة التغير العكسي وحله

موجات الصوت: يتغيَّر التردد الناتج عن اهتزاز سلك مشدود f عكسيًّا مع طول السلك l. فإذا كان التردد الناتج عن اهتزاز سلك مشدود طوله 10 in يساوي 512 دورة في الثانية، فأوجد تردد سلك مشدود طوله 8 in.

تحقق من فهمك

4) فضاء: يتغيَّر الطول الظاهري لجسم عكسيًّا مع بُعد الناظر إلى الجسم. إذا كان بُعد الأرض عن الشمس 93 مليون ميل تقريبًا، وبُعد المشتري عن الشمس 483.6 مليون ميل، فكم مرة سيبدو طول قطر الشمس أكبر عند النظر إليها من الأرض مقارنة بطول قطرها عند النظر إليها من المشتري؟

هناك نوع رابع من التغيُّر هو **التغيُّر المركّب**، ويحدث عندما تتغيَّر كمية ما طرديًّا أو عكسيًّا أو كليهما معًا مع كميتين أخريين أو أكثر.

إذا كانت y تتغيَّر طرديًّا مع x، وy تتغيَّر عكسيًّا مع z، وعلمت بعض القيم، فإنه يمكنك استعمال التناسب لإيجاد القيم الأخرى المجهولة.

$$y_1 = \frac{kx_1}{z_1} \quad , \quad y_2 = \frac{kx_2}{z_2}$$
$$\frac{y_1 z_1}{x_1} = k \qquad \frac{y_2 z_2}{x_2} = k$$

ومن ذلك نجد أن $\frac{y_1 z_1}{x_1} = \frac{y_2 z_2}{x_2}$ (يُسمّى هذا التناسب تناسبًا مركّبا، أي أن y تتناسب طرديًّا مع x وعكسيًّا مع z).

مثال 5 التغيُّر المركّب

إذا كانت f تتغيَّر طرديًّا مع g وعكسيًّا مع h، وكانت $g = 24$ عندما $h = 2$ و $f = 6$، فأوجد قيمة g عندما $f = 18$ و $h = -3$.

إرشادات للدراسة

التغيُّر المركّب

في العلاقة $y = \frac{kx}{z}$ تظهر الكميات التي تتغيَّر طرديًّا مع y في البسط. أما التي تتغيَّر عكسيًّا فتظهر في المقام.

تحقق من فهمك

5) إذا كانت p تتغيَّر طرديًّا مع r وعكسيًّا مع t، وكانت $t = 20$ عندما $p = 4$، و $r = 2$. فأوجد قيمة t عندما $r = 10$ و $p = -5$؟

تأكد

الأمثلة 1—3

1) إذا كانت y تتغيَّر طرديًّا مع x ، وكانت $y = 12$ عندما $x = 8$، فأوجد قيمة y عندما $x = 14$.

2) إذا كانت y تتغيَّر تغيُّرًا مشتركًا مع x و z، وكانت $y = -50$ عندما $z = 5$ و $x = -10$ ، فأوجد قيمة y عندما $x = 9$ و $z = -3$.

3) إذا كانت y تتغيَّر عكسيًّا مع x ، وكانت $y = -18$ عندما $x = 16$ ، فأوجد قيمة x عندما $y = 9$.

مثال 4

4) **خرائط:** تتناسب المسافات على الخرائط تناسبًا طرديًّا مع المسافات الفعلية على سطح الأرض. إذا كانت مسافة 2 in على إحدى الخرائط تعادل 15 mi على سطح الأرض. وكانت المسافة بين نقطتين تمثلان مدينتين على الخريطة 12 in، فأوجد المسافة الحقيقية بينهما.

مثال 5

5) إذا كانت a تتغيَّر طرديًّا مع b، وعكسيًّا مع c ، وكانت $b = 16$ عندما $c = 2$ و $a = 4$ ، فأوجد قيمة b عندما $a = 8$ و $c = -3$.

تدرب وحل المسائل

مثال 1

إذا كانت x تتغيَّر طرديًّا مع y ، فأوجد قيمة x عندما $y = 8$ في كلٍّ من الحالتين الآتيتين:

6) إذا كانت $x = 6$، عندما $y = 32$.

7) إذا كانت $x = 11$، عندما $y = -3$.

8) **فضاء:** إذا كان وزن جهاز استكشاف على الأرض 360 رطلًا ، ووزنه على سطح القمر 60 رطلًا ، فاكتب معادلة تربط بين وزن جسم w على سطح الأرض ووزنه m على سطح القمر.

مثال 2

إذا كانت a تتغيَّر تغيُّرًا مشتركًا مع b و c ، فأوجد قيمة a عندما $b = 4$ و $c = -3$ في كلٍّ من الحالتين الآتيتين:

9) إذا كانت $a = -108$، عندما $b = 2$ و $c = 9$.

10) إذا كانت $a = 24$، عندما $b = 8$ و $c = 12$.

مثال 3

إذا كانت f تتغيَّر عكسيًّا مع g ، فأوجد قيمة f عندما $g = -6$ في كلٍّ من الحالتين الآتيتين:

11) إذا كانت $f = -12$، عندما $g = 19$.

12) إذا كانت $f = 0.6$، عندما $g = -21$.

مثال 4

13) **طيور:** عندما يهاجر سرب من الطيور من مكان إلى آخر كل عام، فإنه يقطع مسافة تتغيَّر طرديًّا مع الزمن الذي يقضيه في الطيران.

a) إذا قطع سرب الطيور مسافة 375 mi في 7.5 h ، فاكتب معادلة تغيُّر طردي تمثل هذا الموقف.

b) إذا قطع سرب الطيور مسافة 3000 mi خلال هجرته، فأوجد عدد ساعات طيرانه.

مثال 5

14) إذا كانت x تتغيَّر طرديًّا مع y ، وعكسيًّا مع z، وكانت $z = 20$ عندما $x = 6$ و $y = 14$ ، فأوجد قيمة z عندما $x = 10$ و $y = -7$.

حدِّد إذا كانت كل علاقة ممثلة في الجداول أدناه تمثل تغيّرًا طرديًّا، أو تغيّرًا عكسيًّا، أو غير ذلك:

15)

x	y
4	12
8	24
16	48
32	96

16)

x	y
8	2
4	4
−2	−8
−8	−2

17)

x	y
2	4
3	9
4	16
5	25

18) إذا كانت x تتغيَّر عكسيًّا مع y، وكانت $x = 16$ عندما $y = 5$ فأوجد قيمة x عندما $y = 20$.

حدِّد إذا كانت المعادلة في كلٍّ مما يأتي تمثل تغيّرًا طرديًّا، أو عكسيًّا، أو مشتركًا، أو مركّبا، ثم أوجد ثابت التغيُّر (التناسب) في كلٍّ منها :

19) $a = 27b$

20) $c = \frac{7}{d}$

21) $-10 = gh$

22) $m = 20cd$

إرشادات للدراسة

التغيُّر الطردي والتغيُّر العكسي

يمكن تحديد نوع التغيُّر من خلال جدول قيم لـ x و y. فإذا كانت $\frac{y}{x}$ تساوي قيمة ثابتة فالتغيُّر طردي. أما إذا كانت xy تساوي قيمة ثابتة فالتغيُّر عكسي.

23) كيمياء: يتغيَّر حجم غاز معين v طرديًّا مع درجة حرارته t . وعكسيًّا مع ضغطه p حيث $\left(v=\frac{kt}{p}\right)$.

a) هل تمثل المعادلة تغيُّرًا طرديًّا، أم عكسيًّا أم مشتركًا أم مركّبًا؟

b) عينة من الغاز حجمها 8 لترات، ودرجة حرارتها 275° كلفن ، وضغطها 1.25 وحدة ضغط جوي، تم ضغطها ليصبح حجمها 6 لترات وتسخينها إلى درجة حرارة 300° كلفن . كم يصبح ضغط الغاز عندئذ؟

24) جاذبية: ينص قانون الجاذبية العام على أن قوة الجذب F بالنيوتن بين أي جسمين تتغيَّر طرديًّا مع حاصل ضرب كتلتيهما بالكيلو جرام m_1 و m_2 ، وعكسيًّا مع مربع المسافة بينهما d بالمتر. وتبين المعادلة $F=\frac{Gm_1m_2}{d^2}$ هذه العلاقة، حيث G ثابت الجاذبية العام، وقيمته $6.67\times10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2$.

a) إذا كانت المسافة بين الأرض والقمر $3.84\times10^{8}\ \text{m}$ تقريبًا، وكتلة القمر $7.36\times10^{22}\ \text{kg}$. وكتلة الأرض $5.97\times10^{24}\ \text{kg}$ ، فما مقدار قوة الجذب التي تؤثر بها كل منهما في الآخر؟

b) إذا كانت المسافة بين الأرض والشمس $1.5\times10^{11}\ \text{m}$تقريبًا، وكتلة الشمس $1.99\times10^{30}\ \text{kg}$ تقريبًا، فما مقدار قوة الجذب التي تؤثر بها كل من الشمس والأرض في الآخر؟

مسائل مهارات التفكير العليا

25) اكتشف الخطأ: يحل كل من يوسف وتركي مسألة عن التغيُّر المركّب، تتغيَّر فيها z طرديًّا مع x وعكسيًّا مع y. أيهما توصل إلى التناسب الصحيح ؟ وضِّح إجابتك.

يوسف

$$z_1=\frac{kx_1}{y_1},z_2=\frac{kx_2}{y_2}$$
$$k=\frac{z_1y_1}{x_1},k=\frac{z_2y_2}{x_2}$$
$$\frac{z_1y_1}{x_1}=\frac{z_2y_2}{x_2}$$

تركي

$$z_1=\frac{kx_1}{y_1},z_2=\frac{kx_2}{y_2}$$
$$k=\frac{z_1x_1}{y_1},k=\frac{z_2x_2}{y_2}$$
$$\frac{z_1x_1}{y_1}=\frac{z_2x_2}{y_2}$$

26) تبرير: وضِّح لماذا يعد بعض المختصين في الرياضيات التغيّر المشترك تغيُّرًا مركّبًا، ولكنهم لا يعدون التغيُّر المركّب مشتركًا.

27) مسألة مفتوحة: صف ثلاث كميات من واقع الحياة تتغيَّر تغيُّرًا مشتركًا فيما بينها.

28) اكتب: حدِّد أنواع التغيُّرات التي لا يمكن أن يكون الصفر أحد قيمها. وضِّح إجابتك.

تدريب على اختبار

29) إذا كانت a تتغيَّر طرديًّا مع b ، وعكسيًّا مع c ، وكانت $b=15$ عندما $c=2$, $a=4$ فما قيمة b عندما $a=7$, $c=-8$ ؟

A $\frac{-1}{105}$ **C** $\frac{1}{105}$

B -105 **D** 105

30) ما التغيُّر الذي تمثله العلاقة الموضَّحة بالجدول المجاور؟

x	y
15	5
18	6
21	7
24	8

A طردي **C** مشترك

B عكسي **D** مركّب

مراجعة تراكمية

حدِّد خطوط التقارب الرأسية ونقط الانفصال (إن وجدت) في التمثيل البياني لكل دالّة نسبية مما يأتي: (الدرس 4-5)

31) $f(x)=\frac{1}{x^2+5x+6}$

32) $f(x)=\frac{x+2}{x^2+3x-4}$

33) $f(x)=\frac{x^2+4x+3}{x+3}$

أوجد LCM لكلٍّ ممَّا يأتي: (الدرس 2-5)

34) $a,2a,a+1$

35) $8,24x,12$

36) $x^4,3x^2,2xy$

مجموعة رقمنة الرياضيات
تطوير - إتقان - توثيق
رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

5-6

حل المعادلات والمتباينات النسبية
Solving Rational Equations and Inequalities

فيما سبق:
درست تبسيط عبارات نسبية. الدرس (1-5)

والآن:
- أحل معادلات نسبية.
- أحل متباينات نسبية.

المفردات:
المعادلة النسبية
rational equation
المتباينة النسبية
rational inequality

لماذا؟

يبلغ رسم العضوية في أحد الأندية الرياضية 200 ريال شهريًّا بالإضافة إلى 10 ريالات عند كل زيارة للنادي. فإذا كان أحد الأعضاء يزور النادي x مرة شهريًّا، فإنه سيدفع مبلغًا مقداره $(200+10x)$ ريالًا في الشهر. ويمكن حساب التكلفة الفعلية لكل زيارة للعضو باستعمال العبارة :

$\frac{200+10x}{x}$ ، حيث x عدد مرات زيارة النادي.

ولحساب عدد مرات زيارة أحد الأعضاء للنادي إذا كانت التكلفة الفعلية للزيارة الواحدة 30 ريالًا، عليك أن تحل المعادلة $\frac{200+10x}{x} = 30$.

حل المعادلات والمتباينات النسبية : تُسمى المعادلة التي تحتوي على عبارة نسبية أو أكثر **معادلة نسبية**، ويكون حل هذه المعادلة عادة أسهل عندما تتخلص من المقامات، وذلك بضرب طرفي المعادلة في LCM لها. ومن الممكن الحصول على حلول دخيلة عند ضرب طرفي المعادلة النسبية في LCM للمقامات؛ لذا فإنه من الضروري التحقق من صحة الحل لاستثناء القيم التي تجعل أحد مقامات المعادلة صفرًا.

مراجعة المفردات

الحل الدخيل
هو الحل الذي لايحقق المعادلة الأصلية.

مثال 1 حل معادلة نسبية

حُلّ المعادلة $\frac{2x}{x+5} - \frac{x^2-x-10}{x^2+8x+15} = \frac{3}{x+3}$.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توظيف

تحقق:

تحقق من فهمك

(1A) $\frac{5}{y-2}+2=\frac{17}{6}$

(1B) $\frac{2}{z+1}-\frac{1}{z-1}=\frac{-2}{z^2-1}$

(1C) $\frac{7n}{3n+3}-\frac{5}{4n-4}=\frac{3n}{2n+2}$

(1D) $\frac{1}{p-2}=\frac{2p+1}{p^2+2p-8}+\frac{2}{p+4}$

يمكنك استعمال المعادلة التي تربط بين المسافة d والسرعة r والزمن t لحل كثير من المعادلات النسبية. وأكثر الأشكال شيوعًا لهذه المعادلة هو $d=rt$. وكذلك يمكنك استعمال الشكلين الآخرين، وهما: $t=\frac{d}{r}$, $r=\frac{d}{t}$.

مثال 2 من واقع الحياة — استعمال المعادلات النسبية في مسائل الحركة

تجديف: ركب سعيد قاربًا سرعته 6 mi/h في المياه الراكدة وسار به دون توقف مسافة 10 mi؛ نصفها في اتجاه التيار ونصفها الآخر عكسه، فاستغرق زمنًا قدره 3 h، أوجد سرعة التيار.

افهم:

خطط:

إرشادات للدراسة

مسائل المسافة

عندما تتضمن مسائل المسافة الذهاب والعودة، فإن المسافة في الذهاب تساوي المسافة في العودة، ما لم يذكر خلاف ذلك.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

حل:

تحقق

الربط بالحياة

تمثل المخلفات البلاستيكية خطورة عالية وكارثة بيئية وصحية على الإنسان والحياة البرية والبحرية؛ لما بها من مواد كيميائية لا تتحلل في التربة، وتشمل العلب البلاستيكية والأطعمة والمنظفات والمشروبات الغازية وغيرها.
وتستهلك الدول العربية منها 50 مليار علبة سنويًا.

تحقق من فهمك

2) طيران: إذا قطعت طائرة مسافة 2368 mi في رحلة ذهاب وعودة دون توقف في 7 h، وكانت سرعة الريح 20 mi/h ، فما سرعة الطائرة في الريح الساكنة؟

يمكنك حل المسائل الحياتية التي تتعلق بالأعمال عادة باستعمال معادلات نسبية.

مثال 3 من واقع الحياة

استعمال المعادلات والمتباينات النسبية في مسائل العمل

خدمة المجتمع: يقوم طلاب الصفين الأول الثانوي والثاني الثانوي في أحد الأحياء بحملة توعية بخطر النفايات البلاستيكية لسكان الحي. فإذا علمت أن هذا العمل يحتاج إلى 24 ساعة إذا قام به طلاب الصف الثاني الثانوي، و18 ساعة عمل إذا قام به طلاب الصفين معًا، فكم ساعةً يحتاج طلاب الصف الأول الثانوي للقيام بالعمل وحدهم؟

افهم:

خطط:

إرشادات للدراسة

جداول

تكوين الجداول - كما في المثال 3 - يفيد في تنظيم وحل المسائل بشكل عام.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توظيف

حُل:

تحقق:

تحقق من فهمك

3) طلاء: يحتاج ناصر ومحمد إلى 6h لطلاء سور إذا عملا معًا، ويحتاج ناصر إلى 10h للقيام بالعمل وحده. فكم ساعة يحتاج محمد إذا قام بالعمل وحده؟

حل المتباينات النسبية: **المتباينات النسبية**، هي المتباينات التي تحتوي على عبارة نسبية أو أكثر. ولحلها اتبع الخطوات الآتية:

مفهوم أساسي

حل المتباينات النسبية

أضف مطويتك

الخطوة 1: حدِّد القيم المستثناة وهي القيم التي يكون عندها المقام صفرًا.

الخطوة 2: حل المعادلة المرتبطة والتي تحصل عليها بوضع رمز المساواة بدلًا من رمز التباين في المتباينة.

الخطوة 3: استعمل القيم التي حصلت عليها في الخطوتين السابقتين؛ لتقسيم خط الأعداد إلى فترات.

الخطوة 4: اختبر قيمة من كل فترة لتحديد الفترات التي تحقق أعدادها المتباينة.

مثال 4

حل متباينة نسبية

حل المتباينة النسبية $\frac{x+1}{4} > \frac{1}{x-2} - \frac{x}{3}$.

الخطوة 1:

الخطوة 2:

إرشادات للدراسة

تقسيم خط الأعداد

من الضروري استعمال القيم المستثناة وحلول المعادلة المرتبطة جميعها عند تقسيم خط الأعداد إلى فترات.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

الخطوة 3:

الخطوة 4:

تحقق من فهمك

(4A $\frac{5}{x}+\frac{6}{5x}>\frac{2}{3}$

(4B $\frac{4}{3x}+\frac{7}{x}<\frac{5}{9}$

تأكـد

مثال 1 حُلَّ كلَّ معادلة ممَّا يأتي:

1) $\frac{4}{7}+\frac{3}{x-3}=\frac{53}{56}$

2) $\frac{7}{3}-\frac{3}{x-5}=\frac{19}{12}$

3) $\frac{8}{x-5}-\frac{9}{x-4}=\frac{5}{x^2-9x+20}$

4) $\frac{5}{x+2}-\frac{3}{x-2}=\frac{12}{x^2-4}$

مثال 2

5) مسافة: قطع وليد مسافة 40 km ذهابًا وعودة مستعملًا دراجته التي سرعتها 11.5 km/h عندما تكون الريح ساكنة، فإذا سار في اتجاه الريح زمنًا قدره ساعة و 20 دقيقة، وساعتان ونصف الساعة عكس اتجاه الريح.

a) اكتب عبارة تمثل الزمن الذي استغرقه أثناء سيره في اتجاه الريح.

b) اكتب عبارة تمثل الزمن الذي استغرقه أثناء سيره عكس اتجاه الريح.

c) اكتب معادلة نسبية وحلها لإيجاد سرعة الريح.

مثال 3

6) تبليط: يعمل كلٌّ من أحمد وعلي في التبليط، إذا كان أحمد يحتاج إلى 6 أيام لتبليط فناء منزل وحده، في حين يحتاج علي إلى 5 أيام للقيام بالعمل نفسه. فكم يومًا يحتاجان إليه إذا عملا معًا في تبليط هذا الفناء؟

مثال 4 حُلَّ كلَّ متباينة مما يأتي:

7) $3-\frac{4}{x}>\frac{5}{4x}$

8) $\frac{x-2}{x+2}+\frac{1}{x-2}>\frac{x-4}{x-2}$

9) $\frac{3}{4}-\frac{1}{x-3}>\frac{x}{x+4}$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 حُلَّ كلَّ معادلة ممَّا يأتي:

10) $\frac{9}{x-7}-\frac{7}{x-6}=\frac{13}{x^2-13x+42}$

11) $\frac{2}{y-5}+\frac{1}{2y+1}=\frac{2}{2y^2-9y-5}$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

المثالان 2, 3

12) بناء: تحتاج مجموعة من العمال إلى 12 يومًا لبناء مرآب سيارات، في حين تحتاج مجموعة أخرى إلى 16 يومًا لإنجاز العمل نفسه، فكم تحتاج المجموعتان معًا لبناء المرآب نفسه؟

13) طيران: سارت طائرة مسافة معينة في عكس اتجاه الريح في 20 h ، واحتاجت إلى 16 h لقطع المسافة نفسها في رحلة العودة، ولكن في اتجاه الريح. إذا كانت سرعة الطائرة في أثناء الريح الساكنة 500 mi/h ، فما سرعة الريح خلال الرحلة؟

مثال 4

14) حُلّ المتباينة: $\frac{3}{5x}+\frac{1}{6x}>\frac{2}{3}$.

15) تمثيلات متعددة: افترض أن $\frac{x-1}{x-3}=\frac{2}{x-3}+\frac{1}{x}$.

a) جبريًا: حُلّ هذه المعادلة، وهل يوجد حل دخيل؟

b) بيانيًا: مثّل: $y_2=\frac{x-1}{x-3}$ ، $y_1=\frac{2}{x-3}+\frac{1}{x}$ بيانيًّا على المستوى الإحداثي نفسه، حيث $0<x<5$.

c) تحليليًا: ما قيمة (قيم) x التي يتقاطع عندها التمثيلان البيانيان؟ وهل يتقاطعان عند الحل الدخيل للمعادلة الأصلية؟

d) لفظيًا: استعمل المعلومات التي حصلت عليها في الفرع(c) ؛ لتصف كيف يمكنك استعمال التمثيل البياني للمعادلة لتحديد ما إذا كان أحد الحلول حلًّا دخيلًا.

16) حُلّ المعادلة: $\frac{2}{y+3}-\frac{3}{4-y}=\frac{2y-2}{y^2-y-12}$ ، وتحقق من صحة حلك.

مسائل مهارات التفكير العليا

17) مسألة مفتوحة: أعط مثالًا على معادلة نسبية يمكن حلُّها بضرب طرفَي المعادلة في $4(x+3)(x-4)$.

18) تحدٍّ: حُلّ المعادلة $\frac{1+\frac{9}{x}+\frac{20}{x^2}}{1-\frac{25}{x^2}}=\frac{x+4}{x-5}$

19) تبرير: وضِّح لماذا يجب التحقق من حلول المعادلة النسبية.

20) اكتب: عند استعمال تطبيق القوائم وجداول البيانات في الحاسبة البيانية لاستكشاف الدالّة: $f(x)=\frac{1}{x^2-x-6}$ ، فإن الحاسبة البيانية تعطي خطأ عند القيمتين $x=-2$ و $x=3$. وضِّح ماذا يعني ذلك؟

تدريب على اختبار

21) ما حل المعادلة: $\frac{11}{a+2}-\frac{10}{a+5}=\frac{36}{a^2+7a+10}$ ؟

A -1 **B** $-\frac{1}{2}$ **C** $\frac{1}{2}$ **D** 1

22) ما قيمة x في المعادلة $\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{x-1}{2}\right)=4$ ؟

A -7 **B** $-\frac{1}{2}$ **C** $-\frac{1}{7}$ **D** 7

مراجعة تراكمية

23) حدِّد إذا كانت العلاقة المجاورة تمثل تغيّرًا طرديًّا، أم تغيرًا عكسيًّا، أم غير ذلك: (الدرس 5-5)

x	14	28	56	112
y	3	1.5	0.75	0.375

24) مثِّل الدالّة $f(x)=\frac{x+4}{x^2+7x+12}$ بيانيًّا. (الدرس 4-5)

25) اكتب الحدود الثلاثة التالية في المتتابعة: ... 2, 8, 14, 20, (مهارة سابقة)

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

حلُّ المعادلات والمتباينات النسبية
Solving Rational Equations and Inequalities

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

الهدف

أستعمل الحاسبة البيانية TI-nspire لأحلَّ معادلات ومتباينات نسبية بيانيًا أو باستعمال تطبيق القوائم وجداول البيانات.

يمكنك استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire لحلِّ معادلات نسبية باستعمال التمثيل البياني أو باستعمال تطبيق القوائم وجداول البيانات.

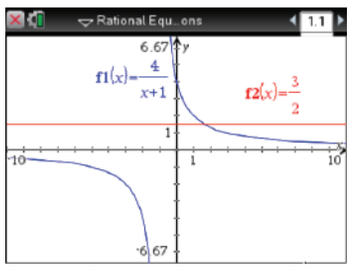
نشاط 1 معادلة نسبية

حُلَّ المعادلة $\frac{4}{x+1}=\frac{3}{2}$.

مثِّل طرفَي المعادلة النسبية بيانيًّا، ثم حدّد نقاط التقاطع.

الخطوة 1 مثّل طرفَي المعادلة بيانيًّا.

مثّل طرفَي المعادلة بيانيًّا كدالّتين مستقلتين، بأن تدخل $\frac{4}{x+1}$ في f1 ، و $\frac{3}{2}$ في f2، ثم مثّل المعادلتين بيانيًّا، وذلك بالضغط على مفتاح (on) ، ومن الشاشة الظاهرة اختر 1 مستند جديد ، ثم اختر 2:إضافة تطبيق الرسوم البيانية واختر (ctrl) (÷) ، ثم اكتب $\frac{4}{x+1}$ واضغط (enter) ، ثم اضغط المفاتيح (÷) (ctrl) (tab) واكتب $\frac{3}{2}$ واضغط (enter)

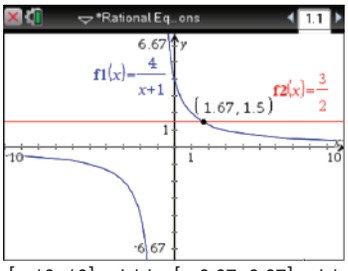


[−10, 10] scl:1 by [−6.67, 6.67] scl:1

الخطوة 2 أوجد نقاط التقاطع لإيجاد الحلِّ.

تمكِّنك ميزة نقاط التقاطع في قائمة تحليل الرسم البياني من تقدير الزوج المرتَّب الذي يمثِّل نقطة التقاطع.

اضغط على (menu) ثم اختر منها 6:تحليل الرسم البياني ، ثم اختر 4:نقاط التقاطع ، وقم بالضغط على أيِّ نقطة على الشاشة وحرّك المؤشر مرورًا بنقطة التقاطع، فتظهر نقطة التقاطع (1.67 , 1.5).

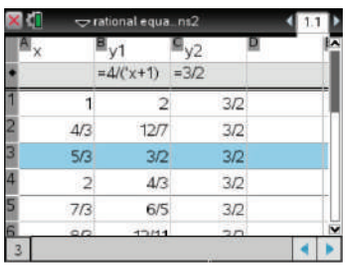


[−10, 10] scl:1 by [−6.67, 6.67] scl:1

أي أن الحل هو $x=1.67\approx\frac{5}{3}$.

الخطوة 3 استعمال تطبيق القوائم وجداول البيانات

تحقَّق من صحَّة حلِّك باستعمال تطبيق القوائم وجداول البيانات. اعمل جدولًا يبيِّن قيم x، على أن تتزايد القيم بمقدار $\frac{1}{3}$ كلَّ مرَّة، وذلك بالضغط على مفتاح (on) ، ومن الشاشة الظاهرة اختر 1 مستند جديد ثم اختر 4:إضافة تطبيق القوائم وجداول البيانات ، اكتب x في العمود الأول، واكتب قيم x ابتداءً من 1 وبزيادة قدرها $\frac{1}{3}$ (لأن الحلّ الذي ستتحقَّق منه هو $x=\frac{5}{3}$)، واكتب $y_1=\frac{4}{x+1}$ في العمود الثاني، و $y_2=\frac{3}{2}$ في العمود الثالث، ثم اضغط (enter) واختر مرجع المتغير ، فتظهر الشاشة المجاورة.



يبيِّن الجدول قيم x وقيم y المناظرة لها لكلِّ تمثيل بياني. فعندما $x=\frac{5}{3}$ ،

يكون للدالّتين القيمة نفسها، وهي $\frac{3}{2}$ ، وهذا يعني أن حلَّ المعادلة هو $\frac{5}{3}\approx 1.67$.

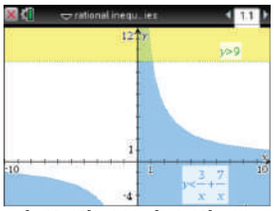
يمكنك استعمال الخطوات الآتية لحلِّ متباينات نسبية مستعملًا الحاسبة البيانية TI-nspire.

نشاط 2 متباينة نسبية

حل المتباينة $\frac{3}{x}+\frac{7}{x}>9$.

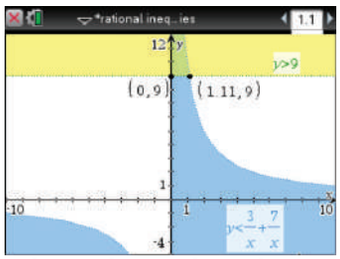
الخطوة 1 مثِّل المتباينتين

أعد كتابة المسألة على صورة نظام من متباينتين؛ المتباينة الأولى هي $y<\frac{3}{x}+\frac{7}{x}$، والثانية $y>9$، ومثِّلهما بالضغط على مفتاح on، ومن الشاشة الظاهرة اختر 1 مستند جديد، ثم اختر 2:إضافة تطبيق الرسوم البيانية ثم <، واكتب $\frac{3}{x}+\frac{7}{x}$ ثم اضغط enter، فيظهر تظليل تحت التمثيل البياني. ولتمثيل المتباينة الثانية اضغط على المفاتيح > tab del، واكتب 9، ثم اضغط enter، ولإظهار الجزء المطلوب من التمثيل البياني على الشاشة قم بالضغط على مفتاح menu، ومنها اختر 4:تكبير/ تصغير النافذة ثم 1:إعدادات النافذة لتحديد التدريج المناسب لكلٍّ من x , y، ولاحظ أن منطقة حلِّ المتباينتين قد ظُلِّلت باللون الأخضر.



[−10, 10] scl:1 by [−4, 12] scl:1

الخطوة 2 استعمل نقاط التقاطع لإيجاد الحلِّ.

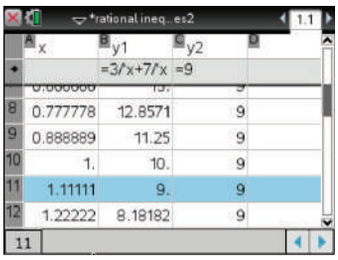


[−10, 10] scl:1 by [−4, 12] scl:1

لإيجاد نقطة (نقاط) تقاطع التمثيلين البيانيين اضغط menu ثم 8:الهندسة ومنها 1:النقاط والمستقيمات، واختر منها 3:نقطة (نقاط) التقاطع واضغط على أحد التمثيلين البيانيين، ثم اضغط على الآخر، فتظهر نقطة التقاطع (1.11 , 9)، كرِّر ذلك مرّة أخرى، واضغط على محور y، والتمثيل البياني لِـ $y=9$؛ فتظهر نقطة التقاطع (0 , 9) لتتوصَّل إلى أن مجموعة الحلِّ هي $\{x \mid 0<x<1.11\}$.

الخطوة 3 استعمل تطبيق القوائم وجداول البيانات

تحقَّق من صحّة حلِّك باستعمال تطبيق القوائم وجداول البيانات .
اعمل جدولًا يبيِّن قيم x على أن تتزايد القيم بمقدار $\frac{1}{9}$ أو 0.111111 كلَّ مرَّة، وذلك بالضغط على مفتاح on، ومن الشاشة الظاهرة اختر 1 مستند جديد ومنها اختر 4:إضافة تطبيق القوائم وجداول البيانات، اكتب x في العمود الأول، واكتب قيم x ابتداءً من 0 وبزيادة قدرها $\frac{1}{9}$(لأن الحلِّ الذي ستتحقق منه هو $x=1.11$).
واكتب $y_1=\frac{3}{x}+\frac{7}{x}$ في العمود الثاني، و$y_2=9$ في العمود الثالث.



تنقَّل بالمؤشِّر خلال الجدول. ستلاحظ أن قيم x الأكبر من 0 والأقل من $\frac{10}{9}\approx 1.11$، يكون عندها $y_1>y_2$.
وهذا يؤكد أن مجموعة حلِّ المتباينة هي: $\{x \mid 0<x<1.11\}$

تمارين

حُلَّ كلَّ معادلة أو متباينة مما يأتي:

1) $\frac{1}{x}+\frac{1}{2}=\frac{2}{x}$
2) $\frac{1}{x-4}=\frac{2}{x-2}$
3) $\frac{4}{x}=\frac{6}{x^2}$
4) $\frac{1}{1-x}=1-\frac{x}{x-1}$
5) $\frac{1}{x+4}=\frac{2}{x^2+3x-4}-\frac{1}{1-x}$
6) $\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}>5$
7) $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x}<0$
8) $1+\frac{5}{x-1}\le 0$
9) $2+\frac{1}{x-1}\ge 0$

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

العبارات النسبية والعمليات عليها (الدرسان 2-5 , 1-5)

- ضرب العبارات النسبية وقسمتها يشبه ضرب الكسور وقسمتها.
- لتبسيط كسر مركب بسّط البسط والمقام كل على حدة، ثم بسّط العبارة الناتجة.
- جمع العبارات النسبية وطرحها يشبه جمع الكسور وطرحها.

دوالّ المقلوب والدوالّ النسبية (الدرسان 4-5 , 3-5)

- دالّة المقلوب هي دالّة على الصورة $f(x)=\frac{1}{a(x)}$، حيث $a(x)$ دالّة خطية و $a(x) \neq 0$.
- الدالّة النسبية هي دالّة على الصورة $f(x)=\frac{a(x)}{b(x)}$، حيث $a(x)$ و $b(x)$ كثيرتا حدود، و $b(x) \neq 0$.
- يوجد لبعض دوالّ المقلوب والدوالّ النسبية مستقيمات يقترب منها التمثيل البياني للدوالّ، تسمى خطوط التقارب.
- أصفار الدالّة النسبية هي القيم التي تجعل $a(x) = 0$.

التغيُّر: الطردي، المشترك، العكسي، والمركب (الدرس 5-5)

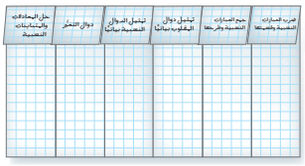
- التغيُّر الطردي: تتغيّر y طرديًّا مع x، إذا وجد عدد $k \neq 0$ ، بحيث $y = kx$.
- التغيُّر المشترك: تتغيّر y تغيرًا مشتركًا مع x و z ، إذا وجد عدد $k \neq 0$ ، بحيث $y = kxz$.
- التغيُّر العكسي: تتغيّر y عكسيًّا مع x، إذا وجد عدد $k \neq 0$ ، بحيث $xy = k$ ، أو $y=\frac{k}{x}$ حيث $x \neq 0 , y \neq 0$.
- التغيُّر المركب: ويحدث عندما تتغير كمية ما طرديًّا أو عكسيًّا أو كليهما معًا مع كميتين أخريين أو أكثر.

حل المعادلات والمتباينات النسبية (الدرس 6-5)

- لحل المعادلات النسبية تخلص من المقامات بضرب طرفي المعادلة في LCM لها.
- لحل المتباينات النسبية، حل المعادلات المرتبطة، واستعمل القيم التي تحصل عليها لتقسيم خط الأعداد إلى فترات، واختبر قيمة من كل فترة.

المطويات منظم أفكار

تأكد من أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.



المفردات:

العبارة النسبية ص 70
الكسر المركب ص 73
خط التقارب ص 85
خط التقارب الرأسي ص 85
خط التقارب الأفقي ص 85
دالّة المقلوب ص 85
القطع الزائد ص 85
الدالّة النسبية ص 92
نقطة الانفصال ص 94
التغيُّر الطردي ص 99
ثابت التغيُّر ص 99
التغيُّر المشترك ص 100
التغيُّر العكسي ص 101
التغيُّر المركب ص 102
المعادلة النسبية ص 105
المتباينة النسبية ص 108

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة من القائمة السابقة لإكمال كل جملة فيما يأتي:

1) _____ هو عبارة نسبية بسطها ومقامها أو أحدهما عبارة نسبية.

2) إذا تغيَّرت كميتان _____ فإن حاصل ضربهما يساوي ثابتًا k.

3) يعبر عن _____ بمعادلة على الصورة $y = kx$.

4) تُسمى المعادلة التي تحتوي على عبارة نسبية أو أكثر _____ .

5) التمثيل البياني للمعادلة $y=\frac{x}{x+2}$ له _____ عند $x = -2$.

6) يحدث _____ عندما تتغيّر كمية ما طرديًّا مع حاصل ضرب كميتين أخريين أو أكثر.

7) تُسمى النسبة بين كثيرتَي حدود _____ .

8) تظهر _____ على شكل فجوة في التمثيل البياني للدالّة؛ لأن الدالّة غير معرّفة عندها.

9) يحدث _____ عندما تتغيّر كمية ما طرديًّا أو عكسيًّا أو كليهما معًا مع كميتين أخريين أو أكثر.

مراجعة الدروس

5-1 ضرب العبارات النسبية وقسمتها ص 70-78

بسّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

10) $\frac{-16xy}{27z} \cdot \frac{15z^3}{8x^2}$

11) $\frac{x^2-2x-8}{x^2+x-12} \cdot \frac{x^2+2x-15}{x^2+7x+10}$

12) $\frac{x^2-1}{x^2-4} \cdot \frac{x^2-5x-14}{x^2-6x-7}$

13) $\frac{x+y}{15x} \div \frac{x^2-y^2}{3x^2}$

14) $\frac{\frac{x^2+3x-18}{x+4}}{\frac{x^2+7x+6}{x+4}}$

15) **هندسة:** مثلَّث مساحته $(3x^2+9x-54)\text{cm}^2$، وارتفاعه $(x+6)\text{cm}$. أوجد طول قاعدته، ثم اكتبه في أبسط صورة.

مثال 1

بسّط العبارة: $\frac{4a}{3b} \cdot \frac{9b^4}{2a^2}$.

حلّل واختصر العوامل المشتركة: $\frac{4a}{3b} \cdot \frac{9b^4}{2a^2} = \frac{\cancel{2} \cdot 2 \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{3} \cdot 3 \cdot \cancel{b} \cdot b \cdot b \cdot b}{\cancel{3} \cdot \cancel{b} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{a} \cdot a}$

بسّط: $= \frac{6b^3}{a}$

مثال 2

بسّط العبارة: $\frac{r^2+5r}{2r} \div \frac{r^2-25}{6r-12}$.

اضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه: $\frac{r^2+5r}{2r} \div \frac{r^2-25}{6r-12} = \frac{r^2+5r}{2r} \cdot \frac{6r-12}{r^2-25}$

حلّل واختصر العوامل المشتركة: $= \frac{\cancel{r}(r+5)}{\cancel{2r}} \cdot \frac{\cancel{6}(r-2)}{(\cancel{r+5})(r-5)}$

بسّط: $= \frac{3(r-2)}{r-5}$

5-2 جمع العبارات النسبية وطرحها ص 79-84

بسّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

16) $\frac{9}{4ab} + \frac{5a}{6b^2}$

17) $\frac{3}{4x-8} - \frac{x-1}{x^2-4}$

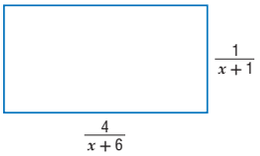
18) $\frac{y}{2x} + \frac{4y}{3x^2} - \frac{5}{6xy^2}$

19) $\frac{2}{x^2-3x-10} - \frac{6}{x^2-8x+15}$

20) $\frac{3}{3x^2+2x-8} + \frac{4x}{2x^2+6x+4}$

21) $\frac{\frac{3}{2x+3} - \frac{x}{x+1}}{\frac{2x}{x+1} + \frac{5}{2x+3}}$

22) **هندسة:** أوجد محيط المستطيل المرسوم أدناه ، ثم اكتبه في أبسط صورة.



مثال 3

بسّط العبارة: $\frac{3a}{a^2-4} - \frac{2}{a-2}$.

حلّل المقام a^2-4: $\frac{3a}{a^2-4} - \frac{2}{a-2} = \frac{3a}{(a-2)(a+2)} - \frac{2}{a-2}$

وحّد المقامين: $= \frac{3a}{(a-2)(a+2)} - \frac{2(a+2)}{(a-2)(a+2)}$

اطرح البسطين: $= \frac{3a-2(a+2)}{(a-2)(a+2)}$

خاصية التوزيع: $= \frac{3a-2a-4}{(a-2)(a+2)}$

بسّط: $= \frac{a-4}{(a-2)(a+2)}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

5-3 تمثيل دوالّ المقلوب بيانيًّا ص 85-90

مثّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا، وحدد مجال ومدى كلٍّ منها:

23) $f(x) = \frac{10}{x}$

24) $f(x) = -\frac{12}{x} + 2$

25) $f(x) = \frac{3}{x+5}$

26) $f(x) = \frac{6}{x-9}$

27) $f(x) = \frac{7}{x-2} + 3$

28) $f(x) = -\frac{4}{x+4} - 8$

29) تشجير: يقوم طلاب الصف الثاني الثانوي بزراعة 28 شجرة ضمن حملة للحفاظ على البيئة. ويعتمد عدد الأشجار التي يزرعها كل طالب على عدد طلاب الصف.

a) اكتب دالّة تمثل هذا الموقف.

b) مثّل هذه الدالّة بيانيًّا.

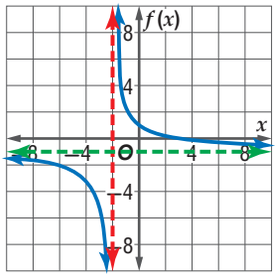
مثال 4

مثّل الدالّة $f(x) = \frac{3}{x+2} - 1$ بيانيًّا، وحدِّد مجالها ومداها.

بما أن $a = 3$: إذن يتسع التمثيل البياني للدالّة الأم رأسيًّا.

ثم $h = -2$: تعني إزاحة التمثيل البياني إلى اليسار وحدتين. وَيوجد خط تقارب رأسي عند $x = -2$.

وَ $k = -1$: تعني إزاحة التمثيل البياني إلى أسفل بمقدار وحدة. وَ يوجد خط تقارب أفقي عند $y = -1$.



المجال: $\{x \mid x \neq -2\}$

المدى: $\{f(x) \mid f(x) \neq -1\}$

5-4 تمثيل الدوالّ النسبية بيانيًّا ص 92-97

أوجد معادلات خطوط التقارب الرأسية، ونقط الانفصال (إن وجدت) للتمثيل البياني لكلِّ دالّة مما يأتي:

30) $f(x) = \frac{3}{x^2 + 4x}$

31) $f(x) = \frac{x+2}{x^2 + 6x + 8}$

32) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x - 24}$

مثّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا:

33) $f(x) = \frac{x+2}{(x+5)^2}$

34) $f(x) = \frac{x}{x+1}$

35) $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x+2}$

36) $f(x) = \frac{x-1}{x^2 + 5x + 6}$

37) مبيعات: يبيع عليٌّ اشتراكات في إحدى الصحف إلى مؤسسات إحدى المدن. فإذا باع 10 اشتراكات لأول 15 مؤسسة زارها، ثم زار x مؤسسة أخرى وباع لكلٍّ منها اشتراكًا. فيمكن حساب نسبة مبيعاته إلى عدد المؤسسات التي زارها باستعمال الدالّة $P(x) = \frac{10 + x}{15 + x}$.

a) مثّل هذه الدالّة بيانيًّا.

b) ما القيم المنطقية لكلٍّ من المجال والمدى في سياق المسألة؟

مثال 5

أوجد معادلات خطوط التقارب الرأسية، ونقط الانفصال (إن وجدت) للتمثيل البياني للدالّة $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3}$.

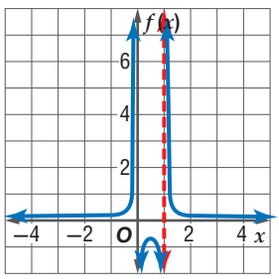
$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+3)}$$

الدالّة غير معرّفة عندما $x = 1$، وعندما $x = -3$.

وبما أن $\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+3)} = \frac{x+1}{x+3}$، فإن $x = -3$ هي معادلة خط التقارب الرأسي وتوجد نقطة انفصال عند $x = 1$.

مثال 6

مثّل الدالّة: $f(x) = \frac{1}{6x(x-1)}$ بيانيًّا.



الدالّة غير معرفة عند $x = 0$، وعند $x = 1$.

وبما أن الدالّة في أبسط صورة، فإن $x = 0$ ، و $x = 1$ خطَّا تقارب رأسيَّان للدالّة.

ارسم الخطين والدالّة بيانيًّا على المستوى الإحداثي نفسه.

وزارة التعليم
Ministry of Education

5-5 دوالّ التغيُّر ص 99-104

38) إذا كانت a تتغيّر طرديًّا مع b ، وكانت $a = 27$ عندما $b = 18$ فأوجد قيمة a عندما $b = 10$.

39) إذا كانت y تتغيّر عكسيًّا مع x، وكانت $y = 15$ عندما $x = 3.5$ ، فأوجد قيمة y عندما $x = -5$.

40) إذا كانت y تتغيّر عكسيًّا مع x، وكانت $y = -3$ عندما $x = 9$، فأوجد قيمة y عندما $x = 81$

41) إذا كانت y تتغيّر تغيّرًا مشتركًا مع x و z ، وكانت $x = 8$، و $z = 3$ عندما $y = 72$ ، فأوجد قيمة y عندما $x = -2$ و $z = -5$.

42) إذا كانت x تتغيّر تغيّرًا طرديًّا مع y وعكسيًّا مع r، وكانت $y = 6$، عندما $r = 4$ و $x = 12$، فأوجد قيمة y عندما $x = 8$ و $r = 10$.

43) **مهن:** يتغيّر أجر أحد العمال طرديًّا مع عدد ساعات عمله، فإذا تقاضى 120 ريالًا مقابل 8 h، فكم ريالًا يتقاضى إذا عمل 5 h؟

مثال 7

إذا كانت y تتغيّر عكسيًّا مع x ، وكانت $x = 24$ عندما $y = -8$، فأوجد قيمة x عندما $y = 15$.

$x_1 y_1 = x_2 y_2$	تناسب عكسي
$24(-8) = x_2 \times 15$	$x_1 = 24 \ , \ y_1 = -8 \ , \ y_2 = 15$
$-192 = 15x_2$	بسّط
$-12\frac{4}{5} = x_2$	اقسم كلًّا من الطرفين على 15

عندما تكون $y = 15$ ، فإن قيمة x هي $-12\frac{4}{5}$.

5-6 حل المعادلات والمتباينات النسبية ص 105-110

حُلّ كل معادلة أو متباينة مما يأتي:

44) $\frac{1}{3} + \frac{4}{x-2} = 6$

45) $\frac{6}{x+5} - \frac{3}{x-3} = \frac{6}{x^2+2x-15}$

46) $\frac{2}{x^2-9} = \frac{3}{x^2-2x-3}$

47) $\frac{4}{2x-3} + \frac{x}{x+1} = \frac{-8x}{2x^2-x-3}$

48) $\frac{x}{x+4} - \frac{28}{x^2+x-12} = \frac{1}{x-3}$

49) $\frac{x}{2} + \frac{1}{x-1} < \frac{x}{4}$

50) $\frac{1}{2x} = \frac{1}{3}$

51) **زراعة:** يستطيع سعيد وحده زراعة إحدى الحدائق في 3 h، في حين يستطيع عليٌّ زراعتها في 4 h . فكم ساعة يحتاجان إليها إذا زرعا الحديقة معًا؟

مثال 8

حُلّ المعادلة $\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x} = 0$ ، وتحقق من صحة حلّك.

LCM للمقامات هو $x(x+2)$.

$$\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x} = 0$$
$$x(x+2)\left(\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x}\right) = x(x+2)(0)$$
$$x(x+2)\left(\frac{3}{x+2}\right) + x(x+2)\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$
$$3(x) + 1(x+2) = 0$$
$$3x + x + 2 = 0$$
$$4x + 2 = 0$$
$$4x = -2$$
$$x = -\frac{1}{2}$$

تحقق:

$$\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x} = 0$$
$$\frac{3}{-\frac{1}{2}+2} + \frac{1}{(-\frac{1}{2})} \stackrel{?}{=} 0$$
$$\frac{3}{\frac{3}{2}} - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$2 - 2 = 0 \ \checkmark$$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

1) $\frac{r^2+rt}{2r} \div \frac{r+t}{16r^2}$

2) $\frac{m^2-4}{3m^2} \cdot \frac{6m}{2-m}$

3) $\frac{m^2+m-6}{n^2-9} \div \frac{m-2}{n+3}$

4) $\frac{\frac{x^2+4x+3}{x^2-2x-15}}{\frac{x^2-1}{x^2-x-20}}$

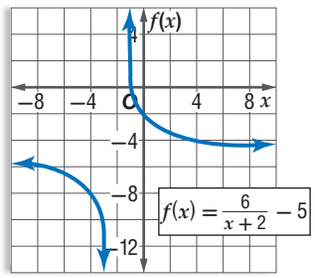
5) $\frac{x+4}{6x+3} + \frac{1}{2x+1}$

6) $\frac{x}{x^2-1} - \frac{3}{2x+2}$

7) $\frac{1}{y} + \frac{2}{7} - \frac{3}{2y^2}$

8) $\frac{2+\frac{1}{x}}{5-\frac{1}{x}}$

9) حدِّد خطوط التقارب، والمجال والمدى للدالّة الممثلة بيانيًّا أدناه.



10) **اختيار من متعدد:** ما معادلة خط التقارب الرأسي للدالّة النسبية $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3x+2}$؟

A $x = -2$ **C** $x = 1$

B $x = -1$ **D** $x = 2$

مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا:

11) $f(x) = -\frac{8}{x} - 9$

12) $f(x) = \frac{2}{x+4}$

13) $f(x) = \frac{3}{x-1} + 8$

14) $f(x) = \frac{5x}{x+1}$

15) $f(x) = \frac{x}{x-5}$

16) $f(x) = \frac{x^2+5x-6}{x-1}$

أوجد معادلات خطوط التقارب الرأسية، ونقط الانفصال (إن وجدت) للتمثيل البياني لكلِّ دالّة مما يأتي:

17) $f(x) = \frac{x+5}{x^2-2x-35}$.

18) $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x+3}$.

حُلّ كل معادلة أو متباينة مما يأتي:

19) $\frac{-1}{x+4} = 6 - \frac{x}{x+4}$

20) $\frac{1}{3} = \frac{5}{m+3} + \frac{8}{21}$

21) $7 + \frac{2}{x} < -\frac{5}{x}$

22) $r + \frac{6}{r} < 5$

23) $\frac{6}{7} - \frac{3}{2m-1} \geq \frac{11}{7}$

24) $\frac{r+2}{3r} = \frac{r+4}{r-2} - \frac{2}{3}$

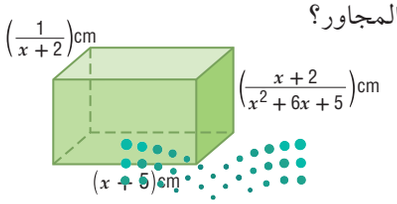
25) إذا كانت y تتغيّر عكسيًّا مع x، وكانت $y = 18$ عندما $x = -\frac{1}{2}$، فأوجد قيمة x عندما $y = -10$.

26) إذا كانت m تتغيّر طرديًّا مع n، وكانت $m = 24$ عندما $n = -3$، فأوجد قيمة n عندما $m = 30$.

27) إذا كانت r تتغيّر تغيّرًا مشتركًا مع s و t. وكانت $s = 20$ عندما $r = 140$ و $t = -5$. فأوجد قيمة s عندما $r = 7$ و $t = 2.5$.

28) **دراجات هوائية:** عندما يقود أحمد دراجته الهوائية، فإن المسافة التي يقطعها تتناسب طرديًّا مع الزمن. إذا قطع 50 mi في 2.5 h، فكم ساعة يحتاج ليقطع 80 mi إذا استمر في السير بالمعدل نفسه؟

29) **هندسة:** ما حجم المنشور المتوازي المستطيلات في الشكل المجاور؟



التخمين والتحقق

من المهم جدًّا أن تأخذ الوقت المتبقي بعين الاعتبار في أثناء تقديم الاختبار المعياري. فإذا لاحظت أن الوقت سيدركك ولن تتمكن من إكمال الاختبار، أو أنك لا تعرف طريقة حل مسألة معينة في الاختيار، فإن استراتيجية التخمين والتحقق قد تساعدك على اختيار الإجابة بسرعة.

استراتيجيات التخمين والتحقق

الخطوة 1

انظر بإمعان إلى الإجابات المحتملة، وقوّم معقولية كلٍّ منها، ثم احذف الإجابات غير المعقولة.

واسأل نفسك:

- هل هناك بدائل تبدو غير صحيحة بصورة واضحة؟
- هل هناك بدائل غير مناسبة؟
- هل هناك بدائل لا تحتوي على الوحدات المناسبة للمسألة؟

الخطوة 2

استعمل استراتيجية التخمين والتحقق للخيارات المتبقية.

- معادلات: إذا كانت المسألة تتعلق بحل معادلة معينة، فعوِّض قيم البدائل في المعادلة، ولاحظ صحة الإجابة من خطئها.
- **أنظمة المعادلات:** عوّض كل قيم المتغيرات المعطاة في البدائل بالنسبة لنظام من المعادلات، وتأكد من تحقيقها لجميع المعادلات.

الخطوة 3

اختر أحد البدائل، وتأكد ممَّا إذا كان يحقق جميع شروط المسألة، ثمّ حدد الإجابة الصحيحة.

- إذا لم يحقق البديل الذي اخترته شروط المسألة فانتقل إلى البديل المعقول التالي، ثم خمّن وتحقق.
- توقف عندما تجد الإجابة الصحيحة.

مثال

اقرأ المسألة الآتية جيدًا وحدد المطلوب فيها، ثم استعمل المعطيات لحلها:

ما حل المعادلة $\frac{2}{x-3}-\frac{4}{x+3}=\frac{8}{x^2-9}$ ؟

A -1 **C** 5

B 1 **D** 7

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

حل المعادلة النسبية هو عدد حقيقي. وبما أن البدائل الأربعة هي أعداد حقيقية، فإن كلًّا منها إجابة محتملة الاختيار، ويجب التحقق من كلٍّ منها. ابدأ بالبديل الأول، وتأكد مما إذا كان يحقق المعادلة النسبية أم لا، ثم انتقل إلى البديل التالي حتى تصل إلى الإجابة الصحيحة.

خمن: -1	تحقق:
	$\frac{2}{(-1)-3}-\frac{4}{(-1)+3}=\frac{8}{(-1)^2-9}$
	✗ $-\frac{5}{2}\neq -1$

خمن: 1	تحقق:
	$\frac{2}{1-3}-\frac{4}{1+3}=\frac{8}{(1)^2-9}$
	✗ $-2\neq -1$

خمن: 5	تحقق:
	$\frac{2}{5-3}-\frac{4}{5+3}=\frac{8}{(5)^2-9}$
	✓ $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

يكون الناتج جملة عددية صحيحة عندما $x=5$ ؛ لذا فالإجابة الصحيحة هي C.

تمارين ومسائل

اقرأ كل مسألة مما يأتي، وحدِّد المطلوب فيها، ثم استعمل المعطيات لحلها:

1) ما حل المعادلة $\frac{2}{5x}-\frac{1}{2x}=-\frac{1}{2}$ ؟

A $\frac{1}{10}$ **B** $\frac{1}{5}$

C $\frac{1}{4}$ **D** $\frac{1}{2}$

2) أعمار: مجموع أعمار علي ومحمد ومحمود يساوي 40 سنة. إذا كان عُمر محمد يزيد على مثلَي عُمر محمود بسنة واحدة، وعُمر علي أكبر من عُمر محمد بثلاث سنوات، فما عُمر محمد؟

A 7 **B** 15

C 14 **D** 18

3) ما مقطع المحور x للتمثيل البياني للدالّة $f(x)=\frac{2}{x-1}-\frac{x+4}{3}$ ؟

A -5 **B** 4

C 3 أو 2 **D** 2 أو -5

4) مبيعات: تُباع النسخة الواحدة من إحدى المجلات بسعر 10 ريالات. وقد بيع من المجلة 400 نسخة بهذا السعر . فإذا زاد سعر النسخة الواحدة، فإن عدد النسخ المبيعة ينقص بمقدار 40 نسخة مقابل كل ريالين زيادة. فما سعر النسخة الواحدة الذي يحقق أكبر دخل؟

A 10 ريالات **B** 15 ريالًا

C 13 ريالًا **D** 20 ريالًا

اختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممَّا يأتي :

1) فنادق: تتغيّر تكلفة استئجار غرفة في أحد الفنادق طرديًّا مع عدد أيام استئجارها كما هو موضَّح في الجدول الآتي:

عدد الأيام	التكلفة (بالريال)
1	150
2	300
3	450
4	600

أيُّ المعادلات الآتية تمثل ذلك التغيُّر الطردي؟

A $y = x + 150$

B $y = 150x$

C $y = \frac{150}{x}$

D $y = 600x$

2) في أيِّ اتجاه يجب إزاحة التمثيل البياني للدالّة $y = \frac{1}{x}$، للحصول على التمثيل البياني للدالّة $y = \frac{1}{x} + 2$ ؟

A إلى أعلى

B إلى أسفل

C إلى اليمين

D إلى اليسار

3) أيٌّ مما يأتي ليس خط تقارب للدالّة النسبية $f(x) = \frac{1}{x^2 - 49}$؟

A $y = 0$

B $x = -7$

C $x = 7$

D $y = 1$

4) ما أبسط صورة للكسر المركّب $\frac{\frac{(x+3)^2}{x^2-16}}{\frac{x+3}{x+4}}$ ؟

A $\frac{x+3}{x+4}$

B $\frac{1}{x-4}$

C $\frac{x+3}{x-4}$

D $\frac{x-4}{x+3}$

5) قيمة محددة المصفوفة $\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$ تساوي:

A 77

B 45

C 13

D −77

6) ما حل المعادلة: $\frac{2}{x-3} - \frac{4}{x+3} = \frac{8}{x^2-9}$ ؟

A −13

B $\frac{7}{3}$

C 5

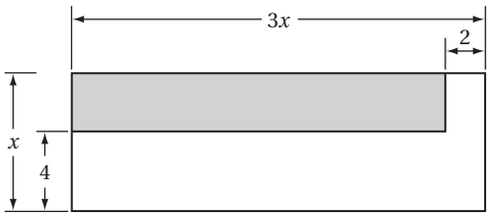
D 7

وزارة التعليم
Ministry of Education
2022 - 1444

إجابة قصيرة

أجب عن كلٍّ مما يأتي:

7) أوجد مساحة المنطقة المظللة في الشكل أدناه على صورة كثيرة حدود في أبسط صورة.



8) إذا كانت y تتغيَّر طرديًّا مع x، وكانت $y = 12$ عندما $x = -3$، فأوجد قيمة y عندما $x = 16$.

9) إذا كانت x تتغيَّر طرديًّا مع y وعكسيًّا مع z، وكانت $z = 26$ عندما $x = 8$ و $y = 13$، فأوجد قيمة z عندما $x = 8$ و $y = -6$.

10) إذا كانت y تتغيَّر عكسيًّا مع x، وكانت $y = 4$ عندما $x = 12$، فأوجد قيمة y عندما $x = 5$.

11) يحتاج الحصان إلى 10 أرطال من العشب كلَّ يوم كي يكون في صحة جيدة.

a) اكتب صيغة تمثّل الكمية اللازمة من العشب لإطعام x حصانًا مدة d يومًا.

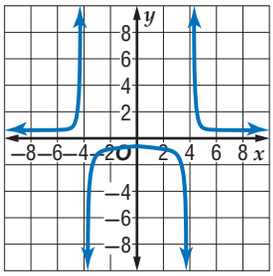
b) هل الصيغة التي وضعتها تُمثّل تغيّرًا طرديًّا أم مشتركًا أم عكسيًّا؟ فسّر إجابتك.

c) ما الكمية التي تحتاج إليها ثلاثة أحصنة خلال أسبوع؟

إجابة طويلة

أجب عن كلٍّ مما يأتي موضِّحا خطوات الحل :

12) استعمل التمثيل البياني للدالّة النسبية المجاور، وأوجد خطوط التقارب الرأسية والأفقية للدالّة النسبية.



13) أوجد $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$, $(\frac{f}{g})(x)$ للدالّتين $f(x)$, $g(x)$ في كلٍّ مما يأتي:

a) $f(x) = x^2$
$g(x) = x - 5$

b) $f(x) = 6 - x^2$
$g(x) = 2x^2 + 3x - 5$

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟

إذا لم تستطع حل سؤال...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
فعد إلى الدرس ...	5-5	5-3	5-3	5-1	مهارة سابقة	5-6	مهارة سابقة	5-5	5-5	5-5	5-5	5-4	مهارة سابقة

وزارة التعليم
Ministry of Education