سلسلة عروض رفعة الرياضيات

رياضيات (٦)



الصف الثالث ثانوي

إعداد وتصميم : شيخة راجح المرزوقي

shikhah_math

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمدلله رب العالمين والصلاة والسلام علىٰ اشرف الانبياء والمرسلين سيدنا محمد وعلىٰ اله وصحبه أجمعين

أما بعد

مجموعة رفعة الرياضيات هي مجموعة تُدار من قبل معلمي ومعلمات الرياضيات من جميع أنحاء المملكة العربية السعودية ، وهي قائمة على التطوير المهني لجميع المعلمين والمعلمات ، وابتكار الأفكار الإبداعية للتعليم العام ، والانتاج الموثق لكل مايخص الرياضيات والتعليم العام

Maths0120

الأستاذة / شيخة راجح متعب المرزوقي البقمي

نفيدكم علما بأنه قد تم تسجيل عملكم الموسوم بـ:

سلسلة عروض رفعة الرياضيات (رياضيات 6) ثالث ثانوي

تحت رقم إيداع 1443/9312 وتاريخ 1443/09/06 هـ، ورقم ردمك 978-603-04-1256-3



الفصل الخامس:
المتجهات





استمر بالتقدُم ولا تهتم بالأصوات المُحبطة التي تسخر من أحلامك وتشدك إلى الخلف

"آمن بنفسك"



المتجهات

التهيئة

فيما سبق

درست استعمال حساب المثلثات لحل المثلث .

والآن

- أُجري العمليات على المتجهات، وأمثلها في الأنظمة الإحداثية، الثنائية والثلاثية الأبعاد.
- أجِدُ مسقط متجه على متجه آخَر.
- أكتب متجهًا باستعمال متجهَي الوحدة.
- أجِدُ الضرب الداخلي، والزاوية بين متجهين في الأنظمة الإحداثية الثنائية، والثلاثية الأبعاد.
- أجِدُ الضرب الاتجاهي لمتجهين في الفضاء، وأستعملُ الضرب القياسي الثلاثي؛ لإيجاد حجوم متوازيات السطوح.

لماذا:

رياضة : تستعمل المتجهات لنمذجة مواقف حياتية، فمثلًا يمكن استعمالها لتحديد محصلة سرعة واتجاه حركة رمح رماه لاعب، إذا ركض إلى الأمام بسرعة 6m/s ، ورمى الرمح بسرعة 30m/s ، وبزاوية مقدارها 40° مع الأفقي.

قراءة سابقة : اقرأ عناوين الدروس والمفردات الأساسية في هذا الفصل، واستعملها للتنبؤ بما ستتعلَّمه في هذا الفصل .



اختبار سريع

أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط الآتية، ثم أوجد إحداثيَّي نقطةِ منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بينهما.

1) $(1, 4), (-2, 4)$

2) $(-5, 3), (-5, 8)$

3) $(2, -9), (-3, -7)$

4) $(-4, -1), (-6, -8)$

مراجعة المفردات

صيغة المسافة في المستوى الإحداثي
(Distance Formula in The Coordinate Plane)

المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ هي:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

صيغة إحداثيَّي منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي (Midpoint Formula in The Coordinate Plane)

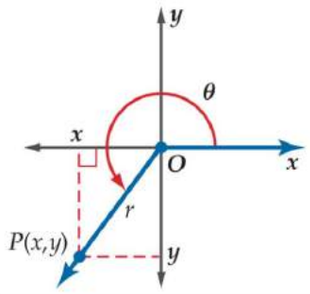
إذا كان $A(x_1 , y_1)$، $B(x_2 , y_2)$ ، فإن إحداثيَّي نقطةِ منتصف $\overline{AB}$:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2} , \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

مراجعة المفردات

الدوال المثلثية للزوايا
(Trigonometric Functions of Angels)

لتكن θ زاويةً مرسومةً في الوضع القياسي، وتقع النقطة $P(x, y)$ على ضلع انتهائها. باستعمال نظرية فيثاغورس يمكن إيجاد r (المسافة من النقطة P إلى نقطة الأصل) باستعمال الصيغة $r = \sqrt{x^2 + y^2}$، وتكون الدوال المثلثية الست للزاوية θ معرفة كما يأتي:



$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r}$$

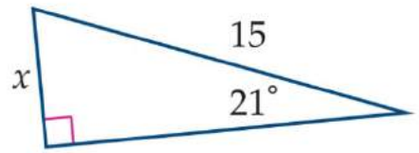
$$\tan\theta = \frac{y}{x},\ x \neq 0 \qquad \csc\theta = \frac{r}{y},\ y \neq 0$$

$$\sec\theta = \frac{r}{x},\ x \neq 0 \qquad \cot\theta = \frac{x}{y},\ y \neq 0$$

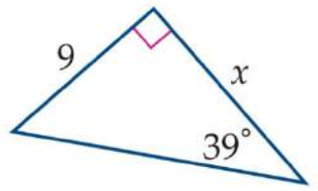
اختبار سريع

أوجد قيمة x في كلٍّ مما يأتي مقرِّبًا الناتج إلى أقرب عُشرٍ.

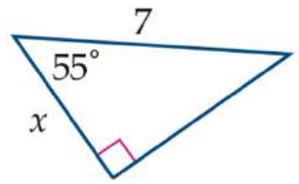
(5



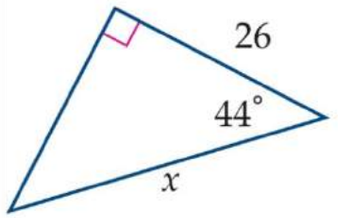
(6



(7



(8



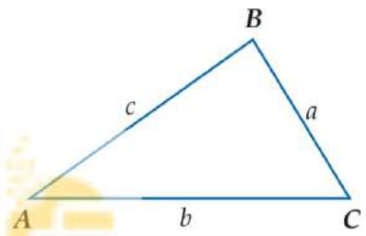
اختبار سريع

9) **بالون:** أُطلق بالون يحتوي على هواء ساخن في الفضاء. إذا كان البالون مربوطًا بحبلين مشدودين يمسك بكلٍّ منهما شخص يقف على سطح الأرض، والمسافة بين الشخصين 35 ft ، بحيث كان قياس الزاوية بين كلٍّ من الحبلين والأرض 40° ، فأوجد طول كلٍّ من الحبلين إلى أقرب جزءٍ من عشرة.

مراجعة المفردات

قانون الجيوب (Law of Sines)

إذا كانت أضلاع $\triangle ABC$ التي أطوالها: a, b, c تقابل الزوايا ذات القياسات A, B, C على الترتيب، فإن العلاقات الآتية تكون صحيحة:

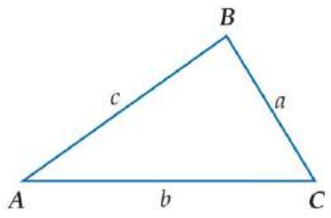


$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

مراجعة المفردات

قانون جيوب التمام (Law of Cosines)

إذا كانت أضلاع $\triangle ABC$ التي أطوالها: a, b, c تقابل الزوايا ذات القياسات A, B, C على الترتيب، فإن العلاقات الآتية تكون صحيحة:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

اختبار سريع

أوجد جميع الحلول الممكنة لكل مثلث مما يأتي إن أمكن، وإذا لم يوجد حَلّ فاكتب " لا يوجد حَلّ " مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب عدد صحيح، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

10 $a = 10, b = 7, A = 128°$

11 $a = 15, b = 16, A = 127°$

12 $a = 15, b = 18, A = 52°$

اللهم صباح غائم بألطافك لا وقوع فيه ولا تعثر ،إنما غيثاً من لدنك يروينا ..

مقدمة في المتجهات



مقدمة في المتجهات

فيما سبق:

درست استعمال حساب المثلثات في حل المثلث. (مهارة سابقة)

والآن:

- أجري العمليات على المتجهات باستعمال مقياس الرسم، وأمثِّلها هندسيًّا .
- أحلل المتجه إلى مركبتَيه المتعامدتين.
- أحلُّ مسائل تطبيقية على المتجهات.

المفردات:

كمية قياسية (عددية)	طول المتجه (المقدار)
solar quantity	magnitude
متجه	الاتجاه الربعي
vector	quadrant bearing
الكمية المتجهة	الاتجاه الحقيقي
vector quantity	true bearing
قطعة مستقيمة متجهة	المتجهات المتوازية
directed line segment	parallel vectors
نقطة البداية	المتجهات المتساوية
initial point	equal vectors
نقطة النهاية	المتجهان المتعاكسان
terminal point	opposite vectors
الوضع القياسي	المحصلة
standard position	resultant
اتجاه المتجه	قاعدة المثلث
direction	triangle method
	قاعدة متوازي الأضلاع
	parallelogram method
	المتجه الصفري
	zero vector
	المركبات
	components
	المركبات المتعامدة
	rectangular components

مقدمة في المتجهات



لماذا:

المحاولة الناجحة لتسجيل هدف في كرة القدم تعتمد على عدة عوامل؛ منها سرعة الكرة بعد ضربها، واتجاه حركتها. ويمكنك وصف كلٍّ من هذين العاملين باستعمال كمية واحدة تُسمى متجهًا.



الكميات القياسية والكميات المتجهة يمكن وصف الكثير من الكميات الفيزيائية مثل الكتلة بقيمة عددية واحدة، وعندئذٍ تُسمى **كمية قياسية (عددية)**، ويدل هذا العدد على مقدار الكمية أو قياسها. أما **المتجه** فهو كمية لها مقدار واتجاه؛ فمثلًا سرعة الكرة المتجهة نحو المرمى جنوبًا تمثل كلًّا من: مقدار سرعة الكرة، واتجاه حركتها، ولذلك تُعتبر متجه والعدد المرتبط بمتجه يسمى **كميةً متجهةً**.



مثال ١ تحديد الكميات المتجهة

حدّد الكميات المتجهة، والكميات القياسية (العددية) في كلٍّ مما يأتي:

a) يسير قارب بسرعة **15 mi/h** في اتجاه الجنوب الغربي.

بما أن لهذه الكمية اتجاهًا، إذن هي كميةٌ متجهةٌ.

b) يسير شخص على قدميه بسرعة **75 m/min** جهة الغرب.

بما أن لسرعة الشخص قيمة هي 75 m/min، واتجاهًا للغرب؛ لذا فهي كمية متجهة.

c) قطعت سيارة مسافة قدرها **20 km** .

بما أن لهذه الكمية قيمة وهي 20 km، وليس لها اتجاه؛ إذن هذه المسافة كمية قياسية.



تحقق من فهمك

حدّد الكميات المتجهة ، والكميات القياسية (العددية) في كلٍّ مما يأتي:

1A) تسير سيارة بسرعة 60 mi / h ، وبزاوية °15 جهة الجنوب الشرقي.

1B) هبوط مظلِّي رأسيًّا إلى أسفل بسرعة 12.5 mi / h .

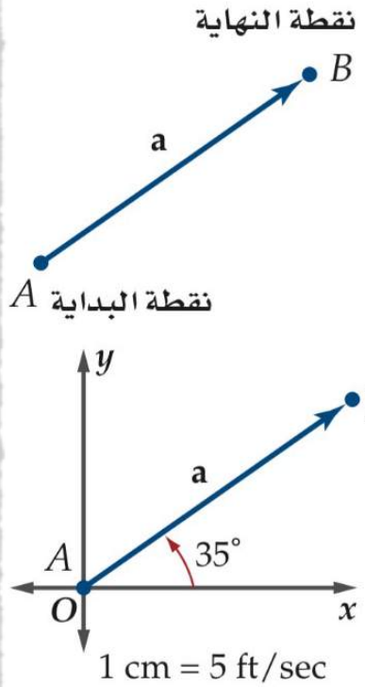
1C) طول قطعةٍ مستقيمةٍ 5 cm .

مقدمة في المتجهات

المتجهات



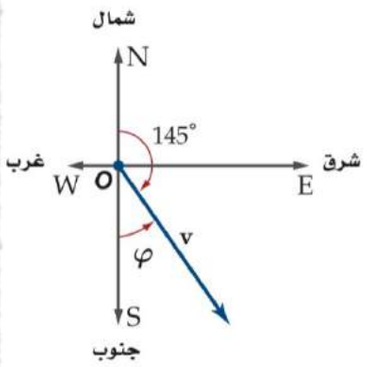
يمكن تمثيل المتجه هندسيًّا بقطعةٍ مستقيمةٍ لها اتجاه (**قطعة مستقيمة متجهة**)، أو سهم يُظهر كلًّا من المقدار والاتجاه. ويمثِّل الشكل المجاور القطعة المستقيمة المتجهة التي لها **نقطة البداية** A، و**نقطة النهاية** B. ويرمز لهذا المتجه بالرمز $\overrightarrow{AB}$ أو $\vec{a}$ أو **a** .



أما **طول المتجه** فهو عبارة عن طول القطعة المستقيمة التي تمثله، ففي الشكل المجاور، إذا كان مقياس الرسم هو $1\text{ cm} = 5\text{ ft/s}$، فإن طول المتجه **a** ، ويُرمز له بالرمز $|\mathbf{a}|$ ، يساوي 5×2.6 أو 13 ft/s .

يكون المتجه في **الوضع القياسي**. إذا كانت نقطة بداية المتجه هي نقطة الأصل ويعبّر عن **اتجاه المتجه** بالزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الأفقي (الاتجاه الموجب للمحور x). فمثلًا: اتجاه المتجه **a** هو $35°$.

ويمكن التعبير عن اتجاه المتجه أيضًا باستعمال زاوية **الاتجاه الربعي** φ ، وتُقرأ فاي، وهي زاوية قياسها بين $0°$ و $90°$ شرق أو غرب الخط الرأسي (خط شمال – جنوب). فمثلًا زاوية الاتجاه الربعي للمتجه **v** في الشكل المجاور هي $35°$ جنوب شرق، وتُكتب S 35° E .



كما يمكن استعمال زاوية **الاتجاه الحقيقي** ، حيث تُقاس الزاوية مع عقارب الساعة بدءًا من الشمال. ويُقاس الاتجاه الحقيقي بثلاثة أرقام، فمثلًا يُكتب الاتجاه الذي يحدّد زاوية قياسها $25°$ من الشمال مع عقارب الساعة باستعمال الاتجاه الحقيقي على الصورة $025°$.

إرشادات للدراسة

زاوية الاتجاه الحقيقي

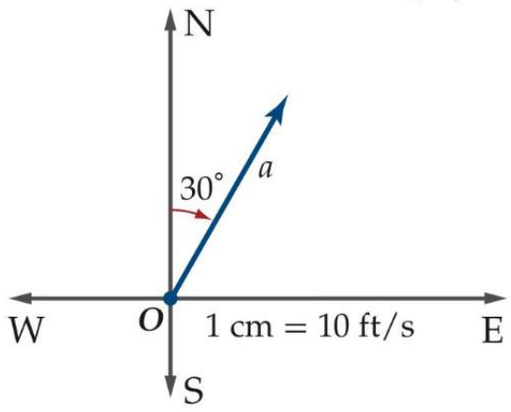
إذا أُعطي قياس زاوية بثلاثة أرقام، ولم تعطَ أي مركبات اتجاهية إضافية، فإنها زاوية اتجاه حقيقي. فمثلًا زاوية الاتجاه الحقيقي للمتجه **v** في الشكل المجاور هي $145°$.

مثال ٢ تمثيل المتجه هندسياً

استعمل مسطرةً ومنقلةً؛ لرسم متجه لكلٍّ من الكميات الآتية، واكتب مقياس الرسم في كل حالة:

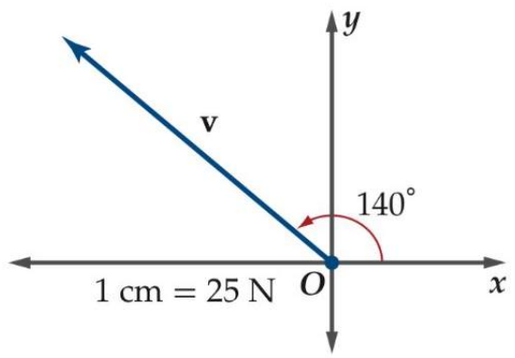
a) $a = 20\ \text{ft/s}$ باتجاه $030°$.

استعمل مقياس الرسم $1\,\text{cm} = 10\ \text{ft/s}$ ، وارسم سهمًا طوله $20 \div 10$ ، أو $2\,\text{cm}$ بزاوية قياسها $30°$ من الشمال، وفي اتجاه عقارب الساعة.



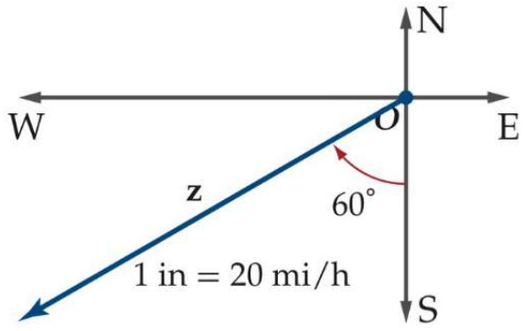
b) $v = 75\,\text{N}$ ، بزاوية قياسها $140°$ مع الاتجاه الأفقي.

استعمل مقياس الرسم $1\ \text{cm} = 25\ \text{N}$ ، وارسم سهمًا طوله $75 \div 25$ ، أو $3\,\text{cm}$ في الوضع القياسي، وبزاويةٍ قياسها $140°$ مع الاتجاه الموجب للمحور x .



c) $z = 30\ \text{mi/h}$ ، باتجاه $S\ 60°\ W$.

استعمل مقياس الرسم $1\ \text{in} = 20\ \text{mi / h}$ ، وارسم سهمًا طوله $30 \div 20 = 1.5\,\text{in}$ ، بزاوية قياسها $60°$ في اتجاه جنوب غرب .



إرشادات للدراسة

النيوتن

وحدةٌ لقياس القوّة، ويرمز له بالحرف N، وهو عبارة عن القوّة التي تؤثر في جسم كتلته 1kg؛ لتكسبه تسارعًا مقداره $1\,\text{m/s}^2$.

تنبيه!

الطول

يمكن أن يمثل طول المتجه مسافة، أو سرعة، أو قوة. وإذا مثل المتجه سرعة، فإن طوله لا يمثّل المسافة المقطوعة .



تحقق من فهمك

استعمل مسطرة ومنقلة؛ لرسم متجه لكلٍّ من الكميات الآتية، واكتب مقياس الرسم في كل حالة:

(2A $\mathbf{t} = 20$ ft/s ، باتجاه $065°$.

(2B $\mathbf{u} = 15$ mi/h ، باتجاه S $25°$ E .

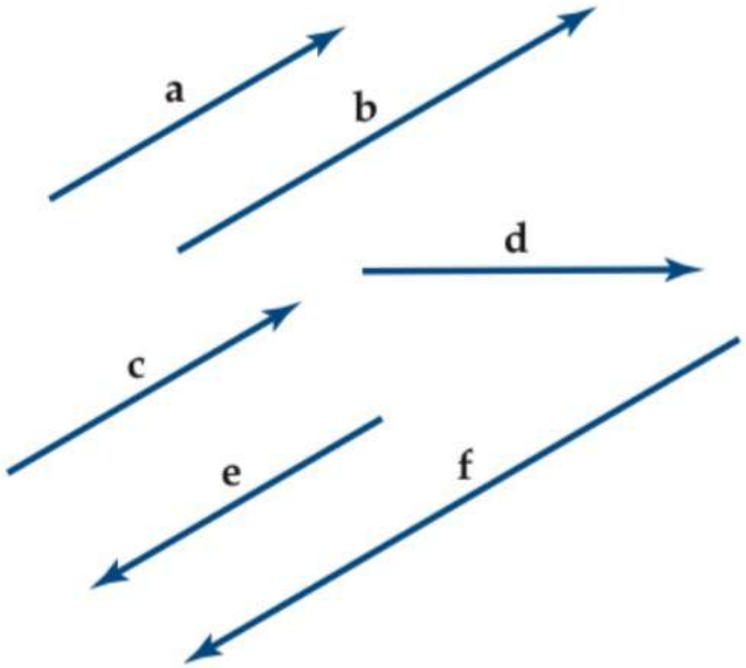
(2C $\mathbf{m} = 60$N ، بزاوية قياسها $80°$ مع الاتجاه الأفقي.

أنواع المتجهات:



عند إجرائك العمليات على المتجهات، فإنك تحتاج إلى الأنواع الشائعة الآتية من المتجهات:

- **المتجهات المتوازية** لها الاتجاه نفسه، أو اتجاهان متعاكسان، وليس بالضرورة أن يكون لها الطول نفسه. فمثلًا في الشكل المجاور $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \parallel \mathbf{c} \parallel \mathbf{e} \parallel \mathbf{f}$.



- **المتجهات المتساوية** لها الاتجاه نفسه، والطول نفسه. ففي الشكل المجاور $\mathbf{a}, \mathbf{c}$ ؛ لهما الطول والاتجاه نفساهما، لذا هما متساويان، ويعبَّر عنه بالرموز: $\mathbf{a} = \mathbf{c}$.
لاحظ أن $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ ؛ لأن $|\mathbf{a}| \neq |\mathbf{b}|$ ، $\mathbf{a} \neq \mathbf{d}$ ؛ لأن لهما اتجاهين مختلفين.
- **المتجهان المتعاكسان** لهما الطول نفسه، لكن اتجاهيهما متعاكسان. يكتب المتجه المعاكس للمتجه $\mathbf{a}$ على الصورة $-\mathbf{a}$ ، ففي الشكل المجاور $\mathbf{e} = -\mathbf{a}$.

مفهوم اساسي



عند جمع متجهين أو أكثر يكون الناتج متجهًا،و يسمى **المحصّلة**. ويكون لمتجه المحصّلة التأثير نفسه الناتج عن تأثير المتجهين الأصليين عند تطبيقهما واحدًا تلو الآخر. ويمكن إيجاد المحصّلة هندسيًّا باستعمال **قاعدة المثلث**، أو **قاعدة متوازي الأضلاع**.

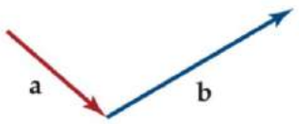
مفهوم أساسي — **إيجاد المحصلة**

قاعدة المثلث

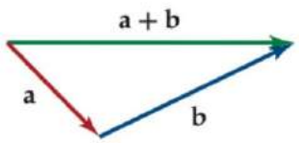
لإيجاد محصّلة المتجهين **a , b** ، اتّبع الخطوتين الآتيتين:



الخطوة 1 أجرِ انسحابًا للمتجه **b** ، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة نهاية المتجه **a** .



الخطوة 2 محصلة المتجهين **a , b** هي المتجه المرسوم من نقطة بداية **a** إلى نقطة نهاية **b** .

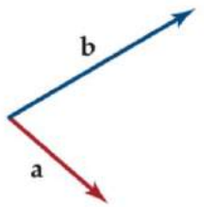


قاعدة متوازي الأضلاع

لإيجاد محصّلة المتجهين **a , b** ، اتّبع الخطوات الآتية :

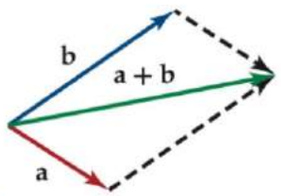


الخطوة 1 أجرِ انسحابًا للمتجه **b** ، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة بداية المتجه **a** .



الخطوة 2 أكمل رسم متوازي الأضلاع الذي ضلعاه **a , b** .

الخطوة 3 محصلة المتجهين هي المتجه الذي يُمثّله قطر متوازي الأضلاع .



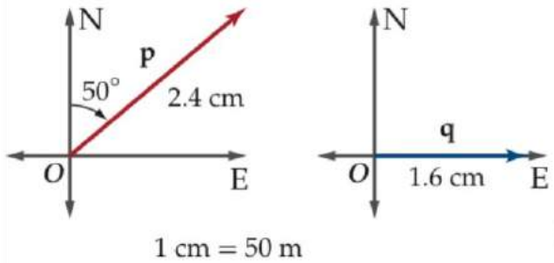
ايجاد محصلة متجهين

مثال ٣ من واقع الحياة



رياضة المشي: قطع عبد اللّه في سباق للمشي، مسافة 120 m باتجاه N 50° E ، ثم مسافة 80 m في اتجاه الشرق. كم يبعُد عبد الله عن نقطة البداية، وما هي زاوية الاتجاه الربعي؟

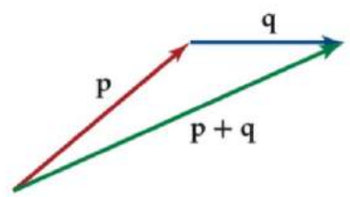
افترض أن المتجه **p** يمثِّل المشي 120 m في الاتجاه N 50° E ، وأن المتجه **q** يمثِّل المشي 80 m باتجاه الشرق. ارسم شكلًا يمثّل **p** ، **q** باستعمال مقياس الرسم $1\text{cm} = 50\text{m}$.



استعمل مسطرة ومنقلة؛ لرسم سهم طوله $120 \div 50 = 2.4\text{cm}$ ؛ ويصنع زاوية قياسها 50° شمال شرق؛ ليُمثّل المتجه **p** ، وارسم سهمًا آخر طوله $80 \div 50 = 1.6\text{cm}$ في اتجاه الشرق؛ ليُمثّل المتجه **q**.

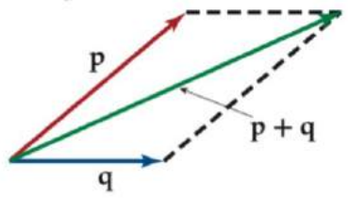
الطريقة 1 قاعدة المثلث

اعمل انسحابًا للمتجه **q** ، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة نهاية المتجه **p** ، ثم ارسم متجه المحصلة **p + q** كما في الشكل أدناه.

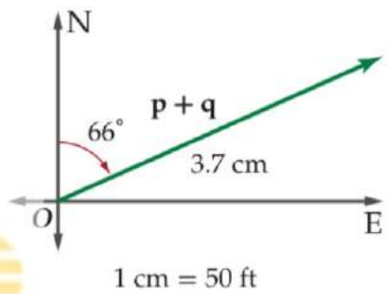


الطريقة 2 قاعدة متوازي الأضلاع

اعمل انسحابًا للمتجه **q** ، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة بداية **p**، ثم أكمل متوازي الأضلاع، وارسم قطره الذي يمثّل المحصلة **p + q** ، كما في الشكل أدناه.



نحصل في كلتا الطريقتين على متجه المحصلة **p + q** نفسه. قِس طول **p + q** باستعمال المسطرة، ثم قِس الزاوية التي يصنعها هذا المتجه مع الخط الرأسي كما في الشكل المجاور.

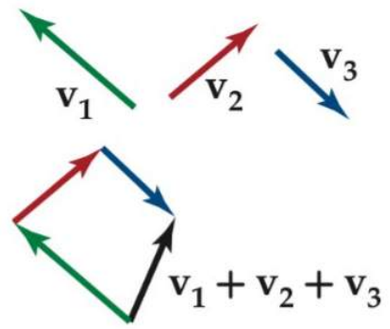


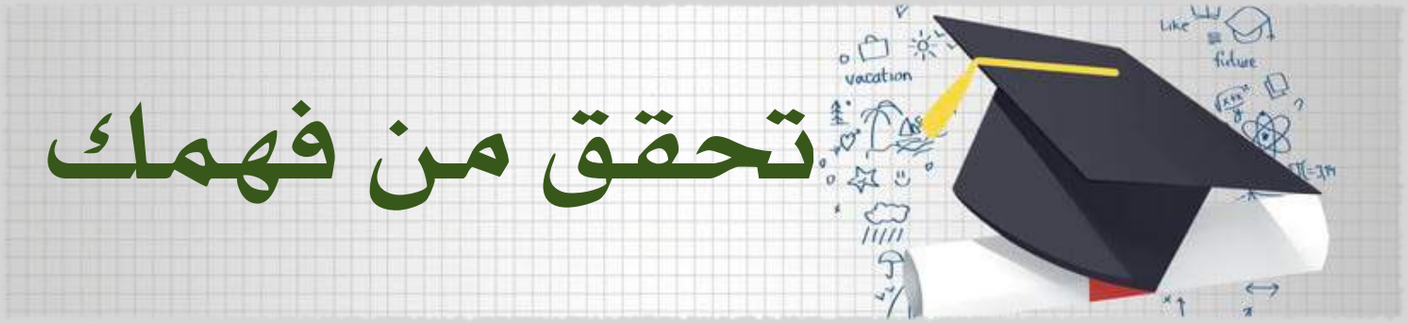
تجد أن طول المتجه يساوي 3.7 cm تقريبًا، ويُمثّل $3.7 \times 50 = 185\text{m}$.
وعليه يكون عبد الله على بعد 185 m من نقطة البداية باتجاه N 66° E .

إرشادات للدراسة

المحصلة

لإيجاد محصلة أكثر من متجهين باستعمال قاعدة متوازي الأضلاع، يلزم إعادة الرسم أكثر من مرة؛ لذا من الأسهل في هذه الحالة استعمال طريقة مشابهة لقاعدة المثلث، وذلك بوضع نقطة بداية متجه عند نقطة نهاية المتجه الذي يسبقه وهكذا.

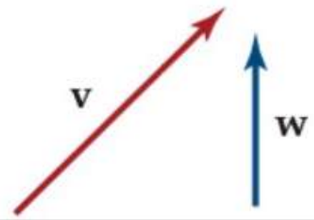




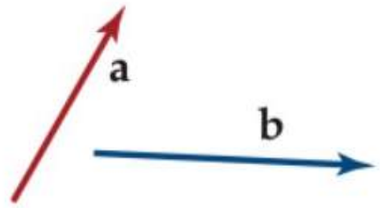
تحقق من فهمك

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية مستعملًا قاعدة المثلث، أو متوازي الأضلاع. ثمّ حدّد اتجاهها بالنسبة للأفقي.

(3A



(3B



مقدمة في المتجهات



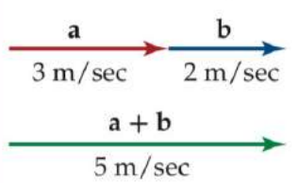
تحقق من فهمك

3C) لعبة أطفال: رمى طفل كرةً صغيرةً في لعبة مخصصة للأطفال بسرعة $7\,in/s$ ، باتجاه $310°$ ، فارتدت باتجاه $055°$ ، وبسرعة $4\,in/s$. أوجد مقدار محصلة حركة الكرة واتجاهها.
(قرب طول المحصلة إلى أقرب بوصة، والاتجاه إلى أقرب درجة)

إرشادات للدراسة

المتجهات المتوازية في الاتجاه نفسه

محصّلة ناتج جمع متجهين أو أكثر لها الاتجاه نفسه، هو متجه طوله يساوي مجموع أطوال هذه المتجهات، واتجاهه هو اتجاه المتجهات الأصلية نفسه.



مفهوم اساسي



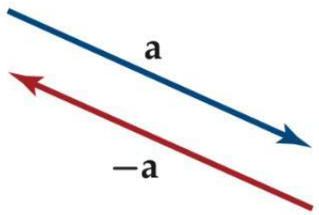
قراءة الرياضيات

$|k|$ تقرأ القيمة المطلقة للعدد الحقيقي k.

$|v|$ تمثل طول المتجه v.

عند جمع متجهين متعاكسين لهما الطول نفسه، فإن المحصلة هي **المتجه الصفري**. ويرمز له بالرمز $\vec{0}$ أو $\mathbf{0}$ ، وطوله صفر ، وليس له اتجاه. وعملية طرح المتجهات تشبه عملية طرح الأعداد. لإيجاد $\mathbf{p} - \mathbf{q}$ ، اجمع معكوس $\mathbf{q}$ إلى $\mathbf{p}$ ؛ أي أن: $\mathbf{p} - \mathbf{q} = \mathbf{p} + (-\mathbf{q})$.

و كذلك يمكن ضرب المتجه في عددٍ حقيقيٍّ.



$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = 0$

مفهوم أساسي

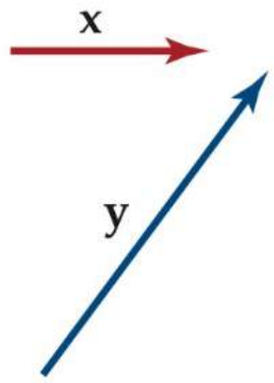
ضرب المتجه في عدد حقيقي

إذا ضُرب المتجه $\mathbf{v}$ في عدد حقيقي k ، فإن طول المتجه $k\mathbf{v}$ هو $|k|\ |\mathbf{v}|$. ويتحدّد اتجاهه بإشارة k .

- إذا كانت $k > 0$ ، فإن اتجاه $k\mathbf{v}$ هو اتجاه $\mathbf{v}$ نفسه.
- إذا كانت $k < 0$ ، فإن اتجاه $k\mathbf{v}$ هو عكس اتجاه $\mathbf{v}$.



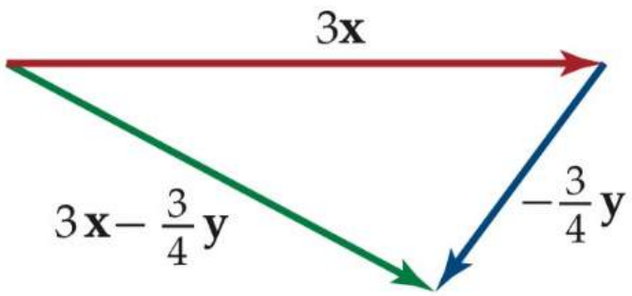
مثال ٤ العمليات على المتجهات



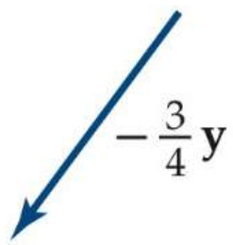
ارسم المتجه $3\mathbf{x} - \frac{3}{4}\mathbf{y}$ ، حيث $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ متجهان كما في الشكل المجاور.

أعد كتابة المتجه $3\mathbf{x} - \frac{3}{4}\mathbf{y}$ على صورة حاصل جمع متجهين $3\mathbf{x} + \left(-\frac{3}{4}\mathbf{y}\right)$ ، ثم مثِّل المتجه $3\mathbf{x}$ برسم متجه طوله 3 أمثال المتجه $\mathbf{x}$ ، وبالاتجاه نفسه كما في الشكل 1.1.1 .

ولتمثيل المتجه $-\frac{3}{4}\mathbf{y}$ ، ارسم متجهًا طوله $\frac{3}{4}$ طول $\mathbf{y}$ ، وفي اتجاه معاكس لاتجاه $\mathbf{y}$ كما في الشكل 1.1.2 ، ثم استعمل قاعدة المثلث؛ لرسم متجه المحصلة كما في الشكل 1.1.3 .



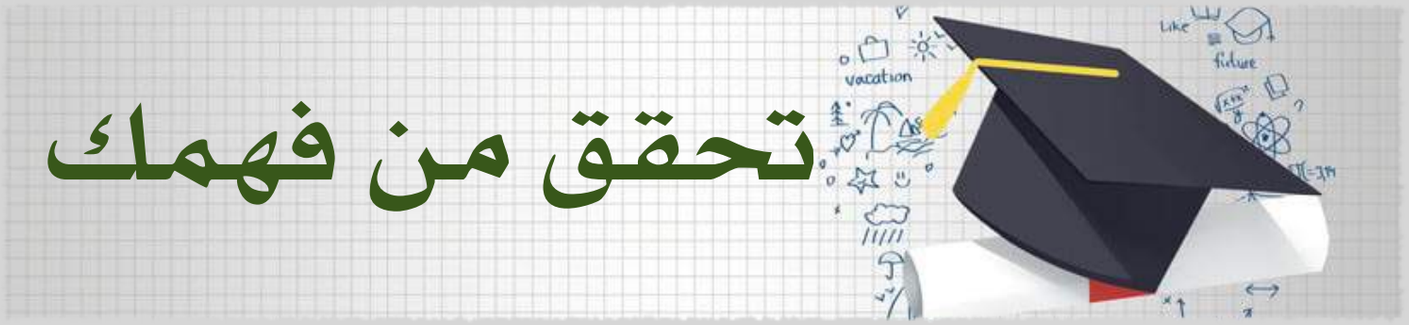
الشكل 1.1.3



الشكل 1.1.2



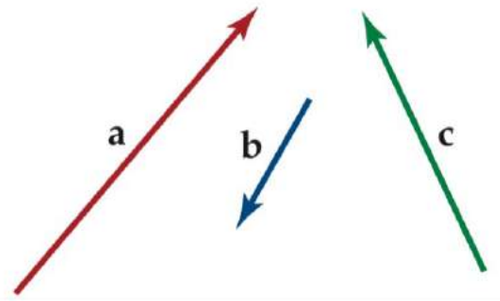
الشكل 1.1.1



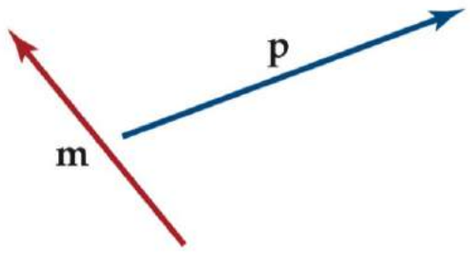
تحقق من فهمك

ارسم المتجه الذي يُمثّل كلًّا مما يأتي :

(4A $a - c + 2b$



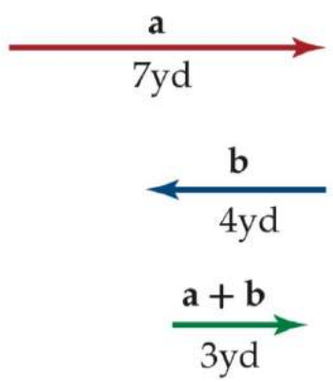
(4B $m - \frac{1}{4}p$

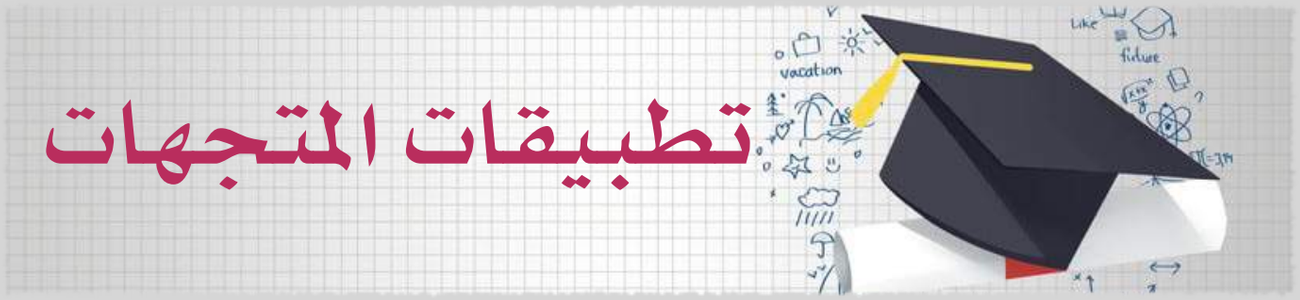


إرشادات للدراسة

المتجهان المتوازيان المتعاكسان

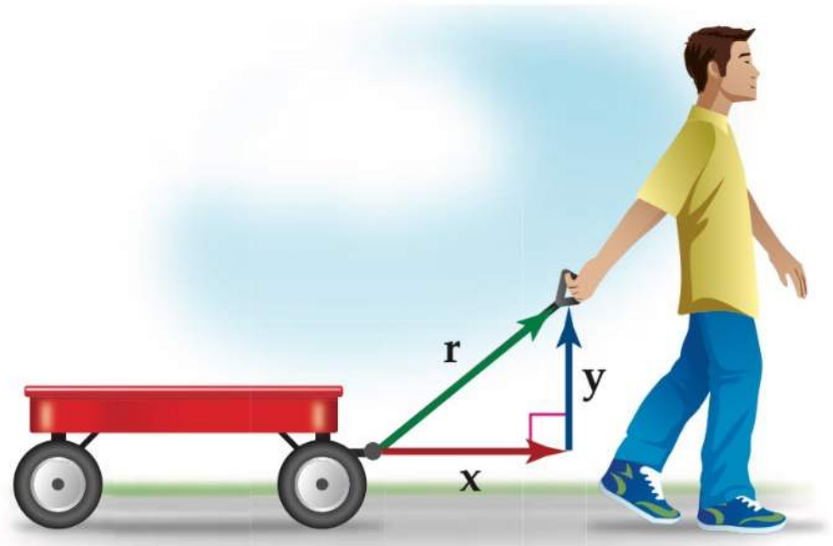
محصلة ناتج جمع متجهين متوازيين متعاكسين، هو متجه طوله يساوي القيمة المطلقة للفرق بين طولي المتجهين، واتجاهه هو اتجاه المتجه الأكبر طولًا.





تطبيقات المتجهات

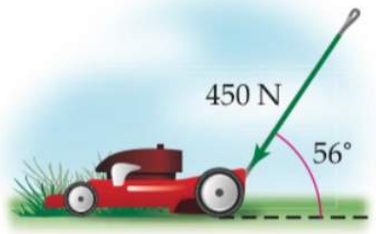
تطبيقات المتجهات: يُسمى المتجهان اللّذان ناتج جمعهما المتجه **r** ، **مركبتي r** . ومع أن مركبتي المتجه يمكن أن تكونا في أي اتجاه، إلا أنه من المفيد غالبًا تحليل المتجه إلى **مركبتين متعامدتين،** واحدة أفقية، والأخرى رأسية. ففي الشكل المجاور، يمكن اعتبار القوة **r** المبذولة لسحب العربة بصفتها مجموع مركبتين هما أفقية **x** تحرك العربة إلى الأمام، ورأسية **y** تسحب العربة إلى أعلى.





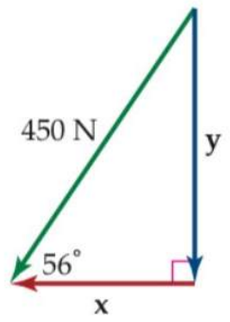
مثال ٥ من واقع الحياة تحليل القوة إلى مركبتين متعامدين

قص العشب: يدفع علي عربة قصِّ العشب بقوة مقدارها 450 N ، وبزاويةٍ قياسها 56° مع سطح الأرض.



a) ارسم شكلًا يوضِّح تحليل القوة التي يبذلها علي إلى مركبتين متعامدتين.

يمكن تحليل قوة الدفع إلى مركبتين؛ أفقية x إلى الأمام ورأسية y إلى أسفل كما في الشكل أدناه.



b) أوجد مقدار كلٍّ من المركبتين؛ الأفقية والرأسية للقوة.

تكوّن كلٌّ من القوة ومركبتاها الأفقية والرأسية مثلثًا قائمَ الزاوية. استعمل تعريف الجيب، أو جيب التمام؛ لإيجاد مقدار كل قوة منهما.

$\cos 56° = \frac{|x|}{450}$ تعريف الجيب، وجيب التمام $\sin 56° = \frac{|y|}{450}$

$|x| = 450 \cos 56°$ حُل بالنسبة إلى x ، y $|y| = 450 \sin 56°$

$|x| \approx 252$ استعمل الآلة الحاسبة $|y| \approx 373$

مقدار المركبة الأفقية 252 N تقريبًا، ومقدار المركبة الرأسية 373 N تقريبًا.



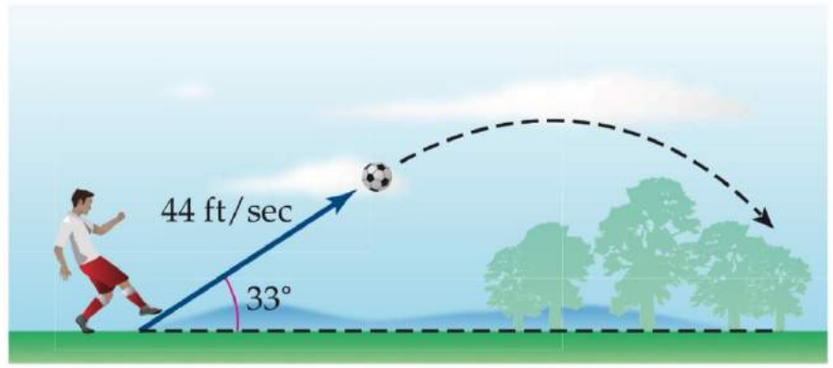
الربط مع الحياة

يتطلب الضغط على مفتاح الكهرباء، لإشعال الضوء قوة مقدارها 3 N . والقوة التي تؤثر بها الجاذبية الأرضية في الشخص تعادل 600 N تقريبًا. والقوة المبذولة من لاعب رفع أثقال تساوي 2000 N تقريبًا .



تحقق من فهمك

5) كرة قدم: يركل لاعبٌ كرةَ قدمٍ من سطح الأرض بسرعةٍ مقدارها 44 ft/s ، وبزاويةٍ قياسها 33° مع سطح الأرض كما في الشكل أدناه.



A) ارسم شكلًا يوضِّح تحليل هذه السرعة إلى مركبتين متعامدتين.

B) أوجد مقدار كلٍّ من المركبتين الأفقية والرأسية للسرعة .



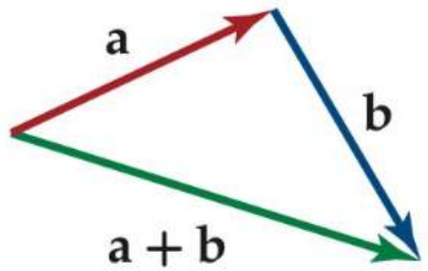
41) **تبرير:** حدّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا أو ليست صحيحة أبدًا، وبرِّر إجابتك.

"من الممكن إيجاد مجموع متجهين متوازيين باستعمال طريقة متوازي الأضلاع".

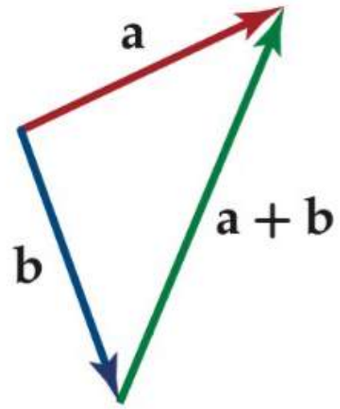


43) اكتشف الخطأ: حاول كلٌّ من حسين ومصطفى إيجاد محصلة المتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك.

مصطفى



حسين



يحيي فيكَ الطموح ويمدك بالقدرة على تحقيقه ويحيي فيكَ سُبل الوصول إليه ، حاشاه تعالى أن يضيعك ..



المتجهات في المستوى الإحداثي

رياضيات ٦

إعداد : شيخة المزروعي shikhah_math

موضوع الدرس: المتجهات في المستوى الإحداثي



فيما سبق:

درست العمليات على المتجهات باستعمال مقياس الرسم . (الدرس ١-١)



الآن:

- أجري العمليات على المتجهات في المستوى الإحداثي، وأمثّلها بيانيًا.
- أكتب المتجه باستعمال متجهَي الوحدة.



المفردات:

الصورة الإحداثية
component form
متجه الوحدة
unit vector
متجها الوحدة القياسيان
standard unit vectors
توافق خطي
linear combination



إعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

موضوع الدرس: المتجهات في المستوى الإحداثي



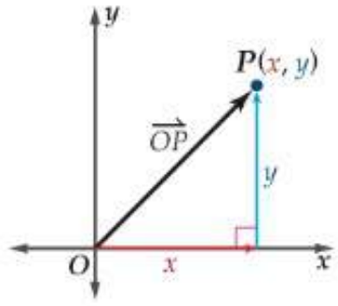
لماذا؟

تؤثِّر الرياح في سرعة الطائرة واتجاه حركتها؛ لذا يستعمل قائد الطائرة مقاييس مدرّجة؛ لتحديد السرعة والاتجاه الذي يجب على الطائرة السير فيه؛ لمعادلة أثر الرياح ، وعادة ما يتم إجراء هذه الحسابات باستعمال المتجهات في المستوى الإحداثي.

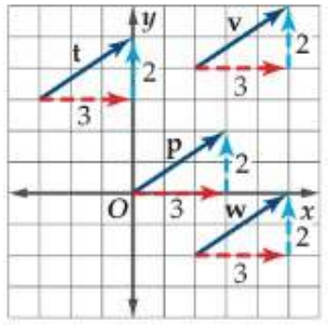


المتجهات في المستوى الإحداثي في الدرس 1-1 ، تعلمت إيجاد طول (مقدار) المحصِّلة واتجاهها لمتجهين أو أكثر هندسيًّا باستعمال مقياس رسم. وبسبب عدم دقة الرسم، فإننا نحتاج إلى طريقة جبرية باستعمال نظام الإحداثيات المتعامدة للمواقف التي تحتاج إلى دقةٍ أكثر، أو التي تكون فيها المتجهات أكثر تعقيدًا.

ويمكن التعبير عن $\overrightarrow{OP}$ في الوضع القياسي في المستوى الإحداثي كما في الشكل 1.2.1 بصورة وحيدة، وذلك بإحداثيَي نقطة نهايته $P(x, y)$. وهذه الصورة هي $\langle x, y \rangle$ ، حيث إن x , y هما المركبتان المتعامدتان لـ $\overrightarrow{OP}$ ؛ لذا تُسمى $\langle x, y \rangle$ **الصورة الإحداثية** للمتجه.



الشكل 1.2.1



الشكل 1.2.2

وحيث إن المتجهات التي لها الطول والاتجاه نفساهما متكافئة، فإنه بإمكاننا التعبير عن كثير من المتجهات بالإحداثيات نفسها، فمثلاً المتجهات **p, t, v, w** في الشكل 1.2.2 متكافئة، إذ يمكن التعبير عن أيٍّ منها بالصورة $\langle 3, 2 \rangle$، ولإيجاد الصورة الإحداثية لمتجهٍ مرسوم في وضع غير قياسيٍّ، استعمل إحداثيي نقطتَي بدايته ونهايته.

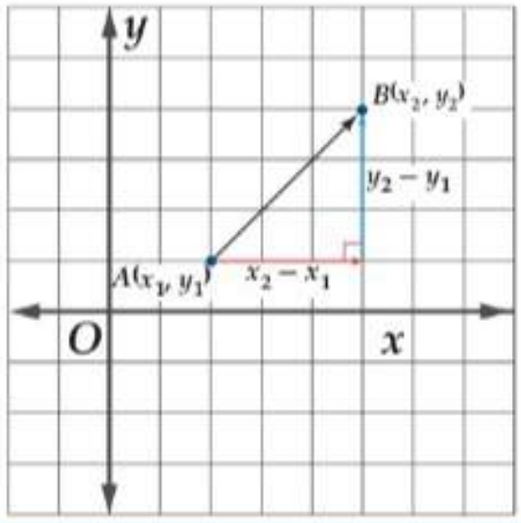
إعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

موضوع الدرس: المتجهات في المستوى الإحداثي



مفهوم أساسي

الصورة الإحداثية لمتجه



الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1)$ ، ونقطة نهايته $B(x_2, y_2)$ هي :

$$\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$$

مثال 1

التعبير عن المتجه بالصورة الإحداثية

أوجد الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ ، الذي نقطة بدايته $A(-4, 2)$ ، ونقطة نهايته $B(3, -5)$.

$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$ الصورة الإحداثية

$= \langle 3 - (-4), -5 - 2 \rangle$ $(x_1, y_1) = (-4, 2)$, $(x_2, y_2) = (3, -5)$

$= \langle 7, -7 \rangle$ بسّط



تحقق من فهمك:

أوجد الصورة الإحداثية لِـ $\overline{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممَّا يأتي:

1A) $A(-2, -7), B(6, 1)$

1B) $A(0, 8), B(-9, -3)$



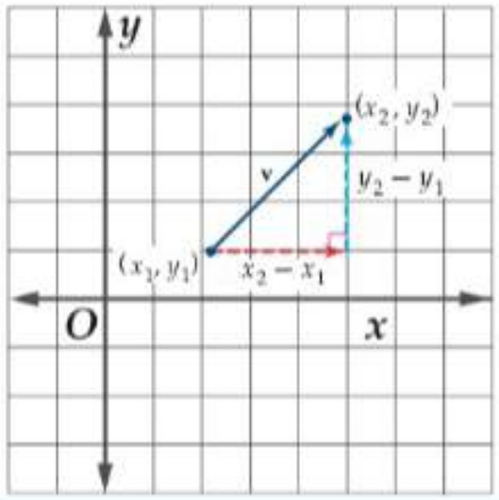
إعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

موضوع الدرس: المتجهات في المستوى الإحداثي



يمكن إيجاد طول المتجه في المستوى الإحداثي باستعمال قانون المسافة بين نقطتين.

مفهوم أساسي — طول المتجه في المستوى الإحداثي



إذا كان $\mathbf{v}$ متجهًا، نقطة بدايته (x_1, y_1) ، ونقطة نهايته (x_2, y_2) ، فإن طول $\mathbf{v}$ يُعطى بالصيغة:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

وإذا كانت $\langle a, b \rangle$ هي الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ فإن :

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

مثال 2 — إيجاد طول متجه

أوجد طول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(-4, 2)$ ، ونقطة نهايته $B(3, -5)$.

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$ قانون المسافة بين نقطتين

$$= \sqrt{[3 - (-4)]^2 + (-5 - 2)^2}$$ $(x_1, y_1) = (-4, 2)$, $(x_2, y_2) = (3, -5)$

$$= \sqrt{98} \approx 9.9$$ بسّط

التحقق علمت من المثال 1 أن: $\overrightarrow{AB} = \langle 7, -7 \rangle$ ؛ وعليه فإن: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{7^2 + (-7)^2} = \sqrt{98}$ ✔



تحقق من فهمك:

أوجد طول $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممَّا يأتي:

(2A $A(-2, -7), B(6, 1)$

(2B $A(0, 8), B(-9, -3)$

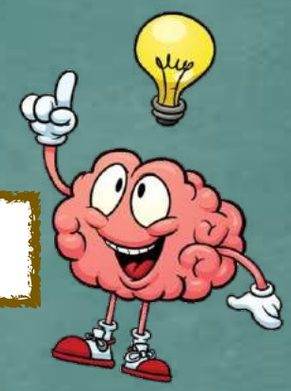
قراءة الرياضيات

المعيار

يسمى مقدار المتجه أحيانًا معيار المتجه.

إعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

موضوع الدرس: المتجهات في المستوى الإحداثي



تشبه عمليات الضرب في عدد حقيقي، والجمع والطرح على المتجهات، العمليات نفسها على المصفوفات.

مفهوم أساسي — العمليات على المتجهات

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ متجهين، و k عددًا حقيقيًا، فإن:

جمع متجهين $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$

طرح متجهين $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$

ضرب متجهٍ في عددٍ حقيقيٍّ $k\,\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2 \rangle$

مثال 3 — العمليات على المتجهات

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات $\mathbf{a} = \langle 2, 5 \rangle, \mathbf{b} = \langle -3, 0 \rangle, \mathbf{c} = \langle -4, 1 \rangle$:

a) $\mathbf{c} + \mathbf{a}$

$$\mathbf{c} + \mathbf{a} = \langle -4, 1 \rangle + \langle 2, 5 \rangle$$ عوّض

$$= \langle -4 + 2, 1 + 5 \rangle = \langle -2, 6 \rangle$$ اجمع المتجهين

b) $\mathbf{b} - 2\mathbf{a}$

$$\mathbf{b} - 2\mathbf{a} = \mathbf{b} + (-2)\mathbf{a}$$ أعد كتابة الطرح كعملية جمع

$$= \langle -3, 0 \rangle + (-2)\langle 2, 5 \rangle$$ عوّض

$$= \langle -3, 0 \rangle + \langle -4, -10 \rangle = \langle -7, -10 \rangle$$ اضرب متجهًا في عددٍ حقيقي، واجمع متجهين

إعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

موضوع الدرس: المتجهات في المستوى الإحداثي



تحقق من فهمك:

أوجد كلًا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{a} = \langle 2, 5 \rangle, \mathbf{b} = \langle -3, 0 \rangle, \mathbf{c} = \langle -4, 1 \rangle$:

(3A $4\mathbf{c} + \mathbf{b}$ **(3B** $-3\mathbf{c}$ **(3C** $2\mathbf{c} + 4\mathbf{a} - \mathbf{b}$

إرشادات للدراسة

التحقق بيانيًا

يمكن التحقق بيانيًا من إجابة مثال 3 الفرع a ، استعمال طريقة قاعدة متوازي الأضلاع كما في الشكل أدناه .

إعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

موضوع الدرس: المتجهات في المستوى الإحداثي



متجهات الوحدة: يُسمَّى المتجه الذي طوله 1 **متجه الوحدة**، ويرمز له بالرمز **u**، ولإيجاد متجه الوحدة **u** الذي له نفس اتجاه المتجه v ، اقسم المتجه **v** على طوله $|\mathbf{v}|$.

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$$

وبذلك يكون $\mathbf{v} = \mathbf{u}|\mathbf{v}|$. ونكون قد عبَّرنا عن المتجه غير الصفريّ **v** في صورة حاصل ضرب متجه وحدة بنفس اتجاه **v** في عددٍ حقيقيٍّ.

مـثال 4 إيجاد متجه وحدة له نفس الاتجاه لمتجهٍ معطًى

أوجد متجه الوحدة **u** الذي له نفس اتجاه $\mathbf{v} = \langle -2, 3 \rangle$.

$\mathbf{u} = \frac{1}{\lvert\mathbf{v}\rvert}\mathbf{v}$	متجه وحدة باتجاه v
$= \frac{1}{\lvert\langle -2, 3\rangle\rvert}\langle -2, 3\rangle$	عوّض
$= \frac{1}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2}}\langle -2, 3\rangle$	$\lvert\langle a, b\rangle\rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$
$= \frac{1}{\sqrt{13}}\langle -2, 3\rangle$	بسّط
$= \left\langle \frac{-2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}} \right\rangle$	اضرب متجه في عدد حقيقي
$= \left\langle \frac{-2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13} \right\rangle$	أنطق المقام

التحقق بما أن **u** تمثل حاصل ضرب **v** في عدد موجب فإن له اتجاه **v** نفسه. تحقَّق من أن طول **u** هو 1 .

$\lvert\mathbf{u}\rvert = \sqrt{\left(\frac{-2}{\sqrt{13}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^2}$	قانون المسافة بين نقطتين
$= \sqrt{\frac{4}{13} + \frac{9}{13}}$	بسّط
$= \sqrt{1} = 1$ ✓	بسّط

إعداد: شيخة المزروقي shikhah_math



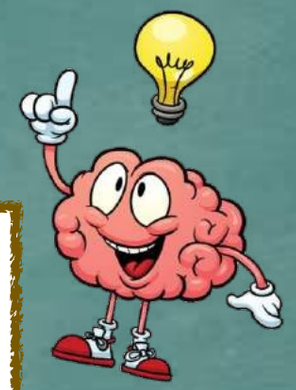
تحقق من فهمك:

أوجد متجه الوحدة الذي له نفس اتجاه المتجه المُعطى في كلٍّ ممَّا يأتي:

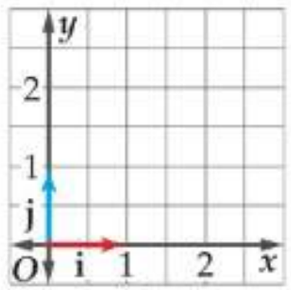
(4A $\mathbf{w} = \langle 6, -2 \rangle$

(4B $\mathbf{x} = \langle -4, -8 \rangle$

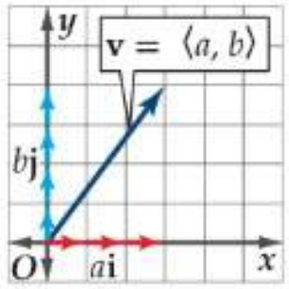




يُرمز لمتجهي الوحدة بالاتجاه الموجب لمحور x، والاتجاه الموجب لمحور y بالرمزين $\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$, $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$، على الترتيب كما في الشكل 1.2.3 . كما يُسمَّى المتجهان $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ **متجهَي الوحدة القياسيين**.



الشكل 1.2.3



الشكل 1.2.4

ويمكن استعمال هذين المتجهين للتعبير عن أي متجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ على الصورة $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ كما في الشكل 1.2.4 ؛ وذلك لأن:

$\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$	الصورة الإحداثية
$= \langle a, 0 \rangle + \langle 0, b \rangle$	أعد كتابة المتجه على صورة ناتج جمع متجهين
$= a\langle 1, 0 \rangle + b\langle 0, 1 \rangle$	اضرب متجه في عدد حقيقي
$= a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$	$\langle 1, 0 \rangle = \mathbf{i}$, $\langle 0, 1 \rangle = \mathbf{j}$

تنبيه!

متجه الوحدة i

لا تخلط بين متجه الوحدة $\mathbf{i}$ ، والعدد التخيلي i ، حيث يُكتب متجه الوحدة بخطٍ داكن غير مائل $\mathbf{i}$ ، بينما يُكتب العدد التخيلي بخطٍ غير داكن مائل i .

تسمى الصورة $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ **توافقًا خطيًّا** للمتجهين $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$. ويُقصد بها كتابة المتجه بدلالة متجهَي الوحدة $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$

إعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math



مثال 5 كتابة متجهٍ على صورة توافق خطي لمتجهَي الوحدة

إذا كانت نقطة بداية المتجه $\overrightarrow{DE}$ هي $D(-2, 3)$ ، ونقطة نهايته $E(4, 5)$ ، فاكتب $\overrightarrow{DE}$ على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$.

أولًا، أوجد الصورة الإحداثية لِـ $\overrightarrow{DE}$.

$$\overrightarrow{DE} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle \quad \text{الصورة الإحداثية}$$

$$= \langle 4 - (-2), 5 - 3 \rangle \quad (x_1, y_1) = (-2, 3) , (x_2, y_2) = (4, 5)$$

$$= \langle 6, 2 \rangle \quad \text{بسّط}$$

ثم أعد كتابة المتجه على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة.

$$\overrightarrow{DE} = \langle 6, 2 \rangle \quad \text{الصورة الإحداثية}$$

$$= 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} \quad \langle a, b \rangle = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$$



تحقق من فهمك:

اكتب المتجه $\overrightarrow{DE}$ المُعطى نقطتا بدايته ونهايته على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ في كلٍّ ممَّا يأتي :

(5A $D(-6, 0), E(2, 5)$

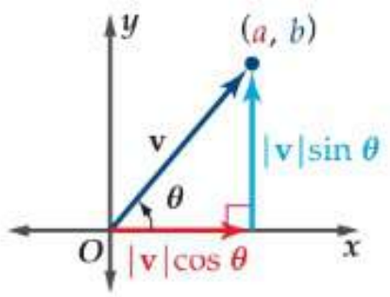
(5B $D(-3, -8), E(7, 1)$



إعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math



ويمكن كتابة المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ ، باستعمال زاوية الاتجاه التي يصنعها $\mathbf{v}$ مع الاتجاه الموجب لمحور x . فمن الشكل 1.2.5 يمكن كتابة $\mathbf{v}$ على الصورة الإحداثية، أو على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ كما يأتي:



الشكل 1.2.5

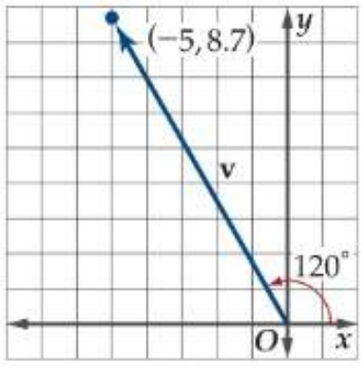
$$\mathbf{v} = \langle a, b \rangle \quad \text{الصورة الإحداثية}$$
$$= \langle |\mathbf{v}| \cos \theta, |\mathbf{v}| \sin \theta \rangle \quad \text{عوّض}$$
$$= |\mathbf{v}| (\cos \theta)\mathbf{i} + |\mathbf{v}| (\sin \theta)\mathbf{j} \quad \text{توافق خطي من } \mathbf{i}, \mathbf{j}$$

مثال 6 إيجاد الصورة الإحداثية

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ الذي طوله 10 ، وزاوية اتجاهه $120°$ مع الأفقي.

$$\mathbf{v} = \langle |\mathbf{v}| \cos \theta, |\mathbf{v}| \sin \theta \rangle \quad \text{الصورة الإحداثية للمتجه } \mathbf{v} \text{ بدلالة } |\mathbf{v}|, \theta$$
$$= \langle 10 \cos 120°, 10 \sin 120° \rangle \quad |\mathbf{v}| = 10, \theta = 120°$$
$$= \left\langle 10\left(-\frac{1}{2}\right), 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right\rangle \quad \cos 120° = -\frac{1}{2}, \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= \langle -5, 5\sqrt{3} \rangle \quad \text{بسّط}$$

التحقق مثّل بيانيًّا: $\mathbf{v} = \langle -5, 5\sqrt{3} \rangle \approx \langle -5, 8.7 \rangle$ ، تجد أن قياس الزاوية التي يصنعها $\mathbf{v}$ مع الاتجاه الموجب لمحور x هي $120°$ كما في الشكل المجاور،



$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(-5)^2 + (5\sqrt{3})^2} = 10 \checkmark$$

تحقق من فهمك



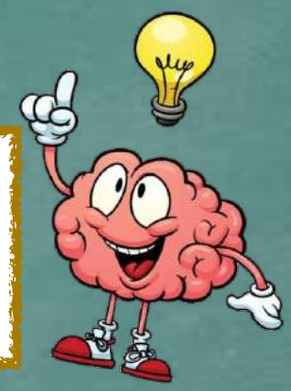
تحقق من فهمك:

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ المُعطى طوله وزاوية اتجاهه مع الأفقي في كلٍّ ممَّا يأتي :

(6A $|\mathbf{v}| = 8, \theta = 45°$

(6B $|\mathbf{v}| = 24, \theta = 210°$

إعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

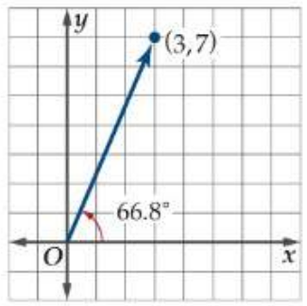


من الشكل (1.2.5) تستنتج أنه يمكن إيجاد زاوية اتجاه المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ مع الاتجاه الأفقي (الموجب لمحور x) بحَلّ المعادلة المثلثية: $\tan\theta = \frac{|\mathbf{v}| \sin\theta}{|\mathbf{v}| \cos\theta}$، أو $\tan\theta = \frac{b}{a}$.

مثال 7 زوايا الاتجاه للمتجهات

أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهات الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور x.

(a $\mathbf{p} = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$



الشكل 1.2.6

معادلة زاوية الاتجاه $\tan\theta = \frac{b}{a}$

$a = 3, b = 7$ $\tan\theta = \frac{7}{3}$

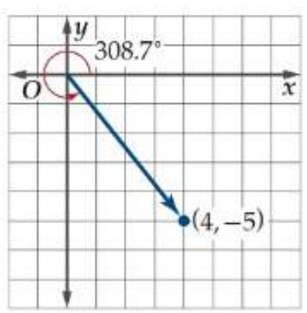
حُل بالنسبة إلى θ $\theta = \tan^{-1}\frac{7}{3}$

من خلال الصورة الإحداثية للمتجه $x = 3$ ، $y = 7$ ،
فإن المتجه يقع في الربع الأول، إذن:

استعمل الآلة الحاسبة $\theta \approx 66.8°$

أي أن زاوية اتجاه المتجه $\mathbf{p}$ هي $66.8°$ تقريبًا كما في الشكل 1.2.6 .

(b $\mathbf{r} = \langle 4, -5 \rangle$



الشكل 1.2.7

معادلة زاوية الاتجاه $\tan\theta = \frac{b}{a}$

$a = 4, b = -5$ $\tan\theta = \frac{-5}{4}$

حُل بالنسبة إلى θ $\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{5}{4}\right)$

من خلال الصورة الإحداثية للمتجه $y = -5 < 0$ ، $x = 4 > 0$ ،
فإن المتجه يقع في الربع الرابع وبالتالي زاويته

استعمل الآلة الحاسبة $\theta \approx -51.3°$

بما أن $\mathbf{r}$ يقع في الربع الرابع، كما في الشكل 1.2.7 ، فإن: $\theta \approx 360° - 51.3° = 308.7°$

إعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math



تحقق من فهمك:

أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهين الآتيين مع الاتجاه الموجب لمحور x.

(7A $-6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

(7B $\langle -3, -8 \rangle$

تنبيه!

لكل قيمة لـ $\tan\theta$ توجد زاويتان مختلفتان، بناءً على العلاقة:

$\tan\theta = \tan(\theta + 180)$

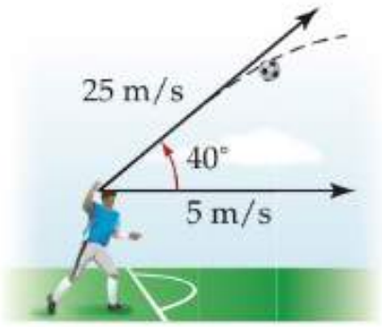
فإذا كانت قيمة $\tan\theta$ موجبةً فإن θ زاوية تقع في الربع الأول أو الربع الثالث، وإذا كانت قيمة $\tan\theta$ سالبةً، فإن θ زاوية تقع في الربع الثاني أو الرابع، وتكون العلاقة بين الزاويتين هي أن قياس إحداهما عبارة عن قياس الأولى مجموعًا لها $180°$.

إعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math



مثال 8 من واقع الحياة

تطبيق العمليات على المتجهات



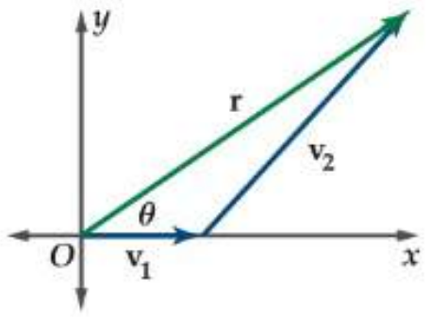
كرة قدم: يركض حارس مرمى في لعبة كرة القدم للأمام بسرعة 5 m/s ، ليرمي الكرة بسرعة 25 m/s ، بزاوية 40° مع الأفقي. أوجد محصلة السرعة، واتجاه حركة الكرة.

بما أن اللاعب يتحرك للأمام بشكل مستقيم، فإن الصورة الإحداثية لمتجه سرعة اللاعب $\mathbf{v}_1$ هي $\langle 5, 0 \rangle$ ، وتكون الصورة الإحداثية لمتجه سرعة الكرة $\mathbf{v}_2$ هي:

$$\mathbf{v}_2 = \langle |\mathbf{v}_2| \cos\theta, |\mathbf{v}_2| \sin\theta \rangle \quad \text{الصورة الإحداثية للمتجه } \mathbf{v}_2$$

$$= \langle 25 \cos 40°, 25 \sin 40° \rangle \quad |\mathbf{v}_2| = 25 \, , \, \theta = 40°$$

$$\approx \langle 19.2, 16.1 \rangle \quad \text{بسّط}$$



اجمع المتجهين $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ جبريًّا؛ لتجد متجه محصلة السرعة $\mathbf{r}$.

$$\mathbf{r} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \quad \text{متجه المحصلة}$$

$$= \langle 5, 0 \rangle + \langle 19.2, 16.1 \rangle \quad \text{عوّض}$$

$$= \langle 24.2, 16.1 \rangle \quad \text{اجمع}$$

طول متجه المحصلة هو $|\mathbf{r}| = \sqrt{24.2^2 + 16.1^2} \approx 29.1$. وتكون زاوية اتجاه المحصلة مع الأفقي هي θ حيث:

$$\tan\theta = \frac{16.1}{24.2} \quad \tan\theta = \frac{b}{a} \text{ ، حيث } \langle a, b \rangle = \langle 24.2, 16.1 \rangle$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{16.1}{24.2} \approx 33.6° \quad \text{حُل بالنسبة إلى } \theta$$

أي أن محصلة سرعة الكرة هي 29.1 m/s تقريبًا، وتصنع زاوية قياسها 33.6° مع الأفقي تقريبًا.



تحقق من فهمك:

8) **كرة قدم:** أوجد محصلة السرعة، واتجاه حركة الكرة إذا تحرك اللاعب إلى الأمام بسرعة 7m/s

إعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

موضوع الدرس: المتجهات في المستوى الإحداثي



تدرب وحل المسائل :

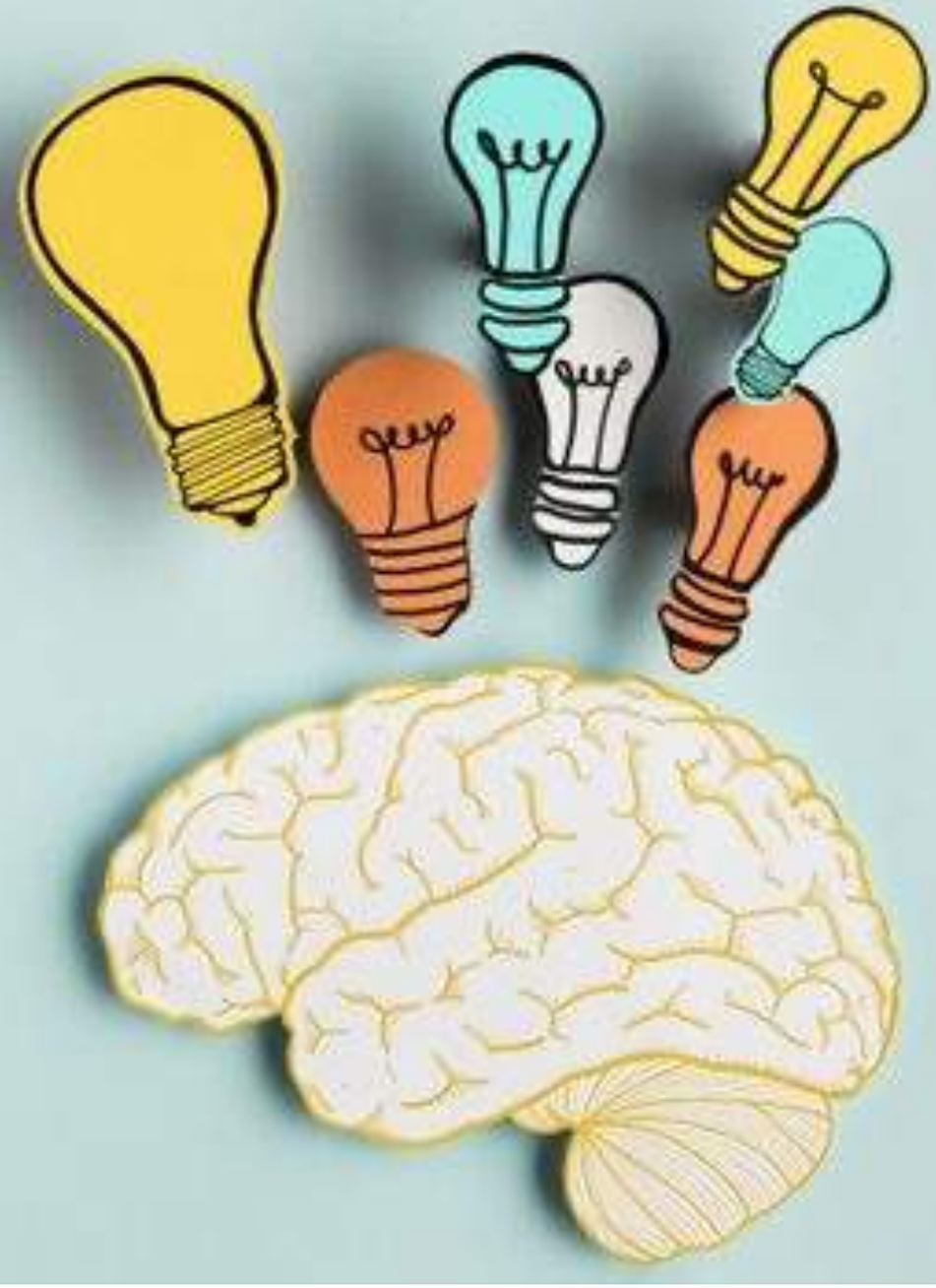


إعداد : شيخة المرزوقي shikhah_math



45) تحدّ: إذا كانت زاوية اتجاه $\langle x, y \rangle$ هي $(4y)°$ ، فأوجد قيمة x بدلالة y .





الضرب الداخلي

ثالث ثانوي

رياضيات ٦

فيما سبق

درست عمليتي الجمع والضرب في عدد حقيقي على المتجهات هندسيًّا وجبريًّا. (الدرس 2–5)

والآن

- أجدُ الضرب الداخلي لمتجهين، وأستعمله في إيجاد الزاوية بينهما.

المفردات

الضرب الداخلي
dot product

المتجهان المتعامدان
Orthogonal vectors

الشغل
work



موضوع الدرس: الضرب الداخلي

لماذا:



تحمل كلمة الشغل معانٍ متعددة في الحياة اليومية، إلا أن لها معنى محددًا في الفيزياء، وهو مقدار القوة المؤثرة في جسم مضروبة في المسافة، التي يتحركها الجسم في اتجاه القوة. ومثال ذلك: الشغل المبذول لدفع سيارة مسافة محددة. ويمكن حساب هذا الشغل باستعمال عملية على المتجهات تسمى الضرب الداخلي.



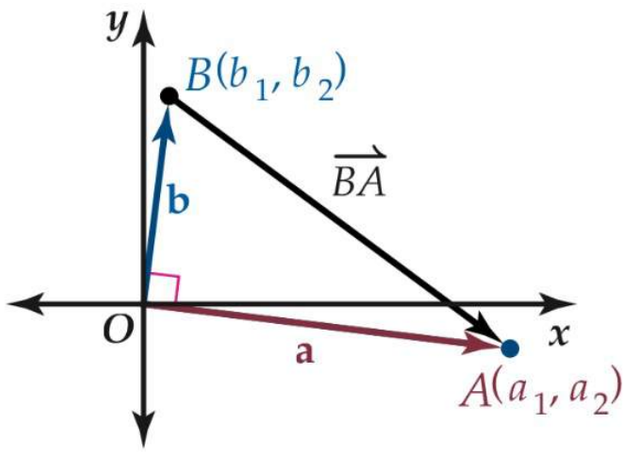
قراءة الرياضيات

الضرب القياسي

يسمى الضرب الداخلي في بعض الأحيان بالضرب القياسي.



مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق



الضرب الداخلي تعلمت في الدرس 2-5 عمليتي الجمع والضرب في عدد حقيقي على المتجهات. وفي هذا الدرس سوف تتعلم عملية ثالثة على المتجهات. إذا كان لديك المتجهان المتعامدان **a** , **b** في الوضع القياسي، وكان $\overrightarrow{BA}$ المتجه الواصل بين نقطتي نهاية المتجهين كما في الشكل المجاور. فإنك تعلم من نظرية فيثاغورس أن $|\overrightarrow{BA}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$.

وباستعمال مفهوم طول المتجه يمكنك إيجاد $|\overrightarrow{BA}|^2$.

تعريف طول متجه	$\|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$
ربّع الطرفين	$\|\overrightarrow{BA}\|^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2$
فُك الأقواس	$\|\overrightarrow{BA}\|^2 = {a_1}^2 - 2a_1b_1 + {b_1}^2 + {a_2}^2 - 2a_2b_2 + {b_2}^2$
جمّع الحدود المربعة	$\|\overrightarrow{BA}\|^2 = ({a_1}^2 + {a_2}^2) + ({b_1}^2 + {b_2}^2) - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$
$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}$, $\|\mathbf{a}\|^2 = {a_1}^2 + {a_2}^2$, $\|\mathbf{b}\| = \sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2}$, $\|\mathbf{b}\|^2 = {b_1}^2 + {b_2}^2$	$\|\overrightarrow{BA}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$

لاحظ أن العبارتين $|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$ ، $|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$ متكافئتان، إذا وفقط إذا كان $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$.
ويُسمَّى التعبير $a_1b_1 + a_2b_2$ **الضرب الداخلي** للمتجهين **a** , **b** ، ويُرمز له بالرمز **a** • **b** ، ويُقرأ الضرب الداخلي للمتجهين a , b ، أو يُقرأ اختصارًا **a** dot **b** .



موضوع الدرس: الضرب الداخلي

مفهوم أساسي

الضرب الداخلي لمتجهين في المستوى الإحداثي

يُعرَّف الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle , \mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ كالآتي :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

لاحظ أنه خلافًا لعمليتي الجمع والضرب في عدد حقيقي على المتجهات، فإن حاصل الضرب الداخلي لمتجهين يكون عددًا وليس متجهًا. ويتعامد متجهان غير صفريين، إذا وفقط إذا كان حاصل ضربهما الداخلي صفرًا. ويقال للمتجهين اللّذين حاصل ضربهما الداخلي صفر: **متجهان متعامدان** .

مفهوم أساسي

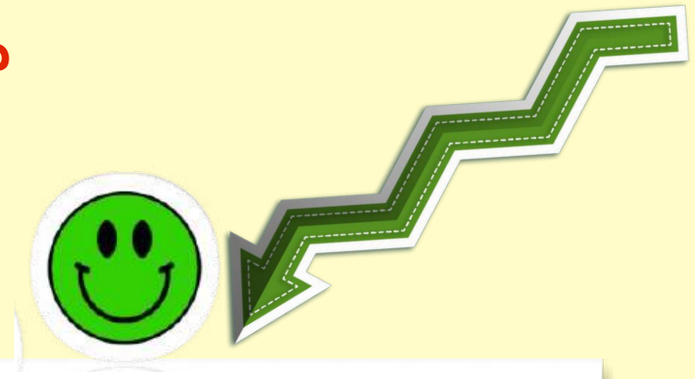
المتجهان المتعامدان

يكون المتجهان غير الصفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ متعامدين، إذا وفقط إذا كان $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

على الرغم من أن حاصل الضرب الداخلي للمتجه الصفري في أي متجه آخر يساوي الصفر، أي أن :
$\langle 0, 0 \rangle \cdot \langle a_1, a_2 \rangle = 0a_1 + 0a_2 = 0$ ، إلا أن المتجه الصفري لا يعامد أي متجه آخر؛ لأنه ليس له طول أو اتجاه.



موضوع الدرس: الضرب الداخلي



مـثال 1 استعمال الضرب الداخلي في التحقق من تعامد متجهين

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين .

(a $\mathbf{u} = \langle 3, 6 \rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 2 \rangle$

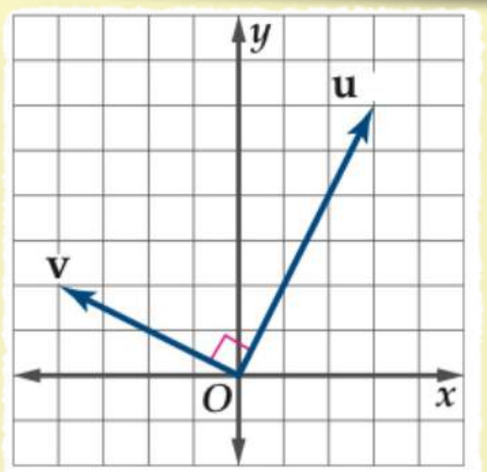
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3(-4) + 6(2)$$
$$= 0$$

بما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ ، فإن $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ متعامدان كما هو موضَّح في الشكل 1.3.1 .

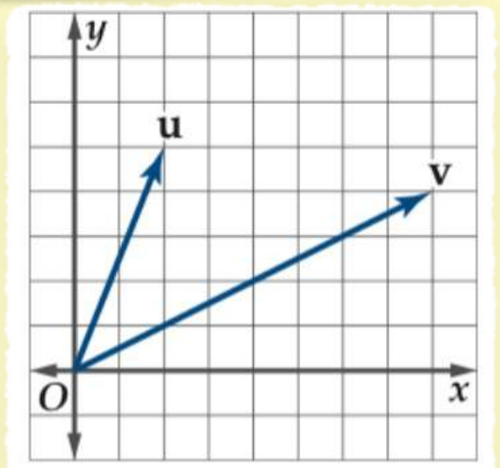
(b $\mathbf{u} = \langle 2, 5 \rangle, \mathbf{v} = \langle 8, 4 \rangle$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2(8) + 5(4)$$
$$= 36$$

بما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \neq 0$، فإن $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ غير متعامدين كما هو موضَّح في الشكل 1.3.2 .



الشكل 1.3.1



الشكل 1.3.2



موضوع الدرس: الضرب الداخلي



تحقق من فهمك

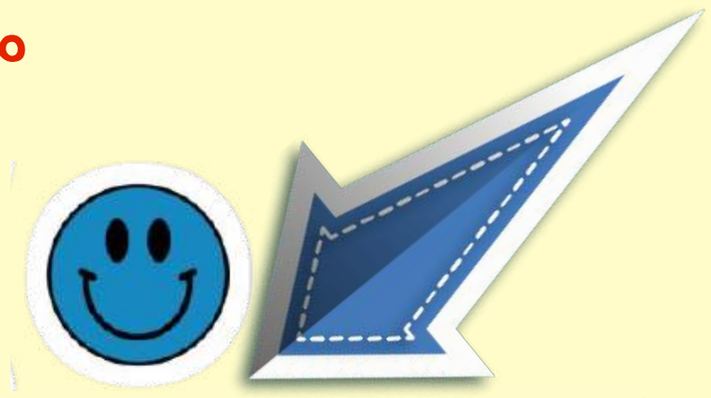
أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين .

(1A $\mathbf{u} = \langle 3, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle -5, 1 \rangle$

(1B $\mathbf{u} = \langle -2, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 9, -6 \rangle$



موضوع الدرس: الضرب الداخلي



نظريَّة

خصائص الضرب الداخلي

إذا كانت $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ متجهات، وكان k عددًا حقيقيًّا، فإن الخصائص الآتية صحيحة:

الخاصية الإبدالية	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
خاصية التوزيع	$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
خاصية الضرب في عدد حقيقي	$k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = k\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot k\mathbf{v}$
خاصية الضرب الداخلي في المتجه الصفري	$0 \cdot \mathbf{u} = 0$
العلاقة بين الضرب الداخلي وطول المتجه	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \lvert\mathbf{u}\rvert^2$

البرهان

إثبات أن: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$

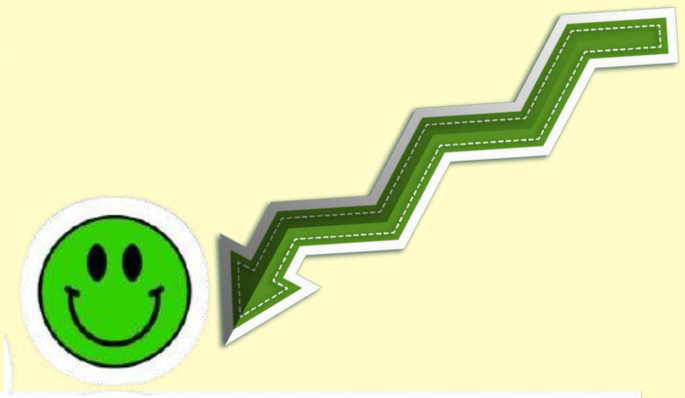
افترض أن: $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2$	الضرب الداخلي
$= \left(\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\right)^2$	اكتب على صورة مربع جذر $(u_1^2 + u_2^2)$
$= \lvert\mathbf{u}\rvert^2$	$\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \lvert\mathbf{u}\rvert$

ستبرهن الخصائص الثلاث الأولى في الأسئلة 37–35



موضوع الدرس: الضرب الداخلي



مـثال 2 استعمال الضرب الداخلي لإيجاد طول متجه

استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول $\mathbf{a} = \langle -5, 12 \rangle$.

بما أن: $|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \bullet \mathbf{a}$ ، فإن: $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \bullet \mathbf{a}}$.

$|\langle -5, 12 \rangle| = \sqrt{\langle -5, 12 \rangle \bullet \langle -5, 12 \rangle}$ $\mathbf{a} = \langle -5, 12 \rangle$

$= \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = 13$ بسّط



موضوع الدرس: الضرب الداخلي



تحقق من فهمك

استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول كلٍّ من المتجهات الآتية :

(2A $\mathbf{b} = \langle 12, 16 \rangle$ **(2B** $\mathbf{c} = \langle -1, -7 \rangle$



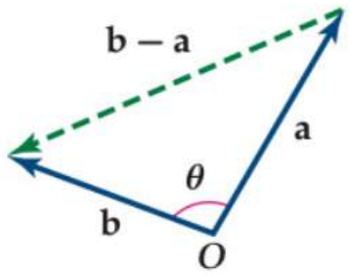
موضوع الدرس: الضرب الداخلي

مفهوم أساسي

الزاوية بين متجهين

إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ، فإن:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$$

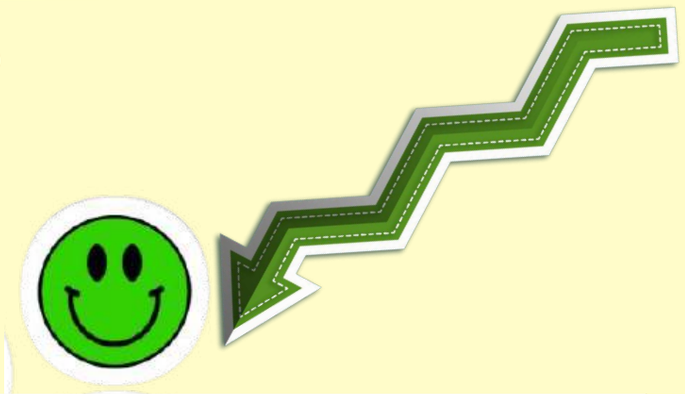


البرهان

إذا كان: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b}-\mathbf{a}$ أضلاع مثلث كما في الشكل أعلاه ، فإن:

$\lvert\mathbf{a}\rvert^2 + \lvert\mathbf{b}\rvert^2 - 2\lvert\mathbf{a}\rvert\lvert\mathbf{b}\rvert\cos\theta = \lvert\mathbf{b}-\mathbf{a}\rvert^2$	قانون جيوب التمام
$\lvert\mathbf{a}\rvert^2 + \lvert\mathbf{b}\rvert^2 - 2\lvert\mathbf{a}\rvert\lvert\mathbf{b}\rvert\cos\theta = (\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})$	$\lvert\mathbf{u}\rvert^2 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$
$\lvert\mathbf{a}\rvert^2 + \lvert\mathbf{b}\rvert^2 - 2\lvert\mathbf{a}\rvert\lvert\mathbf{b}\rvert\cos\theta = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$	خاصية التوزيع للضرب الداخلي
$\lvert\mathbf{a}\rvert^2 + \lvert\mathbf{b}\rvert^2 - 2\lvert\mathbf{a}\rvert\lvert\mathbf{b}\rvert\cos\theta = \lvert\mathbf{b}\rvert^2 - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \lvert\mathbf{a}\rvert^2$	$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = \lvert\mathbf{u}\rvert^2$
$-2\lvert\mathbf{a}\rvert\lvert\mathbf{b}\rvert\cos\theta = -2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$	بطرح $\lvert\mathbf{a}\rvert^2 + \lvert\mathbf{b}\rvert^2$ من الطرفين
$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\lvert\mathbf{a}\rvert\lvert\mathbf{b}\rvert}$	بقسمة الطرفين على $-2\lvert\mathbf{a}\rvert\lvert\mathbf{b}\rvert$

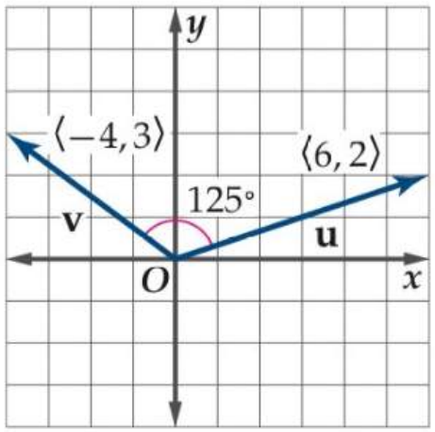
موضوع الدرس: الضرب الداخلي



مـثال 3 إيجاد قياس الزاوية بين متجهين

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي:

a) $\mathbf{u} = \langle 6, 2 \rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 3 \rangle$



الزاوية بين متجهين $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}$

$\mathbf{u} = \langle 6, 2 \rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 3 \rangle$ $\cos\theta = \dfrac{\langle 6, 2 \rangle \cdot \langle -4, 3 \rangle}{|\langle 6, 2 \rangle|\,|\langle -4, 3 \rangle|}$

الضرب الداخلي لمتجهين، طول المتجه $\cos\theta = \dfrac{-24 + 6}{\sqrt{40}\sqrt{25}}$

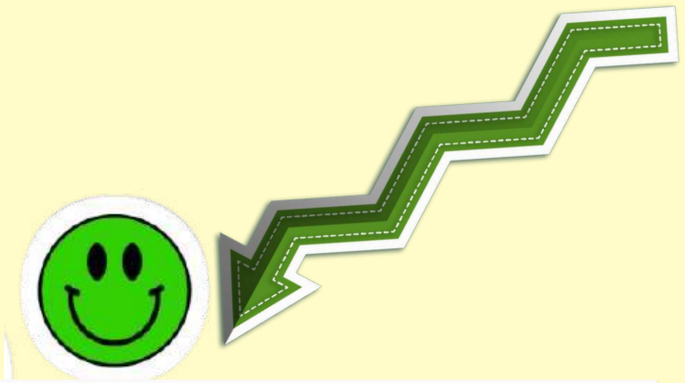
بسّط $\cos\theta = \dfrac{-18}{10\sqrt{10}}$

معكوس جيب التمام $\theta = \cos^{-1}\dfrac{-18}{10\sqrt{10}} \approx 125°$

أي أن قياس الزاوية بين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ هو $125°$ تقريبًا، كما في الشكل أعلاه.



موضوع الدرس: الضرب الداخلي



(b $\mathbf{u} = \langle 3, 1 \rangle , \mathbf{v} = \langle 3, -3 \rangle$

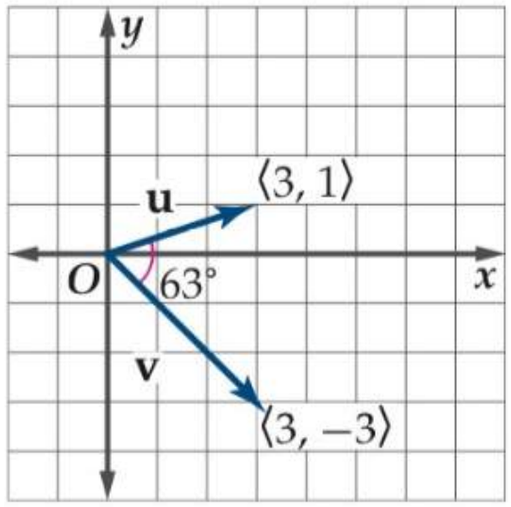
الزاوية بين متجهين $\cos \theta = \dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}$

$\mathbf{u} = \langle 3, 1 \rangle , \mathbf{v} = \langle 3, -3 \rangle$ $\cos \theta = \dfrac{\langle 3, 1 \rangle \cdot \langle 3, -3 \rangle}{|\langle 3, 1 \rangle|\,|\langle 3, -3 \rangle|}$

الضرب الداخلي لمتجهين، طول المتجه $\cos \theta = \dfrac{9 + (-3)}{\sqrt{10}\sqrt{18}}$

بسّط $\cos \theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

معكوس جيب التمام $\theta = \cos^{-1} \dfrac{1}{\sqrt{5}} \approx 63^\circ$



أي أن قياس الزاوية بين $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ هو 63° تقريبًا، كما في الشكل المجاور.



موضوع الدرس: الضرب الداخلي



تحقق من فهمك

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي:

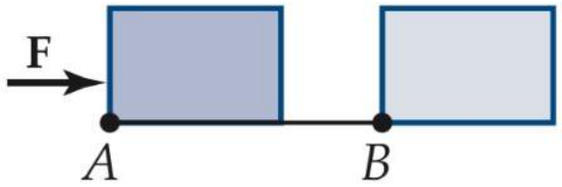
(3A $\mathbf{u} = \langle -5, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 4 \rangle$

(3B $\mathbf{u} = \langle 9, 5 \rangle, \mathbf{v} = \langle -6, 7 \rangle$

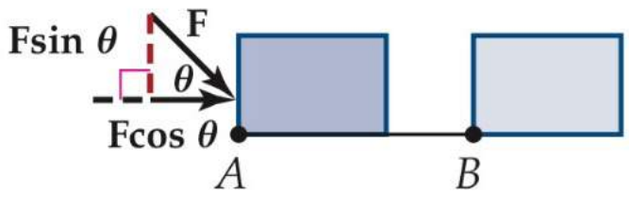


موضوع الدرس: الضرب الداخلي

من التطبيقات على الضرب الداخلي للمتجهات، حساب الشغل الناتج عن قوة، فإذا كانت **F** قوةً مؤثرةً في جسم لتحريكه من النقطة A إلى B كما في الشكل أدناه، وكانت **F** موازيةً لِـ $\overrightarrow{AB}$ ، فإن **الشغل** W الناتج عن **F** يساوي مقدار القوة **F** مضروبًا في المسافة من A إلى B ، أو $W = |\mathbf{F}||\overrightarrow{AB}|$.



ولحساب الشغل الناتج من قوة ثابتة **F** ، بأي اتجاه لتحريك جسم من النقطة A إلى B ، كما في الشكل المجاور، يمكنك استعمال الصيغة:

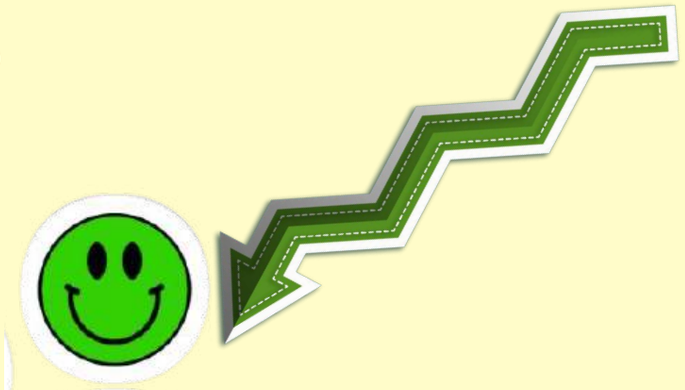


$$W = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB}$$

أي أنه يمكن حساب هذا الشغل بإيجاد الضرب الداخلي بين القوة الثابتة **F** ، والمسافة المتجهة $\overrightarrow{AB}$ بعد كتابتهما في الصورة الإحداثية.



موضوع الدرس: الضرب الداخلي



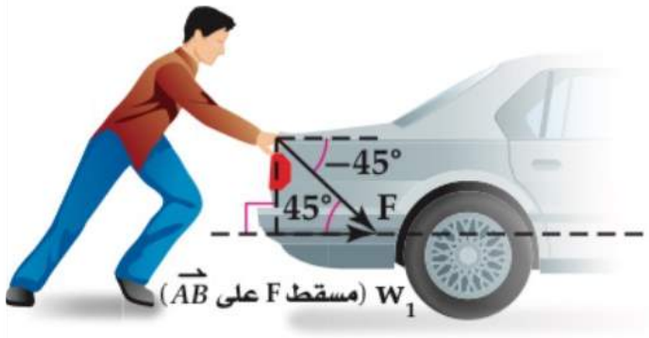
إرشادات للدراسة

وحدات الشغل

وحدة قياس الشغل في النظام الإنجليزي هي قدم-رطل ، وفي النظام المتري نيوتن-متر أو جول.

مثال 4 من واقع الحياة

حساب الشغل



سيارة : يدفع شخص سيارةً بقوةٍ ثابتةٍ مقدارها 120 N بزاوية 45° كما في الشكل المجاور، أوجد الشغل المبذول بالجول لتحريك السيارة 10 m (بإهمال قوة الاحتكاك).

استعمل قاعدة الضرب الداخلي للشغل.

الصورة الإحداثية للقوة المتجهة **F** بدلالة مقدار القوة، وزاوية الاتجاه هي :

$\langle 120\cos(-45°), 120\sin(-45°)\rangle$. الصورة الإحداثية لمتجه المسافة هي $\langle 10, 0\rangle$.

قاعدة الضرب الداخلي للشغل $W = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB}$

عوّض $= \langle 120\cos(-45°), 120\sin(-45°)\rangle \cdot \langle 10, 0\rangle$

الضرب الداخلي $= [120\cos(-45°)](10) \approx 848.5$

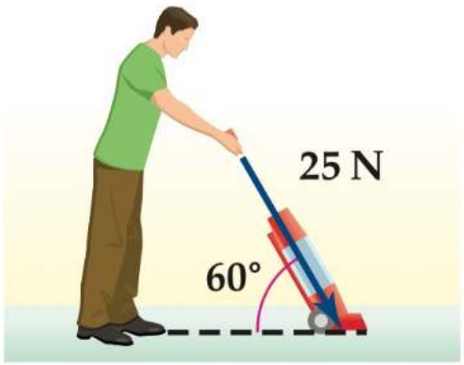
أي أن الشخص يبذل 848.5J من الشغل؛ لدفع السيارة.



موضوع الدرس: الضرب الداخلي



تحقق من فهمك



4) **تنظيف:** يدفع إبراهيم مكنسةً كهربائيةً بقوةٍ مقدارها 25 N، إذا كان قياس الزاوية بين ذراع المكنسة وسطح الأرض 60°، فأوجد الشغل بالجول الذي بذله إبراهيم عند تحريك المكنسة مسافة 6 m؟



مسائل مهارات التفكير العليا

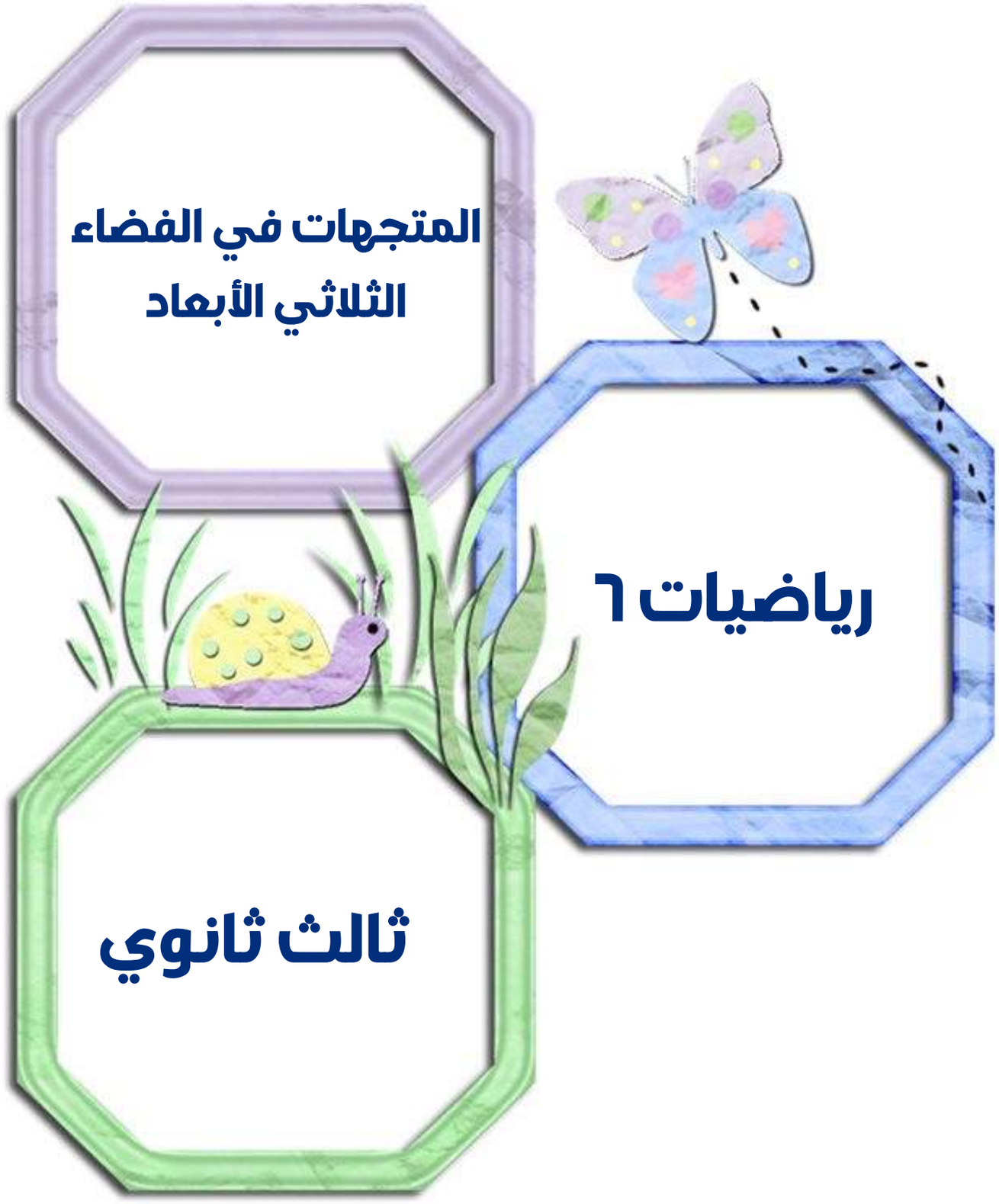
33) اكتشف الخطأ: يدرس كلٌّ من فهدٍ وفيصلٍ خصائص الضرب الداخلي للمتجهات، فقال فهد: إن الضرب الداخلي للمتجهات عملية تجميعية؛ لأنها إبدالية؛ أي أن:
$(\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}) \bullet \mathbf{w} = \mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \bullet \mathbf{w})$، ولكن فيصل عارضه، فأيهما كان على صواب؟ وضِّح إجابتك.



مسائل مهارات التفكير العليا

38) **برهان:** إذا كان قياس الزاوية بين المتجهين $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ يساوي $90°$، فأثبت أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ باستعمال قاعدة الزاوية بين متجهين غير صفريين.




المتجهات في الفضاء
الثلاثي الأبعاد
رياضيات ٦
ثالث ثانوي



موضوع الدرس : المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد

فيما سبق

درست المتجهات في النظام الثنائي الأبعاد هندسيًّا وجبريًّا. الدرس (1—1)

والآن

- أعيِّنُ نقاطًا، ومتجهات في النظام الإحداثي الثلاثي الأبعاد.
- أعبِّرُ عن المتجهات جبريًّا، وأجري العمليات عليها في الفضاء الثلاثي الأبعاد.

المفردات

نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد
three-dimensional coordinate system

المحور z
z-axis

الثُمن
octant

الثلاثي المرتب
ordered triple

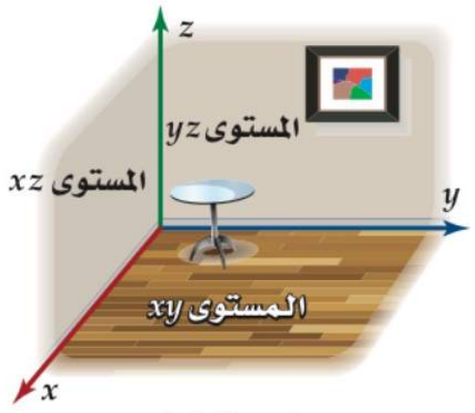


لماذا:

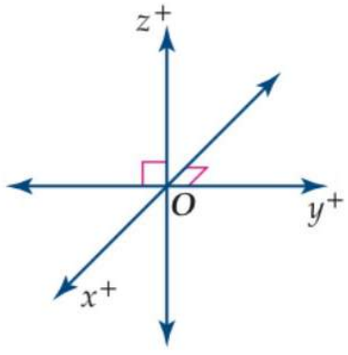


لإطلاق صاروخ في الفضاء، يلزم تحديد اتجاهه وزاويته في الفضاء. وبما أن مفاهيم المسافة والسرعة والقوة المتجهة غير مقيدة في المستوى، فلا بد من توسيع مفهوم المتجه إلى الفضاء الثلاثي الأبعاد.

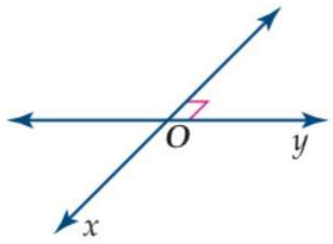
الإحداثيات في الفضاء الثلاثي الأبعاد المستوى الإحداثي: هو نظام إحداثي ثنائي الأبعاد يتشكل بواسطة خطَّي أعداد متعامدين، هما المحور x والمحور y، اللذان يتقاطعان في نقطة تسمى نقطة الأصل. ويسمح لك هذا النظام بتحديد وتعيين نقاطٍ في المستوى، وتحتاج إلى **نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد**؛ لتعيين نقطةٍ في الفضاء، فنبدأ بالمستوى xy، ونضعه بصورة تُظهر عمقًا للشكل كما في الشكل 1.4.1، ثم نضيف محورًا ثالثًا يُسمَّى **المحور z** يمر بنقطة الأصل، ويعامد كلًّا من المحورين x، y كما في الشكل 1.4.2. فيكون لدينا ثلاثة مستويات هي xy, yz, xz ، وتقسم هذه المستويات الفضاء إلى ثماني مناطق، يُسمَّى كلٌّ منها **الثُّمُن**، ويمكن تمثيل الثُّمُن الأول بجزء الحجرة في الشكل 1.4.3.



الشكل 1.4.3



الشكل 1.4.2



الشكل 1.4.1

تُمثَّل النقطة في الفضاء **بثلاثيات مرتبة** من الأعداد الحقيقية (x, y, z)، ولتعيين مثل هذه النقطة، عيّن أولًا النقطة (x, y) في المستوى xy، ثم تحرك لأعلى، أو إلى أسفل موازيًا للمحور z، بحسب المسافة المتجهة التي يُمثّلها z.



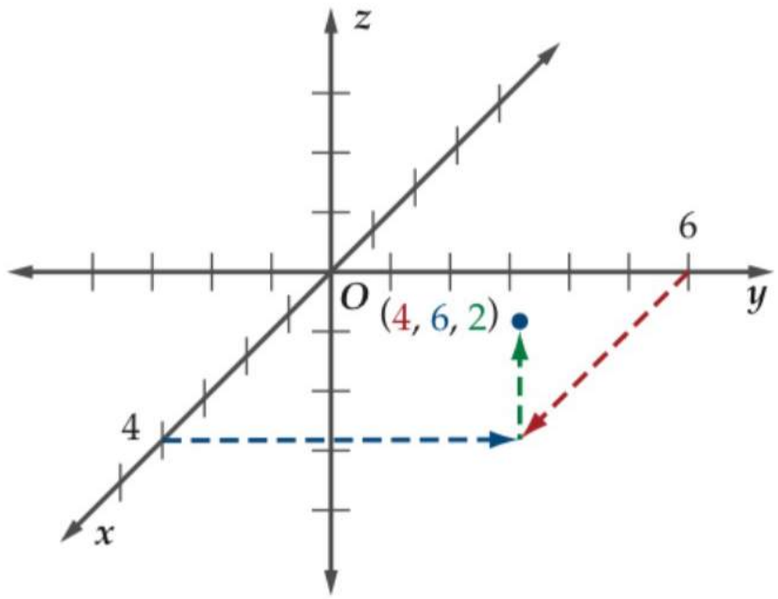
مثال ١

تعيين نقطة في الفضاء

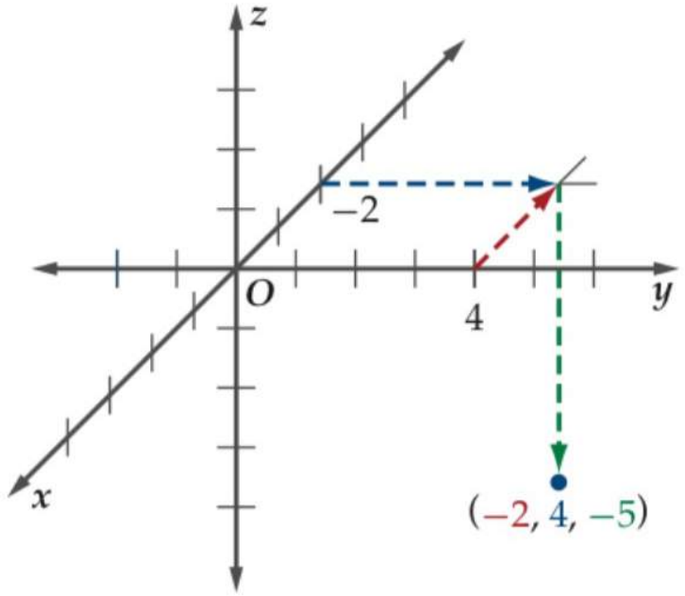
عيِّن كلًّا من النقطتين الآتيتين في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

a) $(4, 6, 2)$ **b)** $(-2, 4, -5)$

عيّن $(6, 4)$ في المستوى xy بوضع إشارة مناسبة، ثم ضع نقطةً على بُعد وحدتين أعلى الإشارة التي وضعتها، وبموازاة المحور z، كما في الشكل أدناه.



عيّن $(4, -2)$ في المستوى xy بوضع إشارة مناسبة، ثم ضع نقطةً على بُعد 5 وحداتٍ أسفل الإشارة التي وضعتها، وبموازاة المحور z، كما في الشكل أدناه.

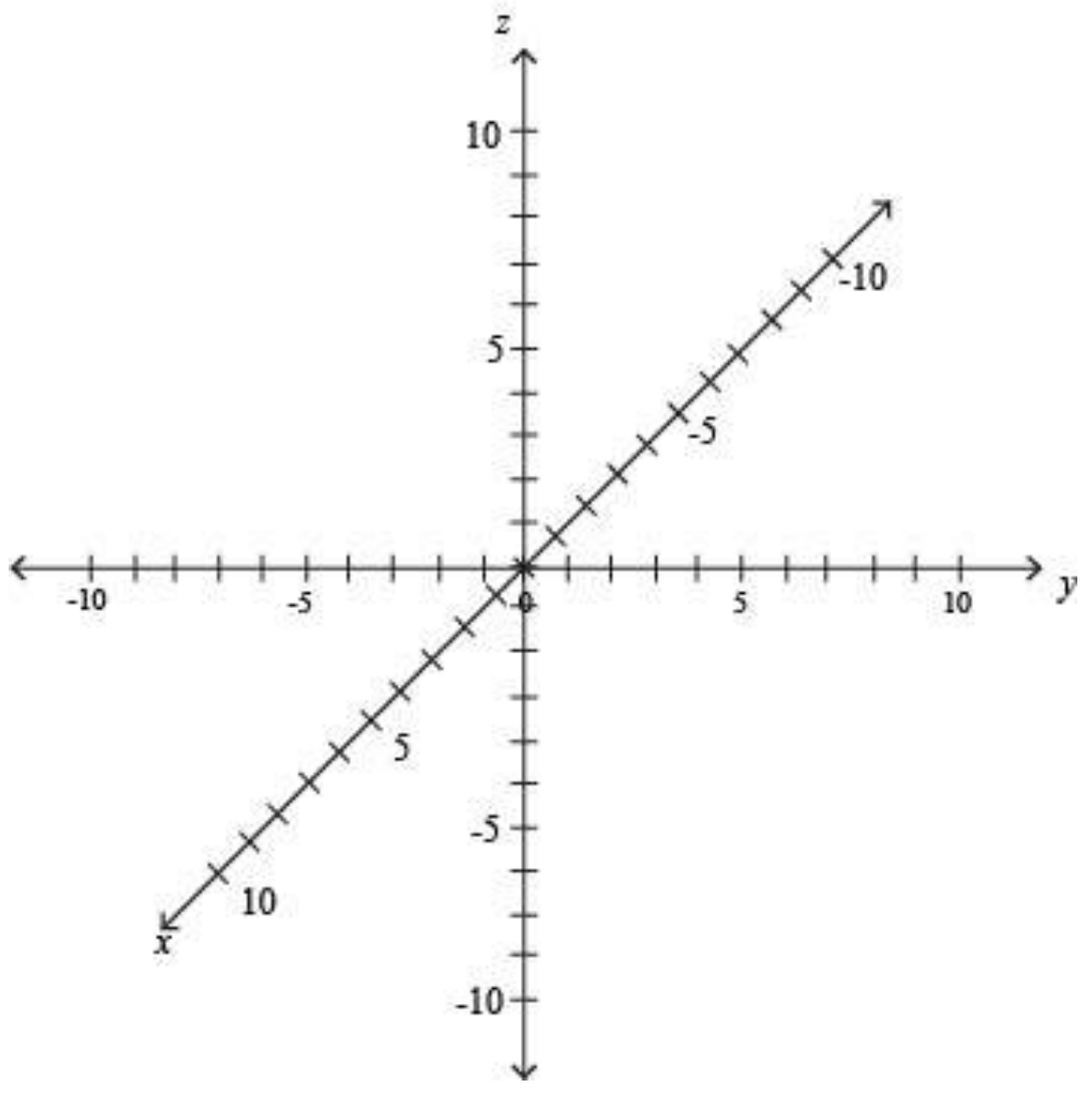




تحقق من فهمك

عيِّن كلًّا من النقاط الآتية في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

1A) $(-3 , -4 , 2)$ **1B)** $(3 , 2 , -3)$ **1C)** $(5 , -4 , -1)$



إرشادات للدراسة

تدريج المحاور

تذكر أن التدريج في المحاور الثلاثة في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد متساوٍ.

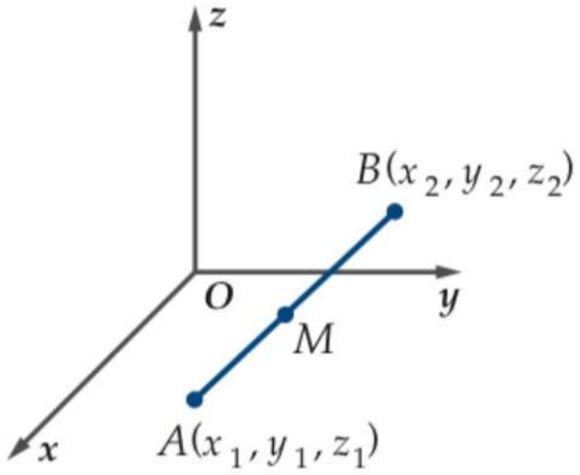




عملية إيجاد المسافة بين نقطتين، وإيجاد نقطة منتصف قطعة مستقيمة في الفضاء تشبهان عملية إيجاد المسافة، ونقطة منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي .

مفهوم أساسي

صيغتا المسافة ونقطة المنتصف في الفضاء



تُعطى المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ بالصيغة:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

وتعطى نقطة المنتصف M لـ $\overline{AB}$ بالصيغة:

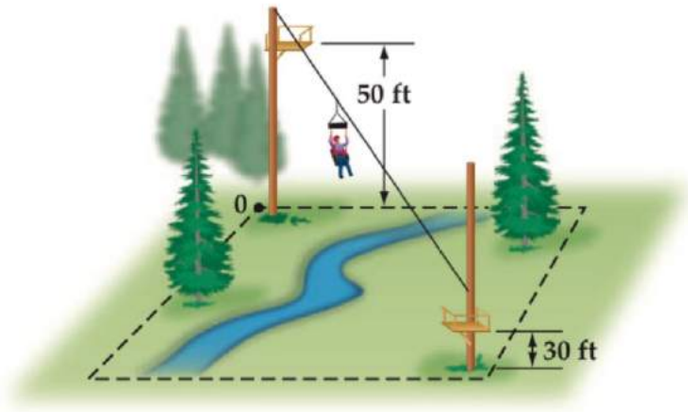
$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$



مثال؟ من واقع الحياة

المسافة بين نقطتين ونقطة منتصف قطعة مستقيمة في الفضاء

رحلة : تتحرك العربة في الشكل المجاور على سلسلة مشدودة، تربط بين منصَّتين تسمح للمتنزهين بالمرور فوق مناظر طبيعية خلابة. إذا مُثلت المنصتان بالنقطتين: (10, 12, 50) , (70, 92 , 30)، وكانت الإحداثيات معطاة بالأقدام، فأجب عما يأتي:



a) أوجد طول السلسلة اللازمة للربط بين المنصَّتَين إلى أقرب قدمٍ.

استعمل صيغة المسافة بين نقطتين.

صيغة المسافة $AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

$(x_2, y_2, z_2) = (70, 92, 30)\ ,\ (x_1, y_1, z_1) = (10, 12, 50)$ $= \sqrt{(70-10)^2+(92-12)^2+(30-50)^2}$

بسّط ≈ 101.98

أي أننا نحتاج إلى حبلٍ طوله 102 ft تقريبًا للربط بين المنصَّتين.

b) أوجد إحداثيات منتصف المسافة بين المنصَّتين.

استعمل صيغة نقطة المنتصف في الفضاء .

صيغة المنتصف $M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$

$(x_2, y_2, z_2) = (70, 92, 30)\ ,\ (x_1, y_1, z_1) = (10, 12, 50)$ $= \left(\frac{10+70}{2}, \frac{12+92}{2}, \frac{50+30}{2}\right)$

$= (40, 52, 40)$

أي أن إحداثيات منتصف المسافة بين المنصتين هي (40, 52, 40)



الربط مع الحياة

يستمتع سكان البنايات الشاهقة، خصوصًا في الأماكن المرتفعة، بمشاهدة أجزاء من المدينة كالجسور وحركة المرور، والحدائق ... إلخ .





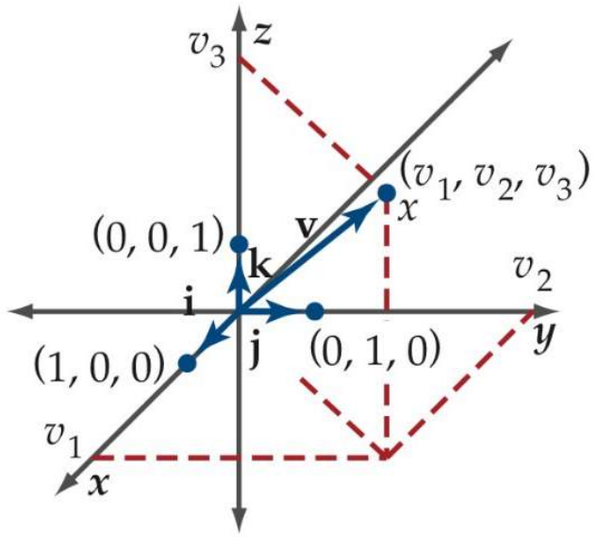
2) طائرات: تفرض أنظمة السلامة ألّا تقل المسافة بين الطائرات عن 0.5 mi في أثناء طيرانها، إذا علمت أن طائرتين تطيران فوق إحدى المناطق، وفي لحظةٍ معينةٍ كانت إحداثيات موقِعَي الطائرتين: $(450, -250, 28000)$, $(300, 150, 30000)$، مع العلم بأن الإحداثيات معطاة بالأقدام، فأجب عما يأتي:

A) هل تخالف الطائرتان أنظمة السلامة؟

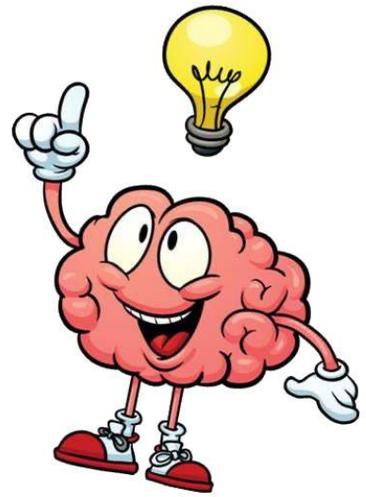
B) إذا أطلقت ألعابٌ ناريةٌ، وانفجرت في منتصف المسافة بين الطائرتين، فما إحداثيات نقطة الانفجار؟

إرشادٌ: الميل = 5280 قدمًا





الشكل 1.4.4



المتجهات في الفضاء إذا كان $\mathbf{v}$ متجهًا في الفضاء في وضع قياسي، وكانت (v_1, v_2, v_3) نقطة نهايته، فإننا نعبّر عنه بالصورة الإحداثية $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ ،كما يُعبّر عن المتجه الصفري بالصورة الإحداثية $\mathbf{0} = \langle 0, 0, 0 \rangle$ ، وعن متجهات الوحدة القياسية بالصورة الإحداثية $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle, \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle, \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$ ، كما في الشكل 1.4.4 ، ويمكن التعبير عن الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ على صورة توافق خطي لمتجهات الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ كما يأتي: $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$.



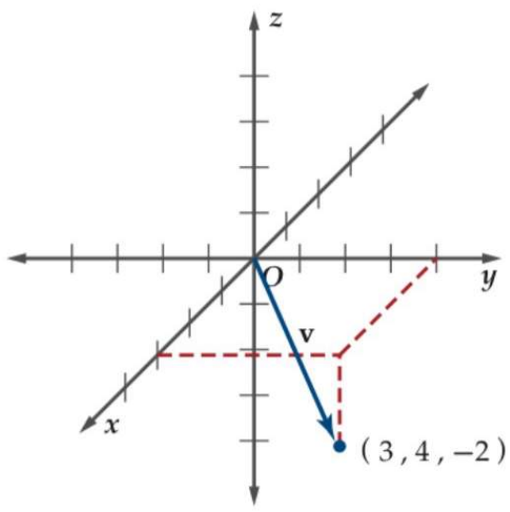


تعيين متجه في الفضاء

مثِّل بيانيًّا كلًّا من المتجهين الآتيين في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

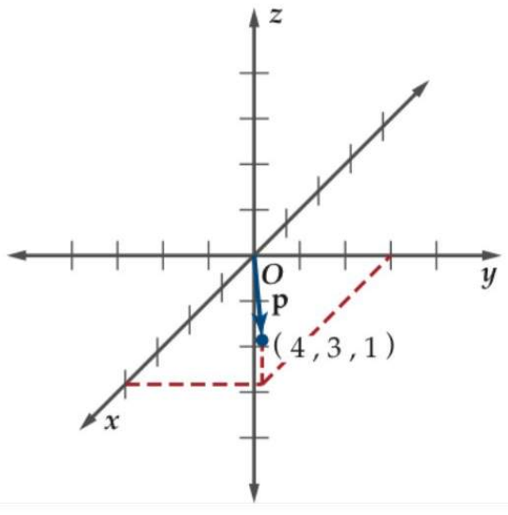
a) $\mathbf{v} = \langle 3, 4, -2 \rangle$

عيِّن النقطة $(3, 4, -2)$ ، ثم مثِّل المتجه $\mathbf{v}$ بيانيًّا، بحيث تكون النقطة $(3, 4, -2)$ نقطة نهايته.



b) $\mathbf{p} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$

عيِّن النقطة $(4, 3, 1)$ ، ثم مثِّل المتجه $\mathbf{p}$ بيانيًّا، بحيث تكون النقطة $(4, 3, 1)$ نقطة نهايته.



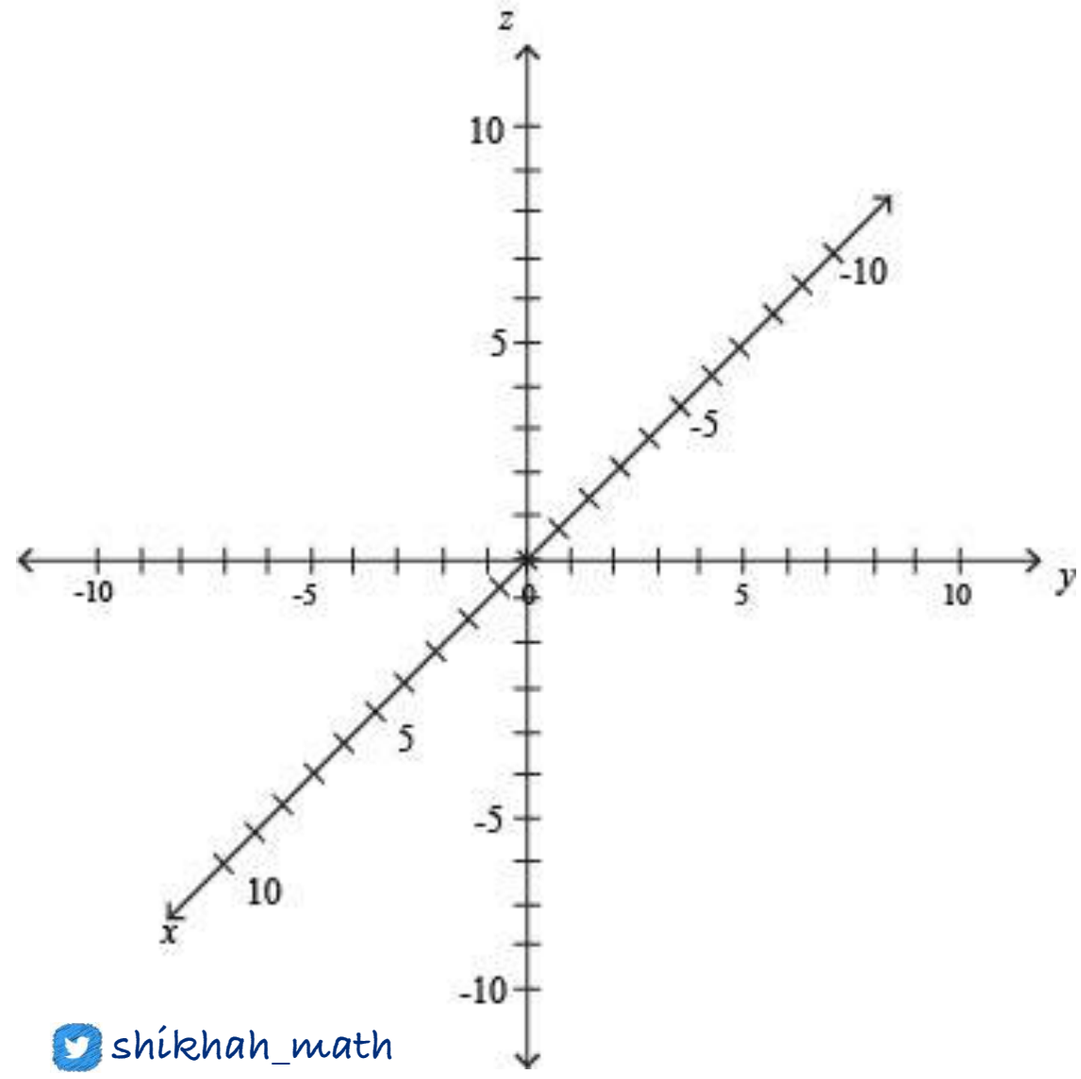




مثِّل بيانيًّا كلًّا من المتجهين الآتيين في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

(3A $\mathbf{u} = \langle -4, 2, -3 \rangle$

(3B $\mathbf{w} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$





shikhah_math
شيخة المرزوقي MATHEMATICS

موضوع الدرس : المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد



إذا كُتبت المتجهات في الفضاء على الصورة الإحداثية، فإنه يمكن أن تُجرى عليها عمليات الجمع، والطرح ، والضرب في عدد حقيقي كما هي الحال في المتجهات في المستوى الإحداثي.

مفهوم أساسي

العمليات على المتجهات في الفضاء

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$، $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ متجهين في الفضاء، وكان k عددًا حقيقيًا ، فإن :

جمع متجهين $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$

طرح متجهين $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$

ضرب متجهٍ في عددٍ حقيقيٍّ $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2, ka_3 \rangle$



مثال ٤

العمليات على المتجهات في الفضاء

إرشادات للدراسة

العمليات على المتجهات

خصائص العمليات على المتجهات في الفضاء هي الخصائص نفسها في المستوى الإحداثي.

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{y} = \langle 3, -6, 2 \rangle, \mathbf{w} = \langle -1, 4, -4 \rangle, \mathbf{z} = \langle -2, 0, 5 \rangle$:

a) $4\mathbf{y} + 2\mathbf{z}$

عوّض $\quad 4\mathbf{y} + 2\mathbf{z} = 4\langle 3, -6, 2 \rangle + 2\langle -2, 0, 5 \rangle$

اضرب متجهًا في عدد حقيقي $\quad = \langle 12, -24, 8 \rangle + \langle -4, 0, 10 \rangle$

اجمع المتجهين $\quad = \langle 8, -24, 18 \rangle$

b) $2\mathbf{w} - \mathbf{z} + 3\mathbf{y}$

عوّض $\quad 2\mathbf{w} - \mathbf{z} + 3\mathbf{y} = 2\langle -1, 4, -4 \rangle - \langle -2, 0, 5 \rangle + 3\langle 3, -6, 2 \rangle$

اضرب متجهٍ في عددٍ حقيقي $\quad = \langle -2, 8, -8 \rangle + \langle 2, 0, -5 \rangle + \langle 9, -18, 6 \rangle$

اجمع المتجهات $\quad = \langle 9, -10, -7 \rangle$



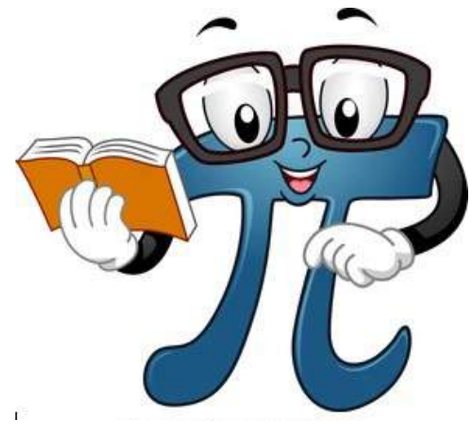


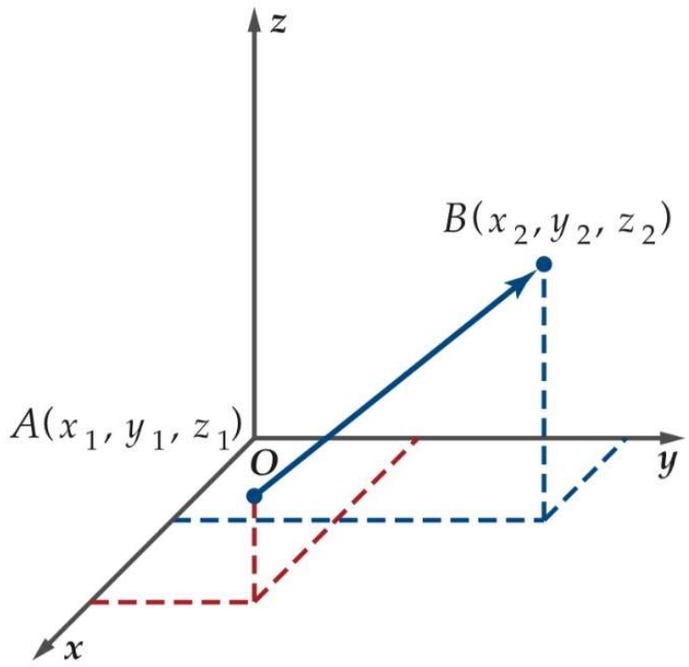
أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{y} = \langle 3, -6, 2 \rangle, \mathbf{w} = \langle -1, 4, -4 \rangle, \mathbf{z} = \langle -2, 0, 5 \rangle$:

(4A $4\mathbf{w} - 8\mathbf{z}$

(4B $3\mathbf{y} + 3\mathbf{z} - 6\mathbf{w}$







وكما في المتجهات ذات البُعدين، نجد الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1 , y_1 , z_1)$ ونقطة نهايته $B(x_2 , y_2 , z_2)$ ، وذلك بطرح إحداثيات نقطة البداية من إحداثيات نقطة النهاية.

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1 , y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$

وعندها يكون: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ ،

وهذا يعني أنه إذا كان: $\overrightarrow{AB} = \langle a_1 , a_2 , a_3 \rangle$ ، فإن:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

ويكون متجه الوحدة $\mathbf{u}$ باتجاه $\overrightarrow{AB}$ هو $\mathbf{u} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$



مثال ٥

التعبير عن المتجهات في الفضاء جبرياً

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A\,(1\,,-2\,,-4)$، ونقطة نهايته $B\,(3\,,6\,,-6)$، ثم أوجد متجه الوحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$.

الصورة الإحداثية لمتجه

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1\,,\, y_2 - y_1\,,\, z_2 - z_1 \rangle$$

$(x_1, y_1, z_1) = (-4, -2, 1)\,,\, (x_2, y_2, z_2) = (3, 6, -6)$

$$= \langle 3-(-4),\, 6-(-2),\, -6-1 \rangle = \langle 7, 8, -7 \rangle$$

وباستعمال الصورة الإحداثية، فإن طول $\overrightarrow{AB}$ هو :

$\overrightarrow{AB} = \langle 7, 8, -7 \rangle$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{7^2 + 8^2 + (-7)^2}$$
$$= 9\sqrt{2}$$

ويستعمل هذا الطول والصورة الإحداثية؛ لإيجاد متجه وحدة **u** باتجاه $\overrightarrow{AB}$ كما يأتي:

متجه وحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$

$$\mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$$

$\overrightarrow{AB} = \langle 7, 8, -7 \rangle\,,\, |\overrightarrow{AB}| = 9\sqrt{2}$

$$= \frac{\langle 7\,,8\,,-7 \rangle}{9\sqrt{2}} = \left\langle \frac{7\sqrt{2}}{18}\,,\, \frac{4\sqrt{2}}{9}\,,\, \frac{-7\sqrt{2}}{18} \right\rangle$$





أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overline{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته، ثم أوجد متجه الوحدة باتجاه $\overline{AB}$ في كلٍّ مما يأتي:

(5A $A(-2,-5,-5), B(-1,4,-2)$

(5B $A(-1,4,6), B(3,3,8)$



مسائل مهارات التفكير العليا

53) تحدٍّ: إذا كانت M هي نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين: $M_1(-1, 2, -5), M_2(3, 8, -1)$ ، فأوجد إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة M_1M.



مسائل مهارات التفكير العليا

54) **اكتب:** اذكر موقفًا يكون فيه استعمال النظام الإحداثي الثنائي الأبعاد أكثر منطقية، وآخر يكون فيه استعمال النظام الإحداثي الثلاثي الأبعاد أكثر منطقية.



لا يمكن للمرء أن يحصل على المعرفة إلا عندما يتعلم كيف يفكر



الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي في الفضاء

رياضيات ٦



فيما سبق:

درست الضرب الداخلي لمتجهين في المستوى .

الدرس (3-1)



الآن:

- أجدُ الضرب الداخلي لمتجهين، والزاوية بينهما في الفضاء .
- أجدُ الضرب الاتجاهي للمتجهات ، وأستعمله في إيجاد المساحات والحجوم.



المفردات:

الضرب الاتجاهي

cross product

متوازي السطوح

parallelepiped

الضرب القياسي الثلاثي

triple scalar product





لماذا ؟

يستعمل طارق المتجهات؛ ليتحقق ممَّا إذا كان خطَّا سير طائرتين متوازيين أم لا؛ وذلك بمعرفة إحداثيات نقطَتَي الإقلاع، ونقطتين تصلان إليهما بعد فترة زمنية معينة.

الضرب الداخلي في الفضاء إيجاد الضرب الداخلي لمتجهين في الفضاء يشبه إيجاده لمتجهين في المستوى، وكما هي الحال مع المتجهات في المستوى، يتعامد متجهان غير صفريين في الفضاء، إذا وفقط إذا كان حاصل ضربهما الداخلي صفرًا.

موضوع الدرس: الضرب الداخلي والضرب الإتجاهي في الفضاء



مفهوم أساسي

الضرب الداخلي والمتجهات المتعامدة في الفضاء

يُعَرَّف الضرب الداخلي للمتجهين: $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle , \mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ في الفضاء كالآتي:

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ ، ويكون المتجهان غير الصفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ متعامدين ، إذا وفقط إذا كان $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$



مثال 1 إيجاد الضرب الداخلي لتحديد المتجهات المتعامدة

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم حدِّد ما إذا كانا متعامدين أم لا:

(a $\mathbf{u} = \langle -7, 3, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 17, 5 \rangle$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -7(5) + 3(17) + (-3)(5)$$
$$= -35 + 51 + (-15) = 1$$

وبما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \neq 0$، فإن $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ غير متعامدين .

(b $\mathbf{u} = \langle 3, -3, 3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 7, 3 \rangle$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3(4) + (-3)(7) + 3(3)$$
$$= 12 + (-21) + 9 = 0$$

وبما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$، فإن $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ متعامدان.



تحقق من فهمك

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم حدِّد ما إذا كانا متعامدين أم لا:

1A) $\mathbf{u} = \langle 3, -5, 4 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 7, 5 \rangle$

1B) $\mathbf{u} = \langle 4, -2, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 3, -2 \rangle$

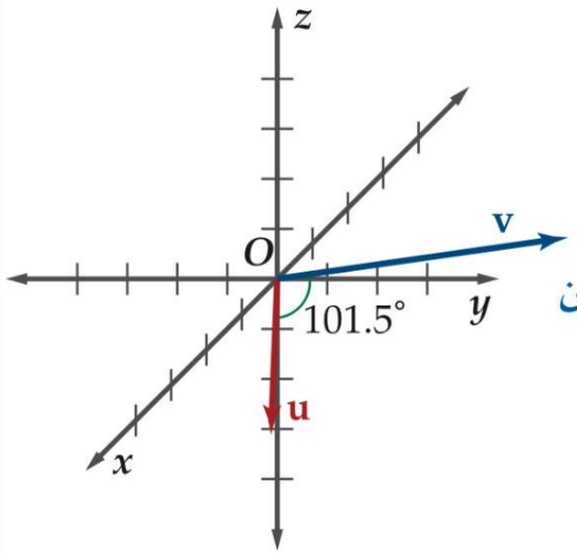


وكما هو في المتجهات في المستوى، إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ في الفضاء فإن $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$.



مثال 2 الزاوية بين متجهين في الفضاء

أوجد قياس الزاوية θ بين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ، إذا كان: $\mathbf{u} = \langle 3, 2, -1 \rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 3, -2 \rangle$ ، إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ.



الزاوية بين متجهين $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}$

$\mathbf{u} = \langle 3, 2, -1 \rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 3, -2 \rangle$ $\cos\theta = \dfrac{\langle 3, 2, -1 \rangle \cdot \langle -4, 3, -2 \rangle}{|\langle 3, 2, -1 \rangle|\,|\langle -4, 3, -2 \rangle|}$

أوجد الضرب الداخلي، وطول كلٍّ من المتجهين $\cos\theta = \dfrac{-4}{\sqrt{14}\sqrt{29}}$

بسّط وحُل بالنسبة إلى θ $\theta = \cos^{-1}\dfrac{-4}{\sqrt{406}} \approx 101.5°$

أي أن قياس الزاوية بين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ هو $101.5°$ تقريبًا.



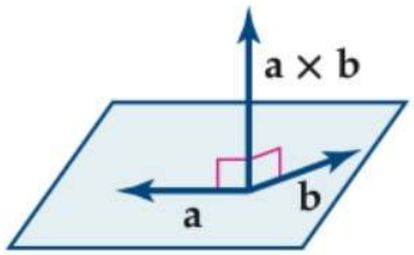
تحقق من فهمك

2) أوجد قياس الزاوية بين المتجهين: $\mathbf{u} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$ ، إلى أقرب منزلةٍ عشريةٍ.

موضوع الدرس: الضرب الداخلي والضرب الإتجاهي في الفضاء

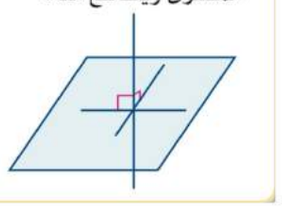


الضرب الاتجاهي هو نوع آخر من الضرب بين المتجهات في الفضاء، وبخلاف الضرب الداخلي، فإن **الضرب الاتجاهي** لمتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ هو متجه وليس عددًا، ويُرمز له بالرمز $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$، ويُقرأ $\mathbf{a}$ cross $\mathbf{b}$ ، ويكون المتجه $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ عموديًّا على المستوى الذي يحوي المتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.



إرشادات للدراسة

يكون المستقيم عموديًّا على مستوى، إذا كان عموديًّا على كل مستقيم يقع في هذا المستوى ويتقاطع معه.





مفهوم أساسي

الضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

إذا كان: $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}, \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ ، فإن الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$

هو المتجه: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$



مثال 3 إيجاد الضرب الاتجاهي لمتجهين

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين: $\mathbf{v} = \langle -3, 3, 1 \rangle$, $\mathbf{u} = \langle 3, -2, 1 \rangle$، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

$\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

قاعدة إيجاد قيمة محدّدة الدرجة الثالثة

$$= \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

أوجد قيمة محدّدة الدرجة الثانية

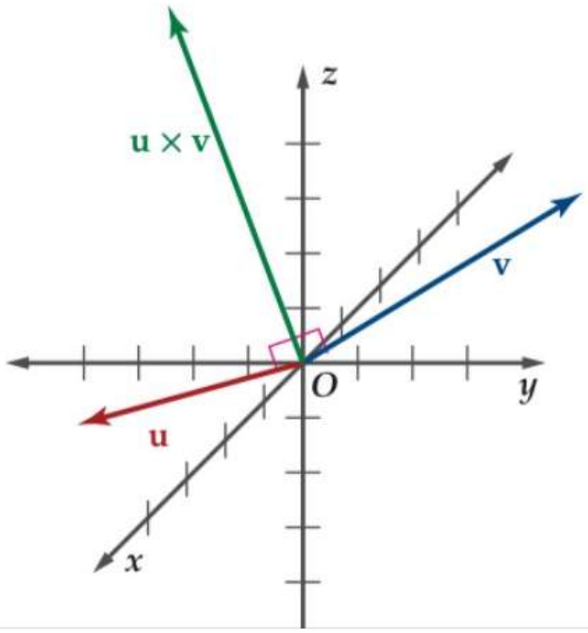
$$= (-2 - 3)\mathbf{i} - [3 - (-3)]\mathbf{j} + (9 - 6)\mathbf{k}$$

بسّط

$$= -5\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

الصورة الإحداثية

$$= \langle -5, -6, 3 \rangle$$



ولإثبات أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ جبريًّا، أوجد الضرب الداخلي لـ $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ مع كلٍّ من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$

$= \langle -5, -6, 3 \rangle \cdot \langle 3, -2, 1 \rangle$

$= -5(3) + (-6)(-2) + 3(1)$

$= -15 + 12 + 3 = 0$ ✔

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$

$= \langle -5, -6, 3 \rangle \cdot \langle -3, 3, 1 \rangle$

$= -5(-3) + (-6)(3) + 3(1)$

$= 15 + (-18) + 3 = 0$ ✔

بما أن حاصل الضرب الداخلي في الحالتين يساوي صفرًا، فإن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ عمودي على كلٍّ من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

تنبيه!

الضرب الاتجاهي

يطبق الضرب الاتجاهي على المتجهات في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد فقط، ولا يطبق على المتجهات في المستوى الإحداثي.



تحقق من فهمك

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ ممايأتي، ثم بيّن أن $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$:

(3A $\mathbf{u} = \langle 4, 2, -1 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 1, 4 \rangle$

(3B $\mathbf{u} = \langle -2, -1, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 1, 4 \rangle$



مـثال 4 مساحة متوازي أضلاعٍ في الفضاء

أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه: $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ضلعان متجاوران.

الخطوة 1 أوجد $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$

$\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

بإيجاد قيمة محدّدة الدرجة الثالثة

$$= \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

بإيجاد قيمة محدّدة الدرجة الثانية

$$= -3\mathbf{i} - 9\mathbf{j} - 14\mathbf{k}$$

الخطوة 2 أوجد طول $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$

طول متجه في الفضاء

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (-9)^2 + (-14)^2}$$

بسّط

$$= \sqrt{286} \approx 16.91$$

أي أن مساحة متوازي الأضلاع في الشكل 1.5.1 ، تساوي 16.91 وحدةً مربعةً تقريبًا.



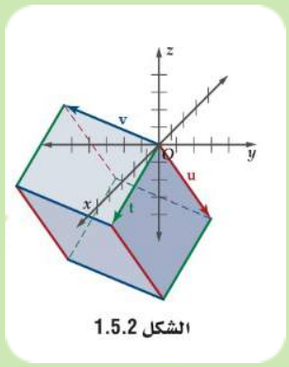
تحقق من فهمك

4) أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه: $\mathbf{u} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ضلعان متجاوران .

موضوع الدرس: الضرب الداخلي والضرب الإتجاهي في الفضاء



الضرب القياسي الثلاثي إذا التقت ثلاثة متجهات في مستويات مختلفة في نقطة البداية، فإنها تكوّن أحرفًا متجاورة لمتوازي سطوح، وهو عبارة عن مجسمٍ له ستة أوجهٍ، كل وجهٍ منها على شكل متوازي أضلاع كما في الشكل 1.5.2 أدناه، إن القيمة المطلقة **للضرب القياسي الثلاثي** لهذه المتجهات يُمثِّل حجم متوازي السطوح.



الشكل 1.5.2



مفهوم أساسي

الضرب القياسي الثلاثي

إذا كان: $\mathbf{t} = t_1\mathbf{i} + t_2\mathbf{j} + t_3\mathbf{k}, \mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}, \mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$،

فإن الضرب القياسي الثلاثي للمتجهات t, u, v يُعرف كالآتي $\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$



مثال 5 حجم متوازي السطوح

أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه: $\mathbf{t} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ أحرف متجاورة.

$\mathbf{t} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
$\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$
$\mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

$$\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

أوجد قيمة محدّدة المصفوفة من الرتبة 3×3

$$= \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}(4) - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}(-2) + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}(-2)$$

بسّط

$$= -12 + 18 + 28 = 34$$

أي أن حجم متوازي السطوح في الشكل **1.5.2** هو $|\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})|$ ، ويساوي 34 وحدةً مكعبةً.



تحقق من فهمك

5) أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه: $\mathbf{t} = 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}, \mathbf{u} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ أحرف متجاورة.



مسائل مهارات التفكير العليا

42) **تبرير:** حدّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا، أو غير صحيحة أبدًا، برِّر إجابتك .

«لأي متجهين غير صفريين وغير متوازيين، يوجد متجه عمودي على هذين المتجهين».



مسائل مهارات التفكير العليا

43) تحدٍّ: إذا كان: $\mathbf{u} = \langle 4, 6, c \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -3, -2, 5 \rangle$ ، فأوجد قيمة c التي تجعل: $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 34\mathbf{i} - 26\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$.



مسائل مهارات التفكير العليا

44) **تبرير:** فسِّر لماذا لا يمكن تعريف الضرب الاتجاهي في المستوى.



الفصل السادس:
الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة



يوم جميل وعزم يتجدد نحو تحقيق الطموحات والنجاحات بإذن الله

الفصل 2

الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة

التهيئة



فيماسبق :

درست القطوع المخروطية ومعادلاتها وتمثيلها بيانيًّا.



والآن :

- أُمثّلُ الإحداثيات القطبية بيانيًّا.
- أحولُ بين الإحداثيات والمعادلات الديكارتية والقطبية.
- أكتب الأعداد المركبة على الصورة القطبية والصورة الديكارتية وأحول بينهما.



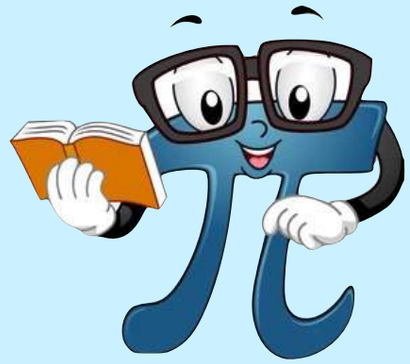
لماذا؟

تصاميم هندسية :

يمكن استعمال المعادلات القطبية في عمل تصاميم هندسية فمثلًا لوحة سهام تظهر عليها المواقع بوصفها أعدادًا مركبة على الصورتين القطبية والديكارتية. كما يمكن استعمالها لنمذجة أنماط الصوت التي تساعد على تحديد وضعية تجهيزات المسرح، مثل: السماعات ومكبرات الصوت، وتحديد قوة الصوت ومستوى التسجيل.







مراجعة المفردات

ضلع الابتداء للزاوية (Initial Side of an Angle)
الضلع المنطبق على المحور x عندما تكون الزاوية في الوضع القياسي.

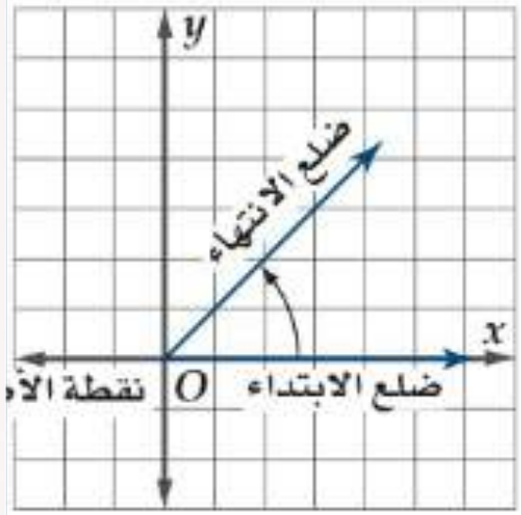
ضلع الانتهاء للزاوية (Terminal Side of an Angle)
الضلع الذي يدور حول نقطة الأصل عندما تكون الزاوية في الوضع القياسي.

قياس الزاوية (Measure of an Angle)
يكون قياس الزاوية موجبًا إذا دار ضلع الانتهاء عكس اتجاه عقارب الساعة، ويكون سالبًا إذا دار ضلع الانتهاء في اتجاه عقارب الساعة.

متطابقات المجموع والفرق
(Sum and Difference Identities)

- $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$
- $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
- $\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$
- $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

الزاوية في الوضع القياسي









اختبار سريع

ارسم كلًّا من الزاويتين المعطى قياسهما فيما يأتي في الوضع القياسي:

1) $200°$

2) $-45°$







اختبار سريع

أوجد زاوية بقياس موجب، وأخرى بقياس سالب مشتركتين في ضلع الانتهاء مع كل من الزوايا الآتية، ومثِّلهما في الوضع القياسي:

3) $165°$

4) $-10°$

5) $\frac{4\pi}{3}$

6) $-\frac{\pi}{4}$







اختبار سريع

حوِّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى درجات في كل مما يأتي:

7) $-60°$

8) $\frac{3\pi}{2}$







اختبار سريع

9) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\sin 15$ باستعمال متطابقة الفرق بين زاويتين.

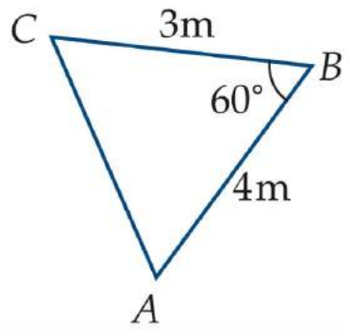






اختبار سريع

10) أوجد طول الضلع AC في المثلث المرسوم أدناه (قرِّب إلى أقرب جزء من عشرة).









صباح الخير ليومنا الجديد، للأماني التي استيقظَت، ولكل من سيُضيف لمسةَ جمالٍ ليومنا هذا 💛🌿

الاحداثيات القطبية

رياضيات ٦





موضوع الدرس : الاحداثيات القطبية

فيما سبق

درست الزوايا الموجبة والسالبة ورسمتها في الوضع القياسي. (مهارة سابقة)

والآن

- أمثِّل نقاطًا بالإحداثيات القطبية.
- أُمثِّل بيانيًّا معادلات قطبية بسيطة.

المفردات

نظام الإحداثيات القطبية	polar coordinate system
القطب	pole
المحور القطبي	polar axis
الإحداثيات القطبية	polar coordinates
المعادلة القطبية	polar equation
التمثيل القطبي	polar graph





موضوع الدرس : الاحداثيات القطبية

لماذا



يَستعملُ مراقبو الحركة الجوية أنظمةَ رادار حديثة لتوجيه مسار الطائرات، والحصول على مسارات ورحلات جوية آمنة. وهذا يضمن بقاء الطائرة على مسافة آمنة من الطائرات الأخرى، والتضاريس الأرضية. ويستعمل الرادار قياسات الزوايا والمسافات المتجهة؛ لتمثيل موقع الطائرة. ويقوم المراقبون بتبادل هذه المعلومات مع الطيارين.





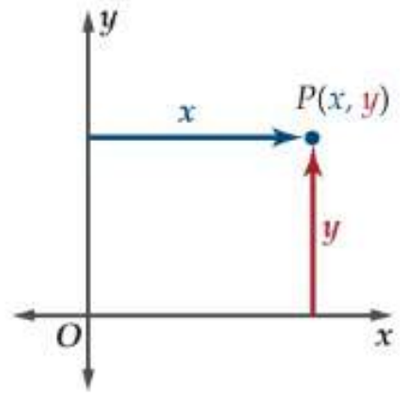
موضوع الدرس : الاحداثيات القطبية



تمثيل الإحداثيات القطبيّة لقد تعلمتَ التمثيلَ البياني لمعادلات معطاة في نظام الإحداثيات الديكارتيّة (المستوى الإحداثي). وعندما يحدد مراقبو الحركة الجوية موقع الطائرة باستعمال المسافات والزوايا، فإنهم يستعملون **نظام الإحداثيات القطبية** (المستوى القطبي).

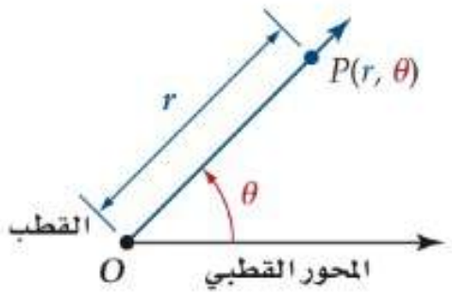
في نظام الإحداثيات الديكارتية، المحوران x , y هما المحوران الأفقي والرأسي على الترتيب، وتُسمَّى نقطة تقاطعهما نقطة الأصل، ويرمز لها بالحرف O. ويُعيَّنُ موقع النقطة P بالإحداثيات الديكارتية من خلال زوج مرتب (x, y)، حيث x , y المسافتان المتّجهتان الأفقية، والرأسية على الترتيب من المحورين إلى النقطة. فمثلًا، تقع النقطة $(1, \sqrt{3})$ على بُعد وحدة وحدة إلى يمين المحور y، وعلى بُعد $\sqrt{3}$ وحدة إلى أعلى المحور x.

نظام الإحداثيات الديكارتية



في نظام الإحداثيات القطبية، نقطة الأصل O نقطة ثابتة تُسمى **القطب**. و**المحور القطبي** هو نصف مستقيم يمتد أفقيًّا من القطب إلى اليمين. يمكن تعيين موقع نقطة P في نظام الإحداثيات القطبية باستعمال **الإحداثيات** (r, θ) ، حيث r المسافة المتّجهة (أي تتضمن قيمةً واتجاهًا، فمن الممكن أن تكون r سالبة) من القطب إلى النقطة P ، و θ الزاوية المتّجهة (أي تتضمن قيمةً واتجاهًا) من المحور القطبيّ إلى $\overrightarrow{OP}$.

نظام الإحداثيات القطبية



القياس الموجب للزاوية θ يعني دورانًا بعكس اتجاه عقارب الساعة بدءًا من المحور القطبي، في حين يعني القياس السالب دورانًا باتجاه عقارب الساعة، ولتمثيل النقطة P بالإحداثيات القطبيّة، فإن P تقع على ضلع الانتهاء للزاوية θ إذا كانت r موجبة. أما إذا كانت سالبة، فإن P تقع على نصف المستقيم المقابل (الامتداد) لضلع الانتهاء للزاوية θ .





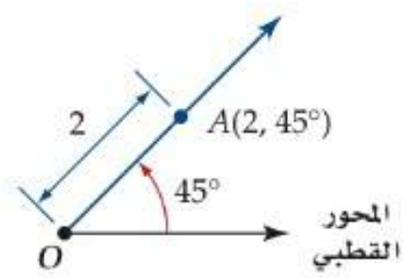
مثال ١

تمثيل الإحداثيات القطبية

مثّل كل نقطة من النقاط الآتية في المستوى القطبي:

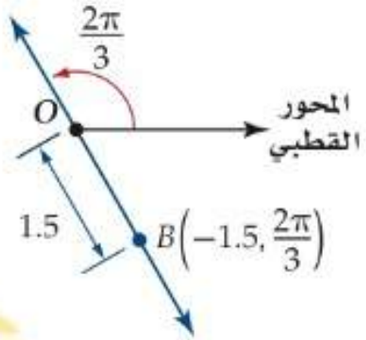
(a $A(2, 45°)$

بما أن $\theta = 45°$ ، فارسم ضلع الانتهاء للزاوية $45°$ ، بحيث يكون المحور القطبي هو ضلع الابتداء لها، ولأن $r = 2$ ، لذا عيِّن نقطةً A تبعُد وحدتين عن القطب على ضلع الانتهاء للزاوية $45°$ ، كما في الشكل المجاور.



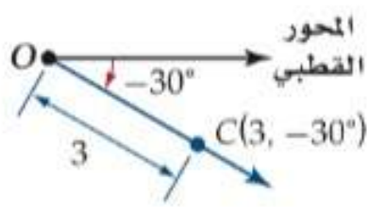
(b $B\left(-1.5, \frac{2\pi}{3}\right)$

بما أن $\theta = \frac{2\pi}{3}$، لذا ارسم ضلع الانتهاء للزاوية $\frac{2\pi}{3}$ ، بحيث يكون المحور القطبي هو ضلع الابتداء لها، ولأن r سالبة، لذا مُدَّ ضلع الانتهاء في الاتجاه المقابل، وعيِّن نقطةً B تبعُد 1.5 وحدة عن القطب على امتداد ضلع الانتهاء، كما في الشكل المجاور.



(c $C(3, -30°)$

بما أن $\theta = -30°$ ، لذا ارسم ضلع الانتهاء للزاوية $-30°$ ، بحيث يكون المحور القطبي هو ضلع الابتداء لها، ولأن $r = 3$ ، لذا عيِّن نقطةً C تبعُد 3 وحدات عن القطب على ضلع الانتهاء للزاوية، كما في الشكل المجاور.







تحقق من فهمك:

مثّل كل نقطة من النقاط الآتية:

1A $D\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$

1B $E(2.5, 240°)$

1C $F\left(4, -\frac{5\pi}{6}\right)$





موضوع الدرس : الاحداثيات القطبية

تُعيَّن الإحداثيات القطبية في المستوى القطبي الذي يتخذ شكلًا دائريًّا، كما تُعيَّنُ الإحداثيات الديكارتية في المستوى الإحداثي الذي يتخذ شكلًا مستطيلًا.







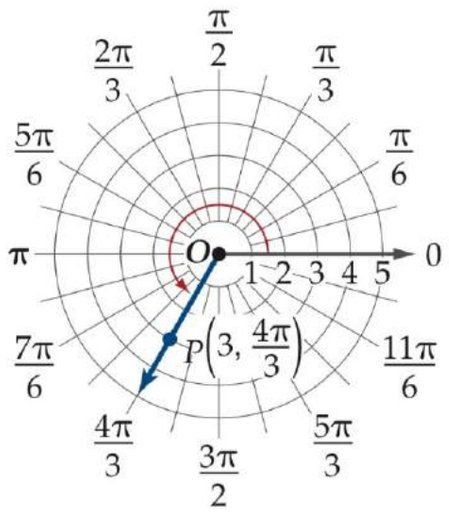
مثال ٢

تمثيل التقاط في المستوى القطبي

مثّل كلًّا من النقاط الآتية في المستوى القطبي:

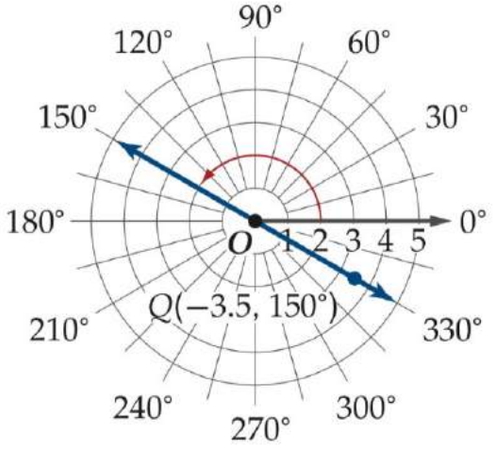
(a $P\left(3, \frac{4\pi}{3}\right)$

بما أن $\theta = \frac{4\pi}{3}$ ، لذا ارسم ضلع الانتهاء للزاوية $\frac{4\pi}{3}$ ، بحيث يكون المحور القطبي هو ضلع الابتداء لها، ولأن $r = 3$ ، لذا عيِّن نقطةً P تبعُد 3 وحدات عن القطب على ضلع الانتهاء للزاوية، كما في الشكل المجاور.



(b $Q(-3.5, 150°)$

بما أن $\theta = 150°$ ، لذا ارسم ضلع الانتهاء للزاوية $150°$ ، بحيث يكون المحور القطبي ضلع الابتداء لها، ولأن r سالبة، لذا مُدَّ ضلع الانتهاء للزاوية في الاتجاه المقابل، وعيِّن نقطةً Q تبعد 3.5 وحدات عن القطب على امتداد ضلع الانتهاء للزاوية، كما في الشكل المجاور.







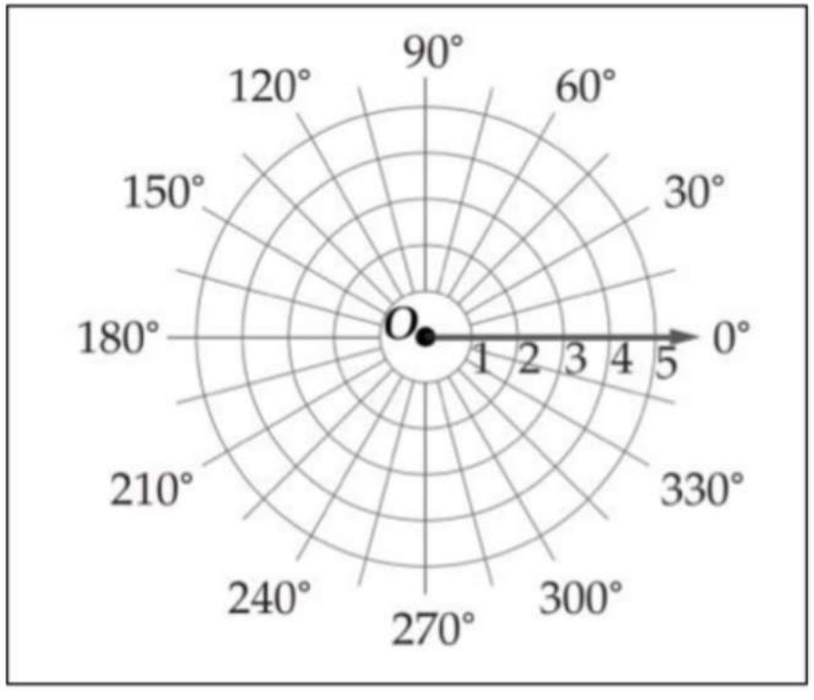
موضوع الدرس : الاحداثيات القطبية

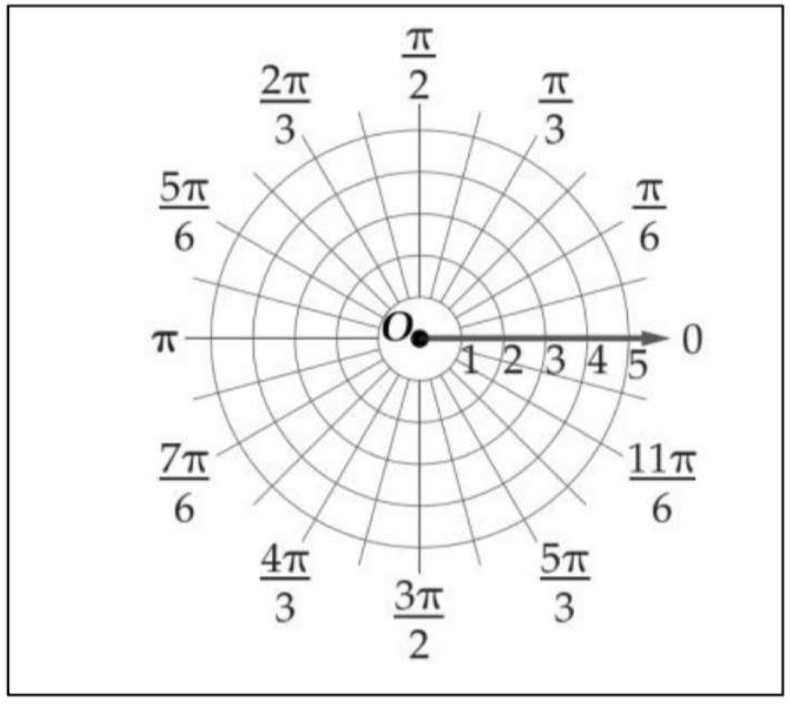
تحقق من فهمك:

مثِّل كلًّا من النقاط الآتية في المستوى القطبي:

(2A $R\left(1.5, -\frac{7\pi}{6}\right)$

(2B $S(-2, -135°)$





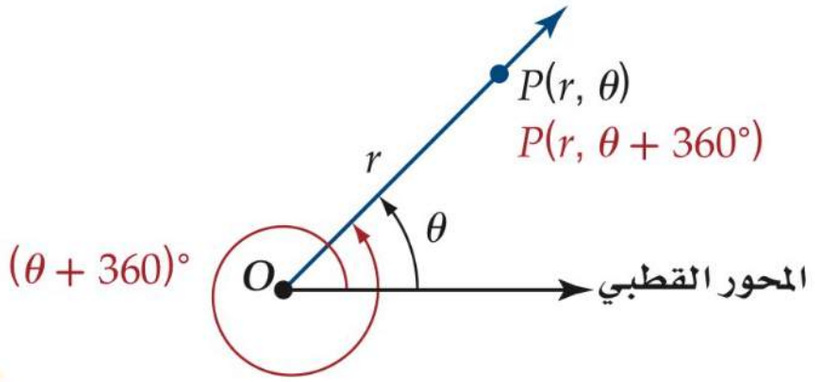


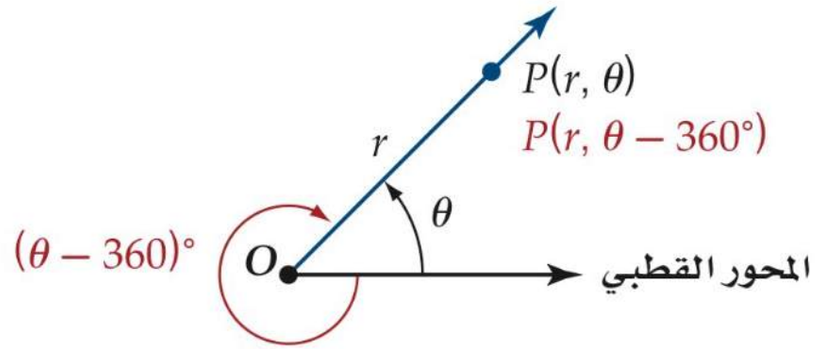


موضوع الدرس : الاحداثيات القطبية

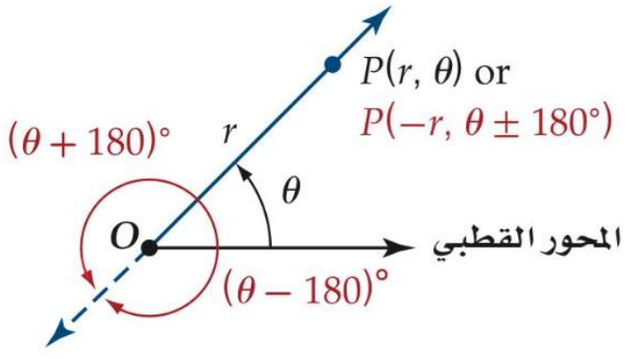
في نظام الإحداثيات الديكارتية كل نقطة يُعبَّر عنها بزوج وحيد من الإحداثيات (x, y). إلا أن هذا لا ينطبق على نظام الإحداثيات القطبية؛ وذلك لأن قياس كل زاوية يُكتب بعدد لانهائي من الطرائق؛ وعليه فإن للنقطة (r, θ) الإحداثيات $(r, \theta \pm 360°)$ أو $(r, \theta \pm 2\pi)$ أيضًا كما هو مبيّن أدناه.







وكذلك لأن r مسافة متجهة، فإن (r, θ) و $(-r, \theta \pm 180°)$ ، أو $(-r, \theta \pm \pi)$ تمثِّل النقطة نفسها، كما في الشكل المجاور.



وبصورة عامة، إذا كان n عددًا صحيحًا، فإنه يمكن تمثيل النقطة (r, θ) بالإحداثيات $(r, \theta + 360°n)$ أو $(-r, \theta + (2n + 1)180°)$. وبالمثل، إذا كانت θ مقيسة بالراديان، وكان n عددًا صحيحًا، فإنه يمكن تمثيل النقطة (r, θ) بالإحداثيات $(r, \theta + 2n\pi)$ أو $(-r, \theta + (2n + 1)\pi)$.

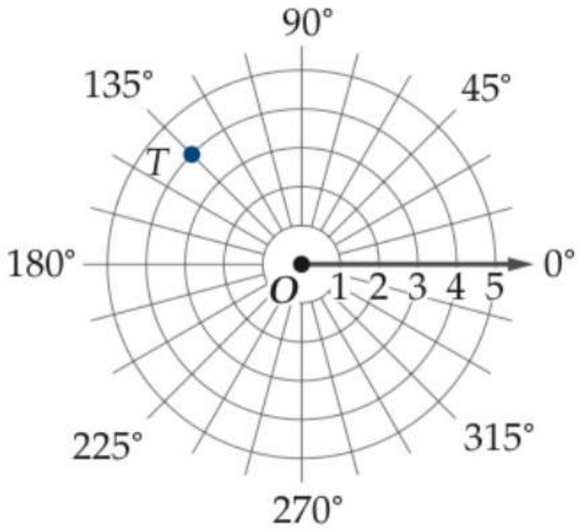




مثال ٣

تمثيلات قطبية متعددة

إذا كانت $360° \le \theta \le -360°$ ، فأوجد أربعة أزواج مختلفة كل منها يمثّل إحداثيين قطبيين للنقطة T في الشكل المجاور.



أحد الأزواج القطبية التي تمثِّل النقطة T هو $(4, 135°)$.
وفيما يأتي الأزواج الثلاثة الأخرى:

اطرح $360°$ من θ

$$(4, 135°) = (4, 135° - 360°)$$
$$= (4, -225°)$$

ضع $-r$ بدلًا من r ، وأضف $180°$ إلى θ

$$(4, 135°) = (-4, 135° + 180°)$$
$$= (-4, 315°)$$

ضع $-r$ بدلًا من r ، واطرح $180°$ من θ

$$(4, 135°) = (-4, 135° - 180°)$$
$$= (-4, -45°)$$





تحقق من فهمك:

أوجد ثلاثة أزواج مختلفة كل منها يمثّل إحداثيين قطبيين للنقطة المعطاة، علمًا بأن: $-360° \le \theta \le 360°$ ، أو $-2\pi \le \theta \le 2\pi$.

(3A $(5, 240°)$

(3B $\left(-2, \frac{\pi}{6}\right)$





التمثيل البياني للمعادلات القطبية تُسمى المعادلة المعطاة بدلالة الإحداثيات القطبية **معادلةً قطبيةً**. فمثلًا : $r = 2 \sin \theta$ هي معادلة قطبية. **التمثيل القطبي** هو مجموعة كل النقاط (r, θ) التي تحقق إحداثياتها المعادلة القطبية.

لقد تعلمت سابقًا كيفية تمثيل المعادلات في نظام الإحداثيات الديكارتية (في المستوى الإحداثي). ويُعدُّ تمثيل المعادلات مثل $x = a$ ، و $y = b$ أساسيًّا في نظام الإحداثيات الديكارتية. وبالمثل فإن التمثيل البياني لمعادلات قطبية مثل $r = k$ ، و $\theta = h$ ، حيث k, h عددان حقيقيان، يُعَدُّ أساسيًّا في نظام الإحداثيات القطبية.







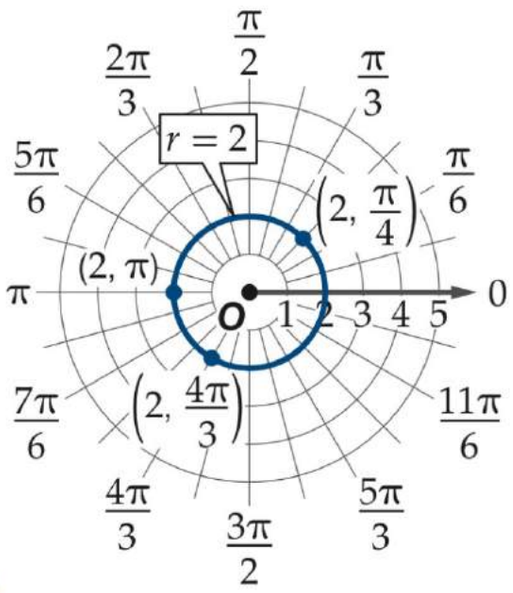
مثال ٤ التمثيل البياني التمثيلات القطبية

مَثِّل كل معادلة من المعادلات القطبية الآتية بيانيًّا:

(a $r = 2$

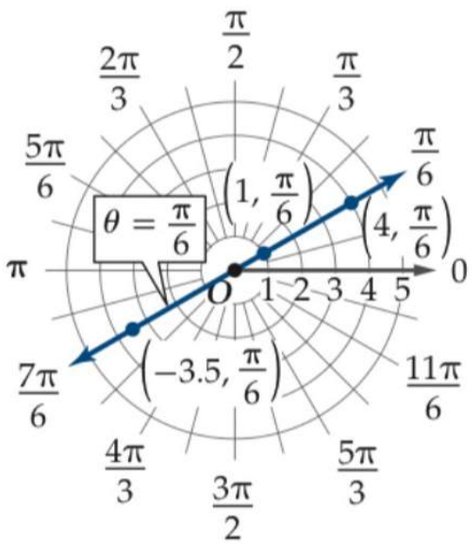
تتكون حلول المعادلة $r = 2$ من جميع النقاط على الصورة $(2, \theta)$، حيث θ أي عدد حقيقي فمثلًا تعد النقاط $(2, \frac{4\pi}{3})$, $(2, \pi)$, $(2, \frac{\pi}{4})$ حلولًا لها.

يتكون التمثيل البياني من جميع النقاط التي تبعُد 2 وحدة عن القطب. وعليه فإن المنحنى هو دائرة مركزها نقطة الأصل (القطب) ، وطول نصف قطرها 2 كما في الشكل المجاور.



(b $\theta = \frac{\pi}{6}$

تتكوّن حلول المعادلة $\theta = \frac{\pi}{6}$ من جميع النقاط $(r, \frac{\pi}{6})$، حيث r أي عدد حقيقي مثل النقاط $(-3.5, \frac{\pi}{6})$, $(4, \frac{\pi}{6})$, $(1, \frac{\pi}{6})$ ؛ وعليه فإن التمثيل البياني عبارة عن جميع النقاط الواقعة على المستقيم الذي يصنع زاوية $\frac{\pi}{6}$ مع المحور القطبي.







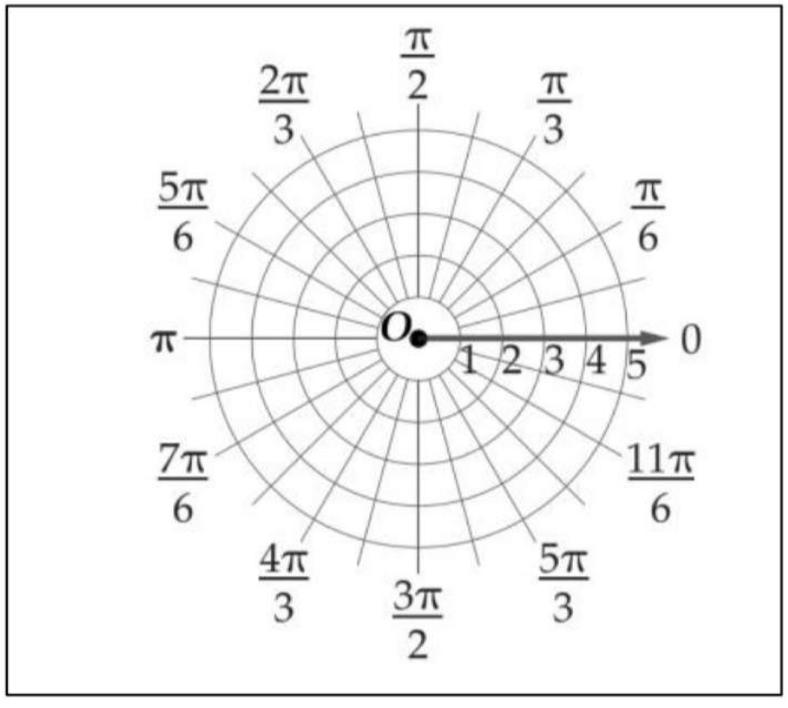
موضوع الدرس : الاحداثيات القطبية

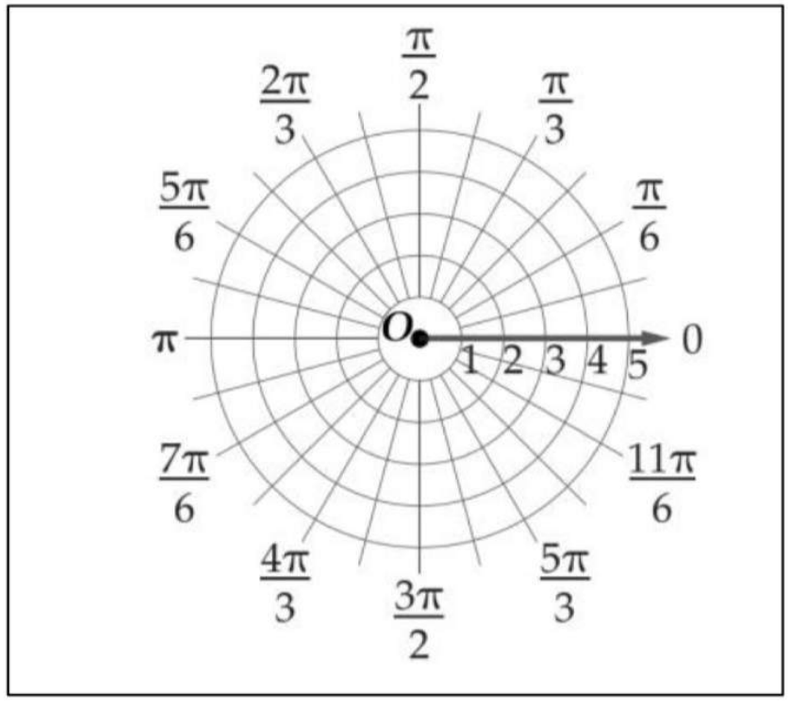
تحقق من فهمك:

مَثِّل كل معادلة من المعادلات القطبية الآتية بيانيًّا:

(4A $r = 3$

(4B $\theta = \frac{2\pi}{3}$









موضوع الدرس : الاحداثيات القطبية

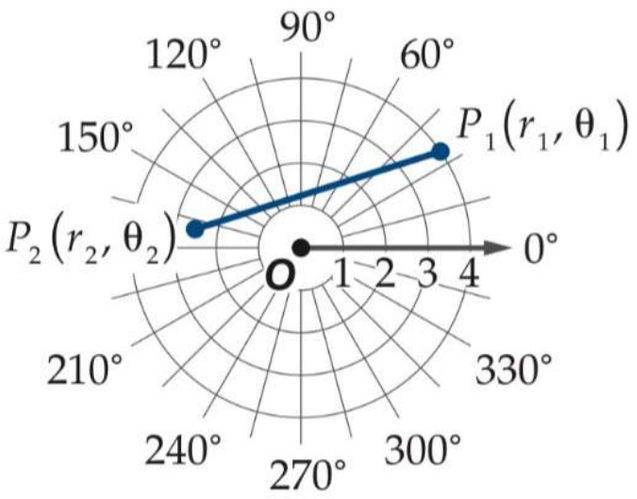
يمكنُ إيجاد المسافة بين نقطتين في المستوى القطبي باستعمال الصيغة الآتية.

مفهوم أساسي

المسافة بالصيغة القطبية

افترض أن $P_1(r_1, \theta_1)$, $P_2(r_2, \theta_2)$ نقطتان في المستوى القطبي، تُعطى المسافة P_1P_2 ، بالصيغة:

$$P_1P_2 = \sqrt{{r_1}^2 + {r_2}^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$$









مثال ٥ ايجاد المسافة باستعمال الصيغة القطبية

حركة جوية : يتابع مراقبُ الحركة الجوية طائرتين تطيران على الارتفاع نفسه، حيث إحداثيات موقعي الطائرتين هما $B(6, 345°)$, $A(5, 310°)$ ، وتقاس المسافة المتجهة بالأميال.

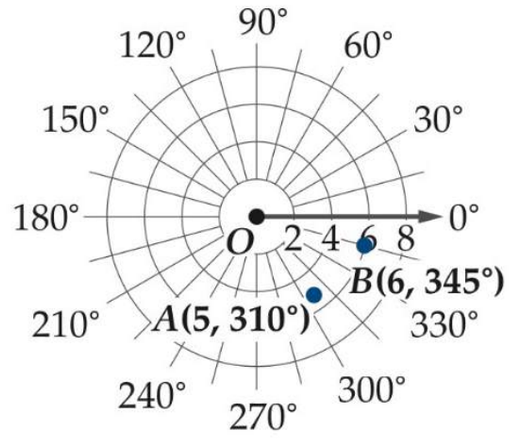
a) مثِّل هذا الموقف في المستوى القطبي.

تقع الطائرة A على بُعد 5 mi من القطب، وعلى ضلع الانتهاء لزاوية قياسها $310°$ ، في حين تقع الطائرة B على بُعد 6 mi من القطب، وعلى ضلع الانتهاء لزاوية قياسها $345°$ ، كما في الشكل المجاور.



الربط مع الحياة

لقد طوّرت ألمانيا جهاز رادار عام 1936 يستطيع رصد الطائرات ضمن دائرة نصف قطرها 80 mi .



b) إذا كانت تعليمات الطيران تتطلب أن تكون المسافة بين الطائرتين أكثر من 3 mi ، فهل تخالف هاتان الطائرتان هذه التعليمات؟ وَضِّح إجابتك.

باستعمال الصيغة القطبية للمسافة، فإن.

المسافة بالصيغة القطبية

$$AB = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

$(r_1, \theta_1) = (5, 310°)$, $(r_2, \theta_2) = (6, 345°)$

$$= \sqrt{5^2 + 6^2 - 2(5)(6)\cos(345° - 310°)} \approx 3.44$$

أي أن المسافة بين الطائرتين 3.44 mi تقريبًا؛ وعليه فإنهما لا تخالفان تعليمات الطيران.





تحقق من فهمك:

5) قوارب: يرصُد رادار بحري حركة قاربين، إذا كانت إحداثيات موقعي القاربين $(3, 65°)$, $(8, 150°)$ ، حيث r بالأميال.

5A) فمثّل هذا الموقف في المستوى القطبي.

5B) ما المسافة بين القاربين؟





مسائل مهارات التفكير العليا

54) تبرير: وضّح لماذا لا يكون ترتيب النقاط في معادلة المسافة القطبية مهمًّا، أو بعبارة أخرى، لماذا يمكنك اختيار أي نقطة لتكون P_1 ، والنقطة الأخرى لتكون P_2؟





مسائل مهارات التفكير العليا

56) برهان: أثبت أن المسافة بين النقطتين $P_1(r_1, \theta_1), P_2(r_2, \theta_2)$ هي $P_1P_2 = \sqrt{{r_1}^2 + {r_2}^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$.

(**إرشاد:** استعمل قانون جيوب التمام).





مسائل مهارات التفكير العليا

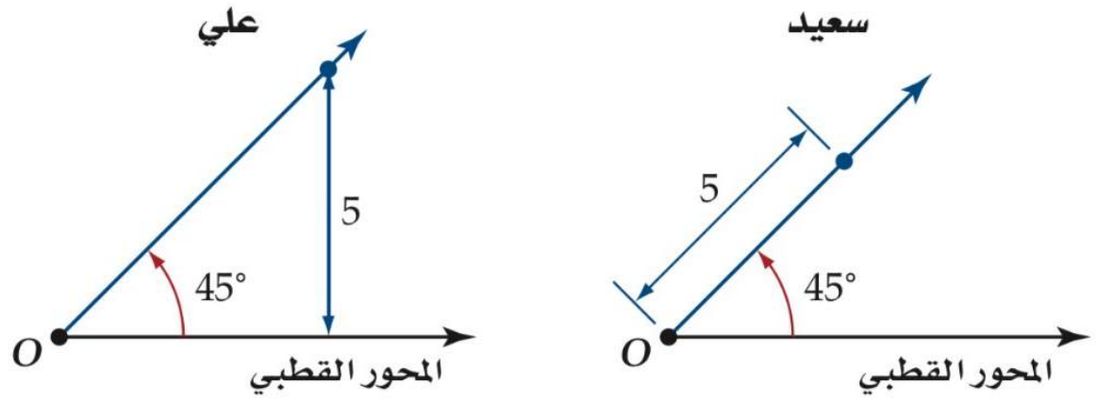
57) تبرير: وضّح ماذا يحدث لمعادلة المسافة المعطاة بالصيغة القطبية عندما يكون $\theta_2 - \theta_1 = \frac{\pi}{2}$. فسِّر هذا التغيّر.





مسائل مهارات التفكير العليا

58) اكتشف الخطأ: قام كل من سعيد وعلي بتمثيل النقطة $(5, 45°)$ في المستوى القطبي كما هو مبيّن أدناه. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ بَرِّر إجابتك.





الوقت هو السر الخفي وراء كل نجاح ربي وقتكِ جيداً



فيما سبق

درستُ تمثيل النقاط وبعض المعادلات القطبية.

(الدرس 1 – 2)

والآن

- أحوّلُ بين الإحداثيات القطبية والديكارتية.
- أحوّلُ المعادلات من الصورة القطبية إلى الصورة الديكارتية والعكس.





يبعث مِجَس مُثبت إلى رجلٍ آلي أمواجًا فوق صوتية على شكل دوائر كاملة، وعندما تصطدم الأمواج بجسم، فإنَّ المجس يستقبل إشارة، ويقوم بحساب بُعد الجسم عن مقدمة الرجل الآلي بدلالة المسافة المتجهة r ، والزاوية المتجهة θ . ويوصل المجس هذه الإحداثيات القطبية إلى الرَّجل الآلي الّذي يحولها إلى الإحداثيات الديكارتية؛ ليتمكن من تعيينها على خريطة داخلية.

موضوع الدرس : الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات



الإحداثيات القطبية والديكارتية يمكن كتابة إحداثيات النقطة $P(x, y)$ الواقعة على دائرة الوحدة، والمقابلة لزاوية θ على الصورة $P(\cos\theta, \sin\theta)$ ؛ لأن

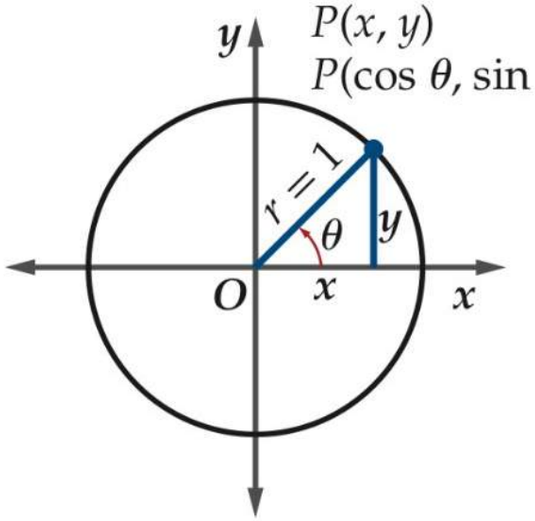
$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y \quad , \quad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$$

فإذا كان طول نصف قطر دائرة عددًا حقيقيًّا r بدلًا من 1، فإنه يمكننا كتابة النقطة $P(x, y)$ بدلالة θ , r على النحو الآتي:

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \quad , \quad \cos\theta = \frac{x}{r}$$

اضرب في r

$$r\sin\theta = y \quad , \quad r\cos\theta = x$$



وإذا نظرنا للمستوى الديكارتي على أنه مستوى قطبي، بحيث ينطبق المحور القطبي على الجزء الموجب من المحور x، والقطب على نقطة الأصل، فإنه يصبح لدينا وسيلة لتحويل الإحداثيّات القطبية إلى الإحداثيّات الديكارتيّة.



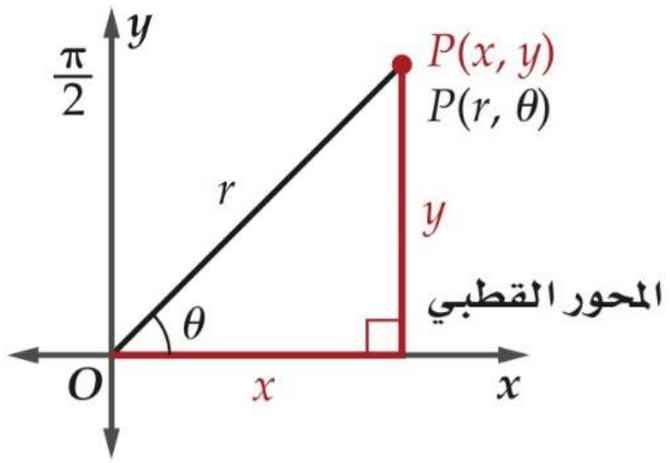
مفهوم أساسي

تحويل الإحداثيات القطبية إلى الإحداثيات الديكارتية

إذا كان للنقطة P الإحداثيات القطبية (r, θ) ، فإن الإحداثيات الديكارتية (x, y) للنقطة P هي:

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$$

أي أن $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.





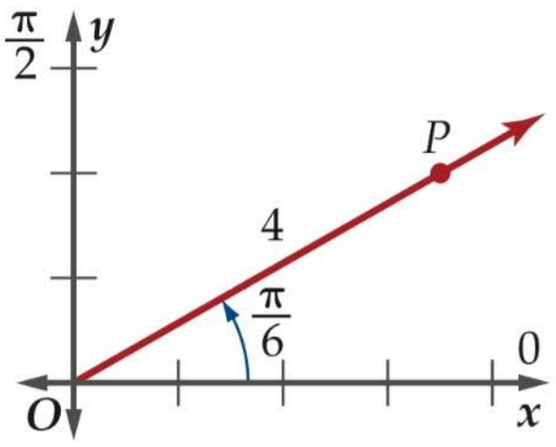
مثال ١: تحويل الإحداثيات القطبية إلى الإحداثيات الديكارتية

حوّل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية، لكلٍّ نقطة مما يأتي:

(a $P\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$

بما أن إحداثيات النقطة $(r, \theta) = \left(4, \frac{\pi}{6}\right)$ ، فإن $r = 4, \theta = \frac{\pi}{6}$.

$y = r \sin \theta$	صيغ التحويل	$x = r \cos \theta$
$= 4 \sin \frac{\pi}{6}$	$r = 4, \theta = \frac{\pi}{6}$	$= 4 \cos \frac{\pi}{6}$
$= 4\left(\frac{1}{2}\right)$	بسّط	$= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$= 2$		$= 2\sqrt{3}$



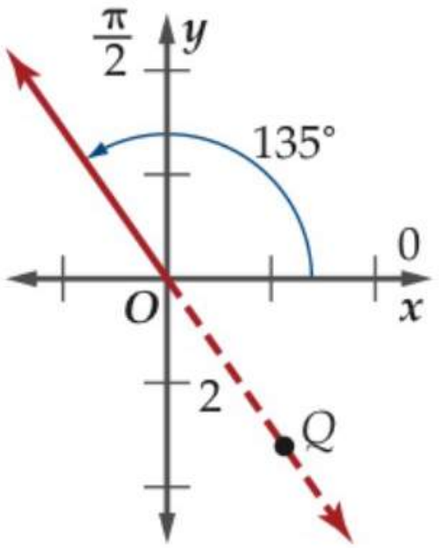
أي أن الإحداثيات الديكارتية للنقطة P هي $(2\sqrt{3}, 2)$ أو $(3.46, 2)$ تقريبًا كما في الشكل أعلاه.



مثال ١: تحويل الإحداثيات القطبية إلى الإحداثيات الديكارتية

(b $Q(-2, 135°)$

بما أن إحداثيات النقطة $(r, \theta) = (-2, 135°)$، فإن $r = -2, \theta = 135°$.



صيغ التحويل

$x = r\cos\theta$ $\qquad$ $y = r\sin\theta$

$= -2\cos 135°$ $\qquad$ $r = -2, \theta = 135°$ $\qquad$ $= -2\sin 135°$

$= -2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$ $\qquad$ بسّط $\qquad$ $= -2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$

أي أن الإحداثيات الديكارتية للنقطة Q هي $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ أو $(1.41, -1.41)$ تقريبًا كما في الشكل أعلاه.



مثال ١: تحويل الإحداثيات القطبية إلى الإحداثيات الديكارتية

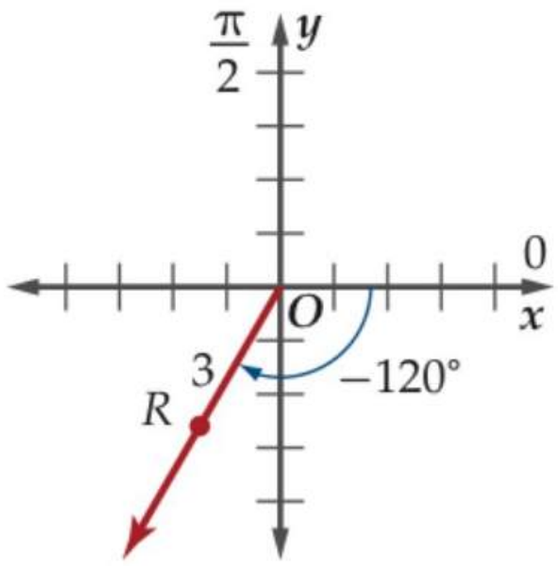
(c $V(3, -120°)$

بما أن إحداثيات النقطة $(r, \theta) = (3, -120°)$، فإن $r = 3, \theta = -120°$

صيغ التحويل $x = r\cos\theta$ $y = r\sin\theta$

$= 3(\cos -120°)$ $= 3\sin(-120°)$

بسّط $= 3\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$ $= 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$



أي أن الإحداثيات الديكارتية للنقطة V هي $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ أو $(-1.5, -2.6)$ تقريبًا كما في الشكل أعلاه.



تحقق من فهمك

حوِّل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية، لكل نقطة مما يأتي:

1A) $R(-6, -120°)$ **1B)** $S\left(5, \frac{\pi}{3}\right)$ **1C)** $T(-3, 45°)$

موضوع الدرس : الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات



ولكتابة زوج الإحداثيات الديكارتية بالصيغة القطبية، فإنك بحاجة إلى إيجاد المسافة المتجهة r من النقطة (x, y) إلى نقطة الأصل أو القطب، و قياس الزاوية المتجهة التي يصنعها r مع الجزء الموجب من المحور x أو المحور القطبيّ.

استعمل نظرية فيثاغورس؛ لإيجاد المسافة r من النقطة (x, y) إلى نقطة الأصل.

نظرية فيثاغورس $r^2 = x^2 + y^2$

خُذ الجذر التربيعي الموجب للطرفين $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

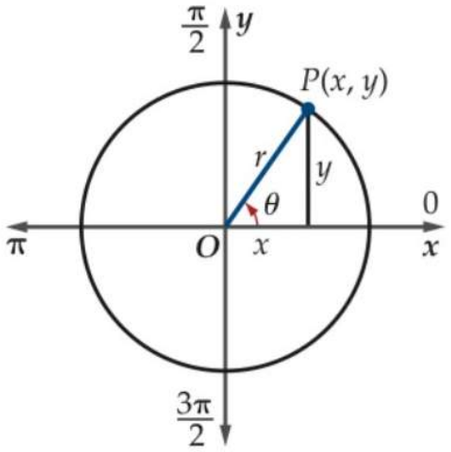
ترتبط الزاوية θ بكل من x, y من خلال دالة الظل، ولإيجاد الزاوية θ:

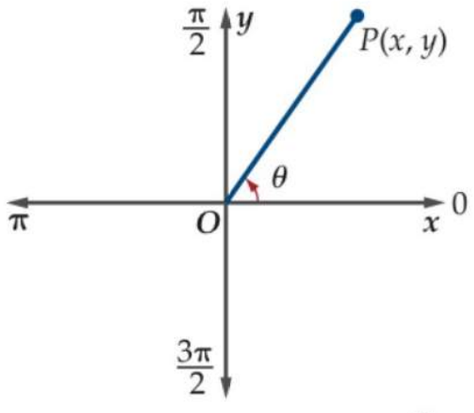
تعريف الظل $\tan\theta = \frac{y}{x}$

دالة معكوس الظل $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$

تذكّر أن الدالة العكسيّة للظل معرّفة فقط على الفترة $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ أو $(-90°, 90°)$ في نظام الإحداثيات الديكارتية.

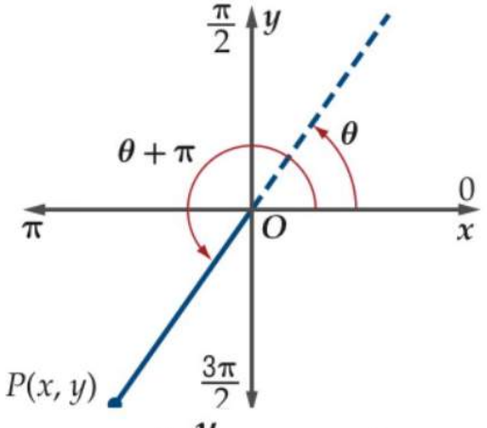
وتُعطى قيم θ الواقعة في الربع الأول أو الرابع، أي عندما تكون $x > 0$، كما في الشكل 2.2.1 . وإذا كانت $x < 0$، فإن الزاوية تقع في الربع الثاني أو الثالث، لذا عليك إضافة π أو $180°$ (طول الدورة للدالة $y = \tan x$) إلى قياس الزاوية المعطاة بالدالة العكسيّة للظل كما في الشكل 2.2.2 .





$x > 0$ عندما $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$

الشكل 2.2.1



$x < 0$ عندما $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x} + 180°$ أو $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x} + \pi$

الشكل 2.2.2

إرشادات للدراسة

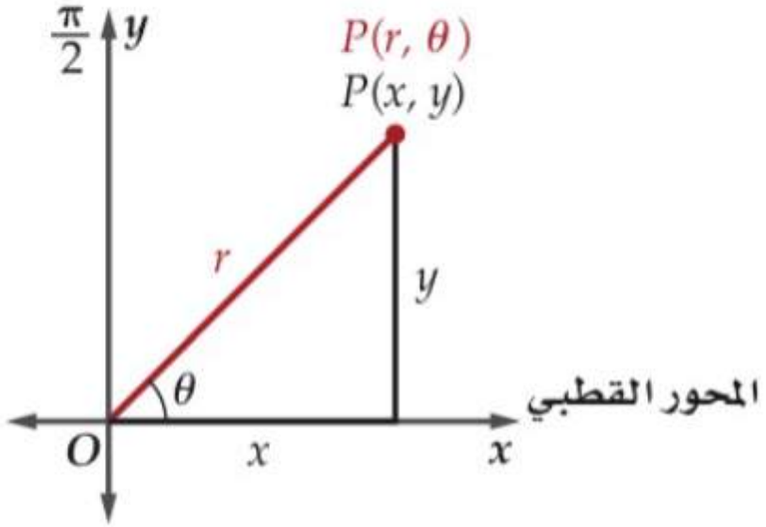
تحويل الإحداثيات

إن العملية المتبعة لتحويل الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية هي ذاتُها العملية المتبعة في إيجاد طول المتجه واتجاهه.



مفهوم أساسي

تحويل الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية



إذا كان للنقطة P الإحداثيات الديكارتية (x, y) ، فإن الإحداثيات القطبية للنقطة P هي (r, θ) حيث:

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$ عندما $x > 0$

وعندما $x < 0$ فإن:

$$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x} + \pi$$

أو $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x} + 180°$.

وعندما $x = 0$ فإن: $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، $r = y$ إذا كانت $y > 0$

أو $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ، $r = y$ إذا كانت $y < 0$



مثال ٢: تحويل الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية

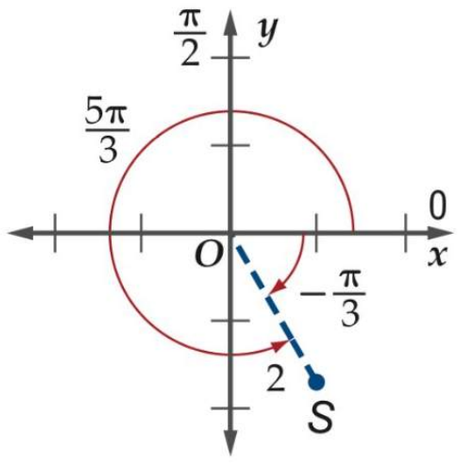
أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثّل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيّات الديكارتيّة في كلٍّ مما يأتي:

a) $S\left(1, -\sqrt{3}\right)$

بما أن إحداثيات النقطة $(x, y) = (1, -\sqrt{3})$، فإن $x = 1, y = -\sqrt{3}$.

ولأن $x > 0$، لذا استعمل الصيغة $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$ ؛ لإيجاد الزاوية θ .

$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$	صيغ التحويل	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
$= \text{Tan}^{-1}\frac{-\sqrt{3}}{1}$	$x = 1, y = -\sqrt{3}$	$= \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}$
$= -\frac{\pi}{3}$	بسّط	$= \sqrt{4} = 2$



أي أن $\left(2, -\frac{\pi}{3}\right)$ زوج من الإحداثيات القطبية للنقطة S.

ويمكن إيجاد زوج آخر باستعمال قيمة موجبة لـ θ ، وذلك بإضافة 2π .

فيكون $\left(2, -\frac{\pi}{3} + 2\pi\right)$ أو $\left(2, \frac{5\pi}{3}\right)$ ، كما في الشكل المجاور.



مثال ٢: تحويل الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية

فيكون $\left(2, -\frac{\pi}{3} + 2\pi\right)$ أو $\left(2, \frac{5\pi}{3}\right)$، كما في الشكل المجاور.

b $T(-3, 6)$

بما أن إحداثيات النقطة $(x, y) = (-3, 6)$، فإن $x = -3, y = 6$.

ولأن $x < 0$، لذا استعمل الصيغة $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x} + 180°$ ؛ لإيجاد الزاوية θ

$$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x} + 180° \qquad \text{صيغ التحويل}$$

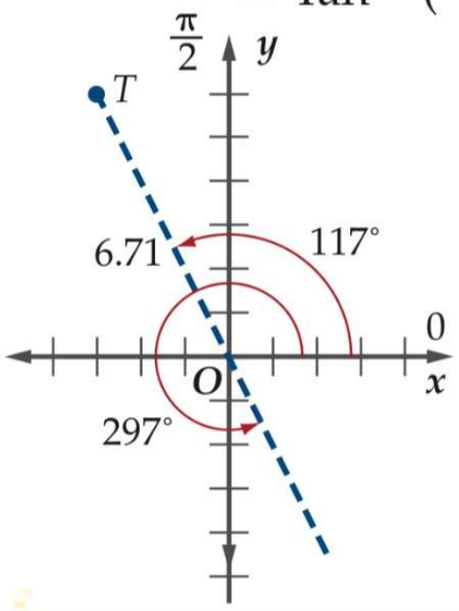
$$= \text{Tan}^{-1}\left(-\frac{6}{3}\right) + 180° \qquad y = 6, x = -3$$

$$= \text{Tan}^{-1}(-2) + 180° \approx 117° \qquad \text{بسّط}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$= \sqrt{(-3)^2 + 6^2}$$

$$= \sqrt{45} \approx 6.71$$



أي أن $(6.71 , 117°)$ تقريبًا هو زوج من الإحداثيات القطبية للنقطة T ، ويمكن إيجاد زوج آخر باستعمال قيمة سالبة لـ r، فنحصل على $(-6.71 , 117° + 180°)$ أو $(-6.71 , 297°)$، كما في الشكل المجاور.



تحقق من فهمك

أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيّات الديكارتيّة في كلٍّ مما يأتي:

(2A $V(8 , 10)$

(2B $W(-9 , -4)$



مثال ٣ من واقع الحياة : التحويل بين الإحداثيات

رجل آلي: بالرجوع إلى فقرة «لماذا؟» ، افترض أن الرَّجل الآلي متجه إلى الشرق، وأن المِجَسَّ قد رَصَدَ جسمًا عند النقطة $(5, 295°)$.

a) ما الإحداثيات الديكارتية التي يحتاج الرجل الآلي إلى حسابها؟

$y = r \sin \theta$	صيغ التحويل	$x = r \cos \theta$
$= 5 \sin 295°$	$r = 5 , \theta = 295°$	$= 5 \cos 295°$
≈ -4.53	بسّط	≈ 2.11

أي أن الإحداثيات الديكارتية لموقع الجسم هي $(2.11 , -4.53)$ تقريبًا.

b) **إذا كان موقع جسم رُصد سابقًا عند النقطة التي إحداثياتها $(3 , 7)$ ، فما المسافة وقياس الزاوية بين الجسم والرجل الآلي؟**

$\theta = \text{Tan}^{-1} \frac{y}{x}$	صيغ التحويل	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
$= \text{Tan}^{-1} \frac{7}{3}$	$x = 3 , y = 7$	$= \sqrt{3^2 + 7^2}$
$\approx 66.8°$	بسّط	≈ 7.62

الإحداثيات القطبية لموقع الجسم هي $(7.62, 66.8°)$ تقريبًا؛ أي أن المسافة بين الجسم والرجل الآلي 7.62، وقياس الزاوية بينهما $66.8°$



الربط مع الحياة

صممت وكالة ناسا رجلًا آليًّا وزنه 3400 باوند، وطوله 12 ft، وطول ذراعه 11 ft؛ لأداء بعض المهام في الفضاء الخارجي.



تحقق من فهمك

3) **صيد الأسماك:** يُستعمل جهاز رصد؛ لتحديد موقع وجود الأسماك تحت الماء. افترض أن قاربًا يتجه إلى الشرق، وأن جهاز الرصد قد رصد سربًا من الأسماك عند النقطة $(6, 125^\circ)$.

A) ما الإحداثيات الديكارتية لموقع سرب الأسماك؟

B) إذا كان موقع سرب الأسماك قد رُصد سابقًا عند النقطة التي إحداثياتها الديكارتية $(-2, 6)$ ، فما الإحداثيات القطبية لموقع السرب؟

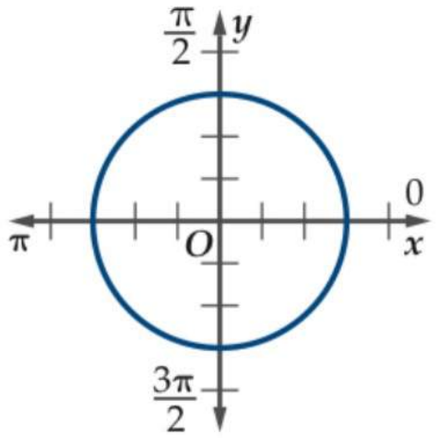
موضوع الدرس : الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات



المعادلات القطبية والديكارتية قد تحتاج في دراستك المستقبلية إلى تحويل المعادلة من الصورة الديكارتية إلى الصورة القطبية والعكس؛ وذلك لتسهيل بعض الحسابات. فبعض المعادلات الديكارتية الـمعقَّدة صورتها القطبية أسهل كثيرًا. لاحظ معادلة الدائرة على الصورة الديكارتية والقطبية كما في الشكل أدناه.

المعادلة على الصورة الديكارتية

$x^2 + y^2 = 9$



المعادلة على الصورة القطبية

$r = 3$

وبشكلٍ مماثل فإن بعض المعادلات القطبية المعقَّدة صورتها الديكارتية أسهل كثيرًا،

فالمعادلة القطبية $r = \frac{6}{2\cos\theta - 3\sin\theta}$ صورتها الديكارتية هي $2x - 3y = 6$

إن عملية تحويل المعادلة من الصورة الديكارتية إلى الصورة القطبية عملية مباشرة؛ إذ نعوض عن x بـ $r\cos\theta$، وعن y بـ $r\sin\theta$ ، ثم نبسِّط المعادلة الناتجة باستعمال الطرق الجبرية والمتطابقات المثلثية.



مثال ٤: تحويل المعادلات الديكارتية إلى معادلات قطبية

اكتب كلَّ معادلة مما يأتي على الصورة القطبية:

(a $(x-4)^2+y^2=16$

لإيجاد الصورة القطبيّة للمعادلة، عوض عن x بـ $r\cos\theta$ وعن y بـ $r\sin\theta$. ثم بَسِّط المعادلة.

$(x-4)^2+y^2=16$	المعادلة الأصلية
$(r\cos\theta-4)^2+(r\sin\theta)^2=16$	$x=r\cos\theta\,,\ y=r\sin\theta$
$r^2\cos^2\theta-8r\cos\theta+16+r^2\sin^2\theta=16$	اضرب
$r^2\cos^2\theta-8r\cos\theta+r^2\sin^2\theta=0$	اطرح 16 من الطرفين
$r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta=8r\cos\theta$	ضع الحدود المربعة في طرف واحد
$r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=8r\cos\theta$	حلّل
$r^2(1)=8r\cos\theta$	متطابقة فيثاغورس
$r=8\cos\theta$	اقسم الطرفين على r حيث $r\neq 0$



مثال ٤: تحويل المعادلات الديكارتية إلى معادلات قطبية

(b $y = x^2$

المعادلة الأصلية	$y = x^2$
$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$	$r\sin\theta = (r\cos\theta)^2$
اضرب	$r\sin\theta = r^2\cos^2\theta$
اقسم الطرفين على $r\cos^2\theta$	$\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} = r$
$\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}$	$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta} = r$
المتطابقات النسبية ومتطابقات المقلوب	$\tan\theta\sec\theta = r$

إرشادات للدراسة

المتطابقات المثلثية

من المفيد أن تراجع المتطابقات المثلثية التي تعلمتها سابقًا؛ لمساعدتك على تبسيط الصورة القطبية للمعادلات الديكارتيّة.



تحقق من فهمك

اكتب كلَّ معادلة مما يأتي على الصورة القطبية:

(4A $x^2 + (y-3)^2 = 9$

(4B $x^2 - y^2 = 1$

موضوع الدرس : الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات



عملية تحويل المعادلة القطبية إلى معادلة ديكارتية ليست مباشرة مثل عملية التحويل من المعادلة الديكارتية إلى المعادلة القطبية، ففي التحويل الثاني تلزمنا جميع العلاقات الآتية:

$$r^2 = x^2 + y^2 \, , \tan\theta = \frac{y}{x} , x = r\cos\theta \, , y = r\sin\theta \, .$$



مثال ٥: تحويل المعادلات القطبية إلى معادلات ديكارتية

اكتب كلّ معادلة قطبيّة مما يأتي على الصورة الديكارتية.

a) $\theta = \frac{\pi}{6}$

المعادلة الأصلية	$\theta = \frac{\pi}{6}$
خُذ tan الطرفين	$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$\tan\theta = \frac{y}{x}$	$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
اضرب الطرفين في x	$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$

إرشادات للدراسة

طريقة بديلة

النقطتان $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ و $\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$ تقعان على المستقيم $\theta = \frac{\pi}{6}$، والإحداثيات الديكارتية لهما $(\sqrt{3}, 1)$ و $(2\sqrt{3}, 2)$، فتكون معادلة المستقيم المار بهاتين النقطتين هي: $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$.



مثال ٥: تحويل المعادلات القطبية إلى معادلات ديكارتية

(b $r = 7$

المعادلة الأصلية	$r = 7$
ربّع الطرفين	$r^2 = 49$
$r^2 = x^2 + y^2$	$x^2 + y^2 = 49$

(c $r = -5 \sin \theta$

المعادلة الأصلية	$r = -5 \sin \theta$
اضرب الطرفين في r	$r^2 = -5r \sin \theta$
$r^2 = x^2 + y^2 , y = r \sin \theta$	$x^2 + y^2 = -5y$
أضف $5y$ إلى الطرفين	$x^2 + y^2 + 5y = 0$



تحقق من فهمك

اكتب كلّ معادلة قطبيّة مما يأتي على الصورة الديكارتية:

(5A $r = -3$

(5B $\theta = \frac{\pi}{3}$

(5C $r = 3 \cos \theta$



مسائل مهارات التفكير العليا

58) اكتشف الخطأ : يحاول كل من باسل وتوفيق كتابة المعادلة القطبية $r = \sin\theta$ على الصورة الديكارتية، فيعتقد توفيق أن الحل هو $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$، في حين يعتقد باسل أن الحل هو $y = \sin x$. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك.



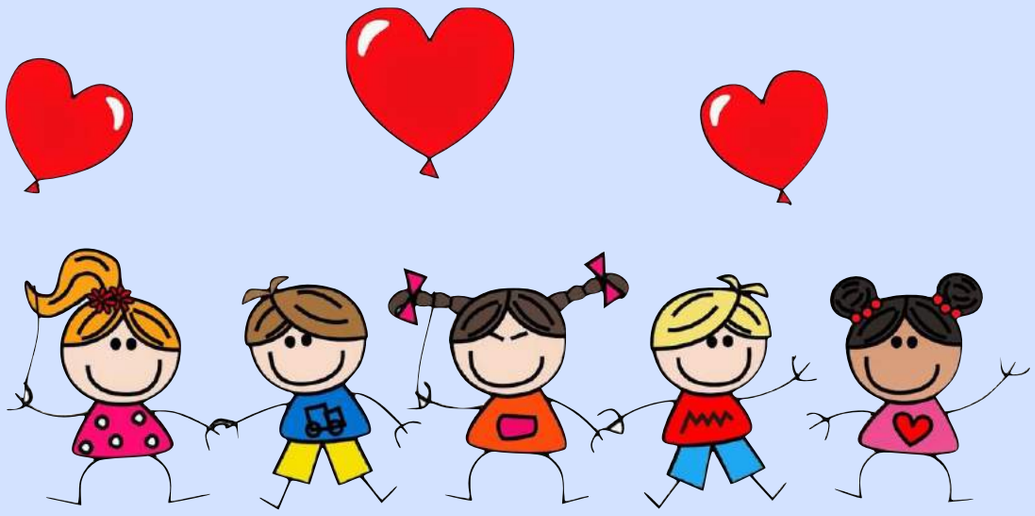
مسائل مهارات التفكير العليا

59) تحدٍّ : اكتب معادلة الدائرة $r = 2a\cos\theta$ بالصورة الديكارتية، وأوجد مركزها وطول نصف قطرها.

مجموعة رفعة آل صبيح
تطوير - إنتاج - توثيق

لن أبرحَ البابَ حتىٰ أبلغَ القممَ ، وأرىٰ بعيني سقف الحلمِ منتظمَ

الأعداد المركبة ونظرية ديموافر



مجموعة رفعة آل صبرق
تطوير - إنتاج - توثيق

فيما سبق

درست إجراء العمليات الحسابية على الأعداد المركبة. (مهارة سابقة)

والآن

- أحوّلُ الأعداد المركبة من الصورة الديكارتية إلى الصورة القطبية والعكس.
- أَجدُ حاصلَ ضرب الأعداد المركبة وقسمتها، وأجدُ جذورها وقواها في الصورة القطبية.

المفردات

المستوى المركب
complex plane
المحور الحقيقي
real axis
المحور التخيلي
imaginary axis
القيمة المطلقة لعدد مركب
absolute value of a complex number
الصورة القطبية
polar form

الصورة المثلثية
trigonometric form
المقياس
modulus
السعة
argument
الجذور النونية للعدد واحد
nth roots of unity

لماذا

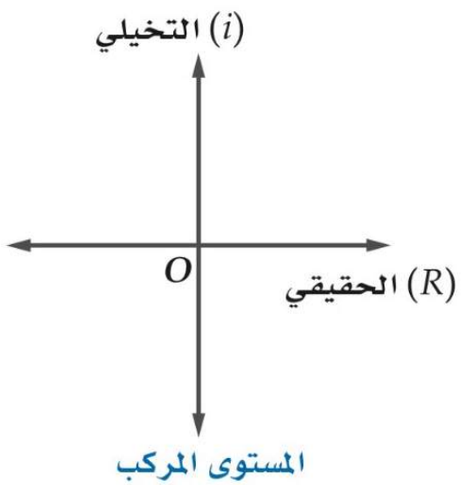


يستعمل مهندسو الكهرباء الأعداد المركبة لوصف بعض العلاقات في الكهرباء. فالكميات: فرق الجهد V، والمعاوقة Z، وشدة التيار I ترتبط بالعلاقة $V = I \cdot Z$ ، التي تستعمل لوصف تيار متردد. ويمكن كتابة كل متغير على صورة عدد مركب على الصورة $a + bj$، حيث j العدد التخيلي (ويستعمل المهندسون j حتى لا يختلط الرمز مع رمز شدة التيار I).

(**إرشاد:** استعملت كلمة المعاوقة بدلًا من كلمة المقاومة؛ لأن مجموعة الأعداد المستخدمة هنا هي مجموعة الأعداد المركبة، حيث تستعمل كلمة المقاومة في مجموعة الأعداد الحقيقية).

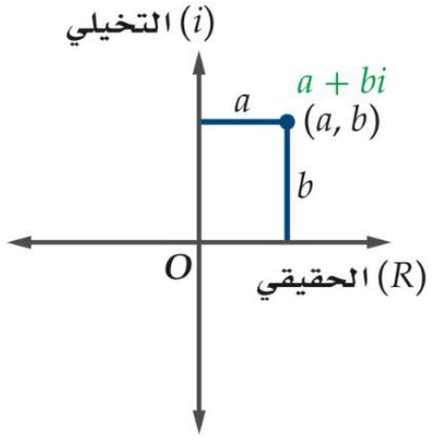


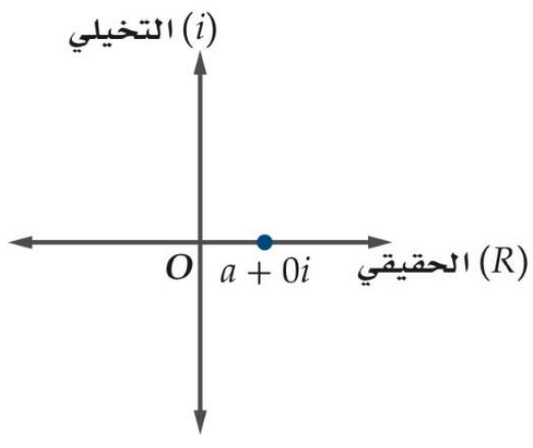
الصورة القطبية للأعداد المركبة الجزء الحقيقي للعدد المركب المُعطى على الصورة الديكارتية $a + bi$، هو a والجزء التخيلي bi . ويمكنك تمثيل العدد المركب على **المستوى المركب** بالنقطة (a, b). كما هو الحال في المستوى الإحداثي، فإننا نحتاج إلى محورين لتمثيل العدد المركب، ويُعيَّنُ الجزء الحقيقي على محور أفقي يُسمَّى **المحور الحقيقي** ويرمز له بالرمز R ، في حين يُعيَّنُ الجزء التخيلي على محور رأسي يُسمَّى **المحور التخيلي** ويرمز له بالرمز i .



المستوى المركب

في العدد المركب $a + 0i$ (لاحظ أن $b = 0$). يكون الناتج عددًا حقيقيًّا يمكن تمثيله على خط الأعداد أو على المحور الحقيقي. وعندما $b \neq 0$ ، فإننا سنحتاج إلى المحور التخيلي لتمثيل الجزء التخيلي.





تذكَّر أن القيمة المطلقة لعدد حقيقي هي المسافة بين ذلك العدد والصفر على خط الأعداد، وبالمثل، فإن **القيمة المطلقة لعدد مركب** هي المسافة بين العدد والصفر في المستوى المركب . وعند تمثيل العدد $a + bi$ في المستوى المركب. فإنه بالإمكان حساب بُعده عن الصفر باستعمال نظرية فيثاغورس.

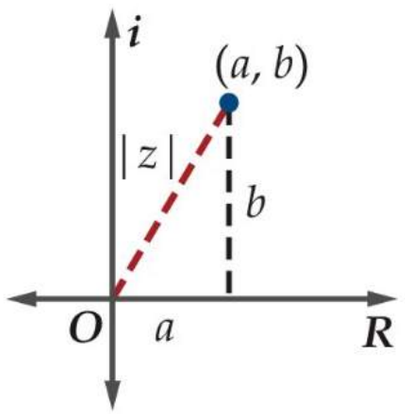


مفهوم أساسي

القيمة المطلقة لعدد مركب

القيمة المطلقة للعدد المركب $z = a + bi$ هي:

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$





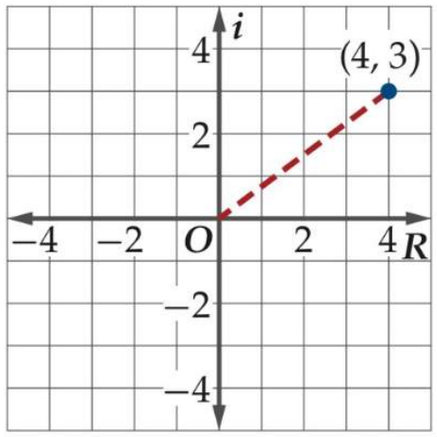


مـثال 1 تمثيل الأعداد المركبة وإيجاد قيمها المطلقة

مَثِّل كل عدد مما يأتي في المستوى المركَّب، وأوجد قيمته المطلقة:

(a $z = 4 + 3i$

$(a, b) = (4, 3)$



تعريف القيمة المطلقة $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

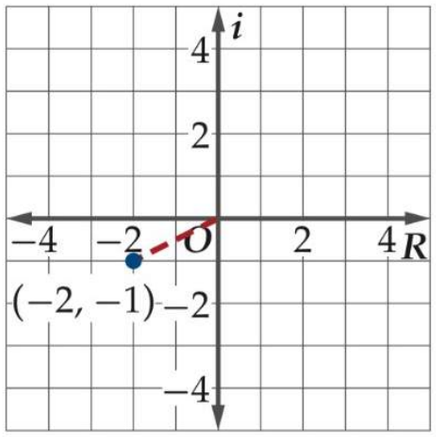
$a = 4, b = 3$ $= \sqrt{4^2 + 3^2}$

بسِّط $= \sqrt{25} = 5$

القيمة المطلقة للعدد $3i + 4$ تساوي 5.

(b $z = -2 - i$

$(a, b) = (-2, -1)$



تعريف القيمة المطلقة $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$a = -2, b = -1$ $= \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2}$

بسِّط $= \sqrt{5} \approx 2.24$

القيمة المطلقة للعدد $-2 - i$ تساوي 2.24 تقريبًا.





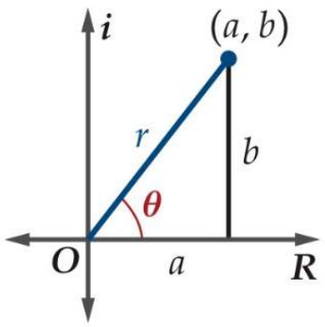
تحقق من فهمك

مَثِّل كل عدد مما يأتي في المستوى المركب، وأوجد قيمته المطلقة:

1A) $5 + 2i$

1B) $-3 + 4i$

كما كُتبت الإحداثيات الديكارتية (x, y) على صورة إحداثيات قطبية، فإنه يمكن كتابة الإحداثيات الديكارتية (a, b) التي تمثِّل عددًا مركبًا في المستوى المركب على الصورة القطبية. وتُطبق الدوال المثلثية نفسها التي استُعملت في إيجاد قيم x, y لإيجاد قيم a, b.



$$\cos\theta = \frac{a}{r} \quad , \quad \sin\theta = \frac{b}{r}$$

$$r\cos\theta = a \qquad r\sin\theta = b$$ اضرب كل طرف في r

وبتعويض التمثيلات القطبية لكل من a، b، يمكننا إيجاد **الصورة القطبية** أو **الصورة المثلثية** لعدد مركب.

$$z = a + bi$$ العدد المركب الأصلي

$$= r\cos\theta + (r\sin\theta)i$$ $b = r\sin\theta$ ، $a = r\cos\theta$

$$= r(\cos\theta + i\sin\theta)$$ خُذ العامل المشترك

في حالة العدد المركب ، فإن r تمثِّل القيمة المطلقة أو **المقياس** للعدد المركب، ويمكن إيجادها باستعمال الإجراء نفسه الذي استعملته لإيجاد القيمة المطلقة $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. تُسمَّى الزاوية θ **سعة** العدد المركب. وبالمثل لإيجاد θ من الإحداثيات الديكارتية (x, y) ، فإنه عند استعمال الأعداد المركبة يكون $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a}$ عندما $a > 0$ أو $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a} + \pi$ عندما $a < 0$.

تنبيه!

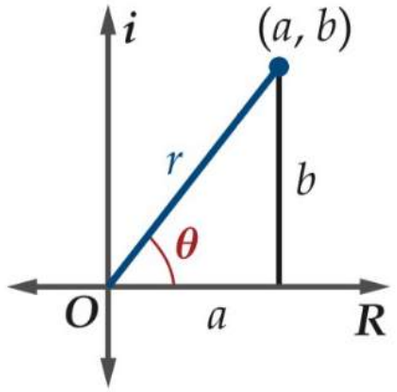
الصورة القطبية :
يجب عدم الخلط بين الصورة القطبية للعدد المركب والإحداثيات القطبية للعدد المركب. فالصورة القطبية لعدد مركب هي طريقة أخرى لكتابة العدد المركب . وسوف نناقش الإحداثيات القطبية للعدد المركب لاحقًا في هذا الدرس.

إرشادات للدراسة

السعة :
كما في الإحداثيات القطبية ، فإن θ ليست وحيدةً ، مع أنها تُعطى عادةً في الفترة $-2\pi < \theta < 2\pi$.

مفهوم أساسي

الصورة القطبية لعدد مركب



الصورة القطبية أو المثلثية للعدد المركب $z = a + bi$ هي:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$ ، حيث

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}\text{ ، }a = r\cos\theta\text{ ، }b = r\sin\theta\text{ ،}$$

$$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a}\text{ عندما }a > 0\text{ ، }\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a} + \pi\text{ عندما }a < 0\text{ .}$$

أما إذا كانت $a = 0$ ، فإن $\theta = \frac{\pi}{2}$ إذا كانت $b > 0$ ، $\theta = -\frac{\pi}{2}$ إذا كانت $b < 0$





مـثال 2 الأعداد المركبة بالصورة القطبية

عبّر عن كلّ عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية:

a) $-6 + 8i$

أوجد المقياس r والسعة θ.

صيغ التحويل، $a < 0$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$a = -6, b = 8$

$$= \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = 10$$

$$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a} + \pi$$

$$= \text{Tan}^{-1}\left(-\frac{8}{6}\right) + \pi \approx 2.21$$

لذا فإن الصورة القطبية للعدد $-6 + 8i$ هي $10(\cos 2.21 + i \sin 2.21)$ تقريبًا.

b) $4 + \sqrt{3}i$

صيغ التحويل، $a > 0$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$a = 4, b = \sqrt{3}$

$$= \sqrt{4^2 + (\sqrt{3})^2}$$

بسّط

$$= \sqrt{19} \approx 4.36$$

$$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a}$$

$$= \text{Tan}^{-1}\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\approx 0.41$$

لذا فإن الصورة القطبية للعدد $4 + \sqrt{3}i$ هي $4.36(\cos 0.41 + i \sin 0.41)$ تقريبًا.





تحقق من فهمك

عبّر عن كلّ عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية:

(2A $9 + 7i$

(2B $-2 - 2i$

ويمكنك استعمال الصورة القطبية لعدد مركب؛ لتمثيله في المستوى القطبي باستعمال (r, θ) كإحداثيات قطبية للعدد المركب. كما يمكنك تحويل عدد مركب مكتوب على الصورة القطبية إلى الصورة الديكارتية، وذلك باستعمال قيم r ، وقيم النسب المثلثية للزاوية θ المعطاة.



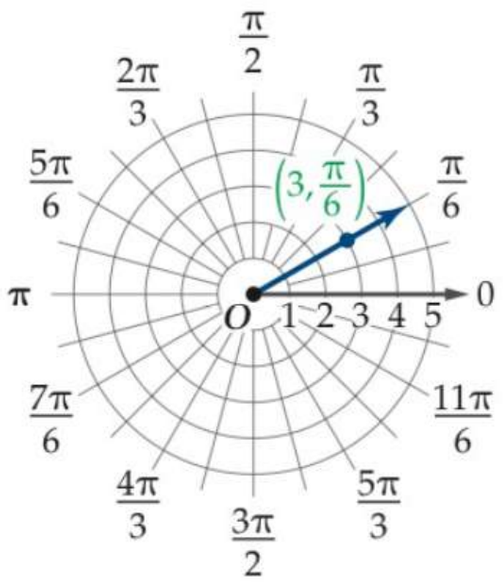


مـثال 3 تمثيل الصورة القطبية لعدد مركب وتحويلها إلى الصورة الديكارتية

مثِّل العدد $z = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ في المستوى القطبي، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية.

لاحظ أن قيمة r هي 3، وقيمة θ هي $\frac{\pi}{6}$.

عَيِّن الإحداثيات القطبية $\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$.



ولكتابة العدد على الصورة الديكارتية أوجد القيم المثلثية، ثم بَسِّط.

الصورة القطبية $3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

بإيجاد قيم الجيب، وجيب التمام $= 3\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{1}{2}\right)\right]$

خاصية التوزيع $= \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

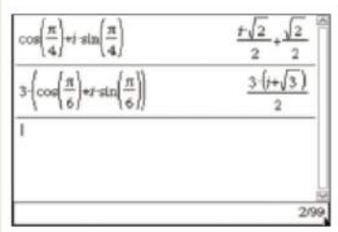
فتكون الصورة الديكارتية للعدد $z = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ هي $z = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$.

إرشاد تقني

تحويل الأعداد المركبة :

يمكن تحويل عدد مركب من الصورة القطبية إلى الصورة الديكارتية باستعمال الحاسبة البيانية من تطبيق الحاسبة، بفتح صفحة تطبيق الحاسبة وإدخال العبارة على الصورة القطبية، ثم اختيار enter .

مع مراعاة إعدادات الآلة الحاسبة بحيث تُعطي الصورة القطبية







تحقق من فهمك

مَثِّل كل عدد مركب مما يأتي في المستوى القطبي، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية:

(3A $5\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

(3B $4\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

موضوع الدرس : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر



ضرب الأعداد المركبة وقسمتها وإيجاد قواها وجذورها تُعدّ الصورة القطبية للعدد المركب، وصيغ المجموع، والفرق لكل من دالتي الجيب وجيب التمام مفيدةً للغاية في ضرب الأعداد المركبة وقسمتها. ويمكن اشتقاق صيغة ضرب عددين مركبين على الصورة القطبية على النحو الآتي:

الصورة القطبيّة للعددين المركبين z_1 ، z_2

$$z_1z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

فك الأقواس

$$= r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 + i^2\sin\theta_1\sin\theta_2)$$

جمّع الحدود التخيلية والحقيقية، واستبدل i^2 بـ -1

$$= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + (i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2)]$$

أخرج i عاملًا مشتركًا

$$= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)]$$

متطابقتا جيب المجموع، وجيب تمام المجموع

$$= r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

مفهوم أساسي

ضرب الأعداد المركبة على الصورة القطبية وقسمتها

للعددين المركبين $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ ، $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ ، فإن:

صيغة الضرب $$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

صيغة القسمة $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$ ، حيث $z_2 \neq 0$ ، $r_2 \neq 0$

باختصار

لاحظ أنه عند ضرب عددين مركبين، فإنك تضرب المقياسين وتجمع السعتين، وعند القسمة فإنك تقسم المقياسين وتطرح السعتين.





مـثال 4 ضرب الأعداد المركبة على الصورة القطبية

أوجد ناتج $2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)\cdot 4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ على الصورة القطبية، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية.

العبارة المعطاة $$2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)\cdot 4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

صيغة الضرب $$=2(4)\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

بسّط $$=8\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$$

والآن أوجد الصورة الديكارتية للناتج.

الصورة القطبية $$8\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$$

أوجد قيم الجيب وجيب التمام $$=8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)$$

خاصية التوزيع $$=4\sqrt{3}-4i$$

فتكون الصورة القطبية للناتج $8\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$، والصورة الديكارتية $4\sqrt{3}-4i$.





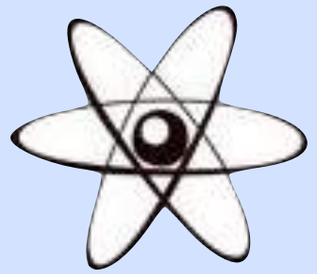
تحقق من فهمك

أوجد الناتج على الصورة القطبية، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية لكلٍّ مما يأتي:

(4A $3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot 5\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

(4B $6\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$





مثال 5 من واقع الحياة

قسمة الأعداد المركبة على الصورة القطبية

كهرباء: إذا كان فرق الجهد V في دائرة كهربائية يساوي 150 V، وكانت معاوقتها Z تساوي $3\sqrt{5}\ [\cos(-0.46) + j\sin(-0.46)]\ \Omega$، فأوجد شدة التيار I في الدائرة على الصورة القطبية باستعمال المعادلة $V = I \cdot Z$.

اكتب العدد 150 على الصورة القطبية.

$$150 = 150\ (\cos 0 + j \sin 0) \qquad r = \sqrt{150^2 + 0^2} = 150,\ \theta = \text{Tan}^{-1}\frac{0}{150} = 0$$

حُلّ $I \cdot Z = V$ بالنسبة لـ I.

المعادلة الأصلية $\quad I \cdot Z = V$

اقسم كل طرف على Z $\quad I = \dfrac{V}{Z}$

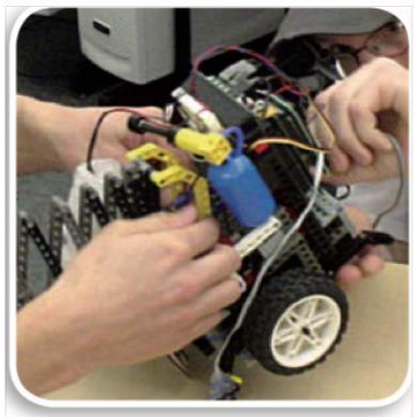
$V = 150\ (\cos 0 + j \sin 0)$, $Z = 3\sqrt{5}\ [\cos(-0.46) + j \sin(-0.46)]$

$$I = \frac{150\ (\cos 0 + j \sin 0)}{3\sqrt{5}\ [\cos(-0.46) + j \sin(-0.46)]}$$

صيغة القسمة $\quad I = \dfrac{150}{3\sqrt{5}}\ \{\cos[0 - (-0.46)] + j \sin[0 - (-0.46)]\}$

بسّط $\quad I = 10\sqrt{5}\ (\cos 0.46 + j \sin 0.46)$

أي أن شدة التيار تساوي $10\sqrt{5}\ (\cos 0.46 + j \sin 0.46)$ أمبير تقريبًا.



الربط مع الحياة

مهندسو الكهرباء يطور مهندسو الكهرباء تكنولوجيا جديدة لصناعة نظام تحديد المواقع والمحولات العملاقة التي تُشغِّل مدنًا كاملة ومحركات الطائرات وأنظمة الرادار والملاحة. كما أنهم يعملون على تطوير منتجات متعددة مثل الهواتف المحمولة والسيارات والرجل الآلي.





تحقق من فهمك

5) **كهرباء:** إذا كان فرق جهد دائرة كهربائية 120 V ، وكانت شدة التيار $(8 + 6j)$ أمبير ، فأوجد معاوقتها على الصورة الديكارتية.



يعود الفضل في حساب قوى الأعداد المركبة وجذورها للعالم الفرنسي ديموافر، وقبل حساب قوى الأعداد المركبة وجذورها، فإن من المفيد كتابة العدد المركب على الصورة القطبية.

بإمكاننا استعمال صيغة ضرب الأعداد المركبة لتوضيح النمط الذي اكتشفه ديموافر.

أولًا: أوجد z^2 من خلال الضرب $z \cdot z$.



اضرب $\quad z \cdot z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \cdot r(\cos\theta + i\sin\theta)$

صيغة الضرب $\quad z^2 = r^2[\cos(\theta+\theta) + i\sin(\theta+\theta)]$

بسّط $\quad z^2 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$

والآن أوجد z^3 بحساب $z^2 \cdot z$.

اضرب $\quad z^2 \cdot z = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) \cdot r(\cos\theta + i\sin\theta)$

صيغة الضرب $\quad z^3 = r^3[\cos(2\theta+\theta) + i\sin(2\theta+\theta)]$

بسّط $\quad z^3 = r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$

لاحظ أنه عند حساب القوة النونية للعدد المركب، فإنك تجد القوّة النونية لمقياس العدد، وتضرب السعة في n.



نظرية

نظرية ديموافر

إذا كان $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ عددًا مركبًا على الصورة القطبية، وكان n عددًا صحيحًا موجبًا، فإن:

$$z^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) .$$



تاريخ الرياضيات

إبراهام ديموافر

(1667 م– 1754 م)

رياضي فرنسي عُرف بالنظرية المسماة باسمه، وكتابه عن الاحتمالات هو *Doctrine of Chances*. ويُعدّ ديموافر من الرياضيين الروّاد في الهندسة التحليلية والاحتمالات.





مثال 6 نظرية ديموافر

أوجد $(4 + 4\sqrt{3}i)^6$ بالصورة القطبية، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية.

أولًا: اكتب $4 + 4\sqrt{3}i$ على الصورة القطبية.

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$	صيغ التحويل	$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a}$
$= \sqrt{4^2 + (4\sqrt{3})^2}$	$a = 4, b = 4\sqrt{3}$	$= \text{Tan}^{-1}\frac{4\sqrt{3}}{4}$
$= \sqrt{16 + 48}$	بسّط	$= \text{Tan}^{-1}\sqrt{3}$
$= 8$	بسّط	$= \frac{\pi}{3}$

فتكون الصورة القطبية للعدد $4 + 4\sqrt{3}i$ هي $8\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

والآن استعمل نظرية ديموافر؛ لإيجاد القوة السادسة.

$(4 + 4\sqrt{3}i)^6 = \left[8\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^6$	الصورة القطبيّة
$= 8^6\left[\cos 6\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin 6\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$	نظرية ديموافر
$= 262144\,(\cos 2\pi + i\sin 2\pi)$	بسّط
$= 262144(1 + 0i)$	أوجد قيمتي الجيب وجيب التمام
$= 262144$	بسّط

أي أن $(4 + 4\sqrt{3}i)^6 = 262144$.



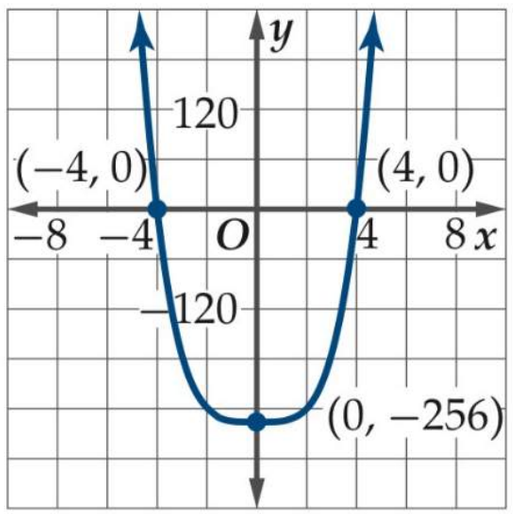


تحقق من فهمك

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي، وعبّر عنه بالصورة الديكارتية :

(6A $(1 + \sqrt{3}i)^4$

(6B $(2\sqrt{3} - 2i)^8$



يوجد للمعادلة $x^4 = 256$ حلان في مجموعة الأعداد الحقيقية هما $-4, 4$. ويُظهر التمثيل البياني المجاور للمعادلة $y = x^4 - 256$ وجود صفرين حقيقيين عند $x = 4, -4$، بينما في مجموعة الأعداد المركبة فإن لهذه المعادلة حلين حقيقيين، وحلين مركبين.

درست سابقًا نتيجة النظرية الأساسية في الجبر، والتي تنص على وجود n صفرًا لمعادلة كثيرة الحدود من الدرجة n في مجموعة الأعداد المركبة؛ لذا يكون للمعادلة $x^4 = 256$ التي تكتب على الصورة $x^4 - 256 = 0$ أربعة حلول أو جذور مختلفة، وهي $4, -4, 4i, -4i$.

وبشكل عام، فإنه يوجد n جذر نوني مختلفٌ لأي عدد مركب لا يساوي الصفر حيث $n \geq 2$، بمعنى أنه لأي عدد مركب جذران تربيعيان، وثلاثة جذور تكعيبية وأربعة جذور رباعية...، وهكذا.

مراجعة المفردات

النظرية الأساسية في الجبر

كل معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من صفر لها جذر واحد على الأقل ينتمي إلى مجموعة الأعداد المركبة.



مفهوم أساسي

الجذور المختلفة

لأي عدد صحيح $n \geq 2$ ، فإن للعدد المركب $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ، n من الجذور النونية المختلفة، ويمكن إيجادها باستعمال الصيغة :

$$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

حيث $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

ويمكننا استعمال هذه الصيغة لجميع قيم k الممكنة، إلا أنه يمكننا التوقف عندما $k = n - 1$ ، وعندما يساوي k العدد n، أو يزيد عليه تبدأ الجذور بالتكرار، كما يظهر في المعادلة:

$$\frac{\theta+2\pi n}{n}=\frac{\theta}{n}+2\pi$$

وهي مطابقة للزاوية التي تنتج عندما $k = 0$





مـثال 7 جذور العدد المركب

أوجد الجذور الرباعية للعدد المركب $-4-4i$.

أولًا: اكتب $-4-4i$ على الصورة القطبية.

$$-4-4i=\sqrt{32}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right) \qquad r=\sqrt{(-4)^2+(-4)^2}=\sqrt{32},\ \theta=\text{Tan}^{-1}\frac{-4}{-4}+\pi=\frac{5\pi}{4}$$

والآن اكتب الصيغة للجذور الرباعية.

$$(\sqrt{32})^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{4}\right) \qquad \theta=\frac{5\pi}{4},\ n=4,\ r^{\frac{1}{n}}=(\sqrt{32})^{\frac{1}{4}}$$

$$=\sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{2k\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{2k\pi}{4}\right)\right] \qquad \text{بسّط}$$

ثانيًا: لإيجاد الجذور الرباعية، عوّض $k=0,1,2,3$.

$k=0$

$$\sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{2(0)\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{2(0)\pi}{4}\right)\right]$$

الجذر الأول

$$=\sqrt[8]{32}\left(\cos\frac{5\pi}{16}+i\sin\frac{5\pi}{16}\right)\approx 0.86+1.28i$$

$k=1$

$$\sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{2(1)\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{2(1)\pi}{4}\right)\right]$$

الجذر الثاني

$$=\sqrt[8]{32}\left(\cos\frac{13\pi}{16}+i\sin\frac{13\pi}{16}\right)\approx -1.28+0.86i$$

$k=2$

$$\sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{2(2)\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{2(2)\pi}{4}\right)\right]$$

الجذر الثالث

$$=\sqrt[8]{32}\left(\cos\frac{21\pi}{16}+i\sin\frac{21\pi}{16}\right)\approx -0.86-1.28i$$

$k=3$

$$\sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{2(3)\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{16}+\frac{2(3)\pi}{4}\right)\right]$$

الجذر الرابع

$$=\sqrt[8]{32}\left(\cos\frac{29\pi}{16}+i\sin\frac{29\pi}{16}\right)\approx 1.28-0.86i$$

الجذور الرباعية للعدد $-4-4i$ هي $0.86+1.28i,\ -1.28+0.86i,\ -0.86-1.28i,\ 1.28-0.86i$





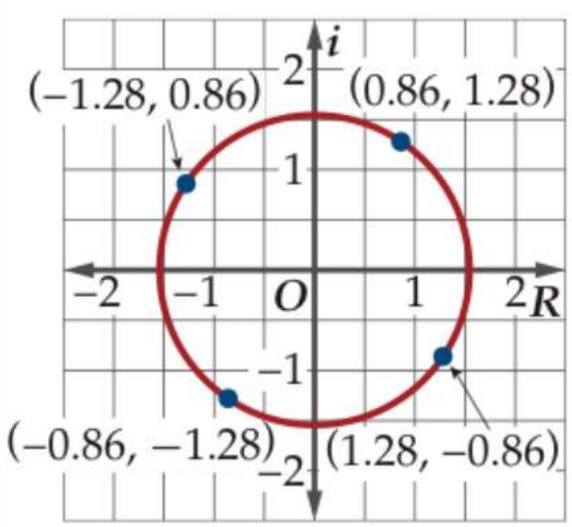
تحقق من فهمك

7A) أوجد الجذور التكعيبية للعدد $2 + 2i$

7B) أوجد الجذور التكعيبية للعدد 8

موضوع الدرس : الأعداد المركبة ونظرية ديموافر





لاحظ أن الجذور الأربعة التي أوجدناها في المثال 7 تقع على دائرة. فإذا نظرنا إلى الصورة القطبية لكل جذر، نجد أن لكل منها مقياسًا قيمته ($\sqrt[8]{32} \approx 1.54$)، ويمثل نصف قطر الدائرة. كما أن المسافات بين الجذور على الدائرة متساوية، وذلك نتيجة للفرق الثابت بين قيم السعة؛ إذ يساوي $\frac{2\pi}{4}$.

تحدث إحدى الحالات الخاصة عند إيجاد الجذور النونية للعدد 1، فعند كتابة 1 على الصورة القطبية، فإننا نحصل على $r = 1$. وكما ذكرنا في الفقرة السابقة، فإن مقياس الجذور هو طول نصف قطر الدائرة الناتجة عن تمثيل الجذور في المستوى المركب؛ لذا فإن **الجذور النونية للعدد واحد** تقع على دائرة الوحدة.





مثال 8 الجذور النونية للعدد واحد

أوجد الجذور الثُّمانيَّة للعدد واحد.

أولًا: اكتب 1 على الصورة القطبية.

$$1 = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0) \qquad r = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1,\ \theta = \text{Tan}^{-1}\frac{0}{1} = 0$$

والآن اكتب الصيغة للجذور الثمانيَّة.

$$1\left(\cos\frac{0 + 2k\pi}{8} + i\sin\frac{0 + 2k\pi}{8}\right) \qquad \theta = 0, n = 8, r^{\frac{1}{n}} = 1^{\frac{1}{8}} = 1$$

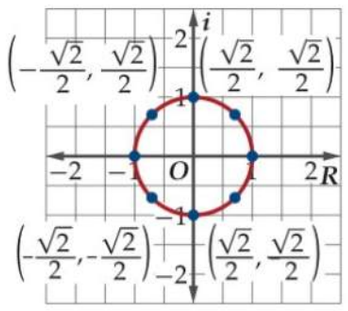
$$= \cos\frac{k\pi}{4} + i\sin\frac{k\pi}{4} \qquad \text{بسّط}$$

ثانيًا: افترض أن $k = 0$ لإيجاد الجذر الأول للعدد 1 .

$$k = 0 \qquad \cos\frac{(0)\pi}{4} + i\sin\frac{(0)\pi}{4}$$

$$= \cos 0 + i\sin 0 = 1 \qquad \text{الجذر الأول}$$

لاحظ أن مقياس كل جذر هو 1، ويمكن إيجاد سعة الجذر الحالية بإضافة $\frac{\pi}{4}$ إلى سعة الجذر السابق.



الجذر الثاني $\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

الجذر الثالث $\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$

الجذر الرابع $\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

الجذر الخامس $\cos\pi + i\sin\pi = -1$

الجذر السادس $\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

الجذر السابع $\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$

الجذر الثامن $\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

الجذور الثُّمانيَّة للعدد 1 هي $1, \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, i, -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, -i, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ كما هو موضح في الشكل أعلاه.

إرشادات للدراسة

الجذور النونية لعدد مركب

يكون للجذور المقياس نفسه وهو $r^{\frac{1}{n}}$. سعة الجذر الأول $\frac{\theta}{n}$ ، ثم تزداد للجذور الأخرى على التوالي بإضافة $\frac{2\pi}{n}$.



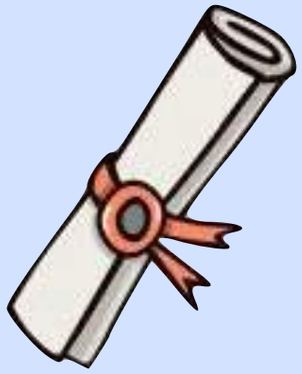


تحقق من فهمك

8A) أوجد الجذور التكعيبية للعدد واحد.

8B) أوجد الجذور السداسية للعدد واحد.





مسائل مهارات التفكير العليا

42) اكتشف الخطأ : يَحسبُ كل من أحمد وباسم قيمة $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^5$. فيستعمل أحمد نظرية ديموافر ويحصل على الإجابة $\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}$. ويقول باسمُ بأن أحمدَ قد أنجز جزءًا من المسألة فقط. أيهما إجابته صحيحة؟ بَرِّر إجابتك.

الفصل السابع:
الاحتمال والاحصاء



لا تتراجع أبداً النجاح العظيم يستغرق وقتًا



الاحتمال والاحصاء

التهيئة

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

فيما سبق

درست إحصائيات العينة ومعالم المجتمع واحتمالات الحوادث المركبة.

والآن

- أميِّز المسوحات، والدراسات والتجارب.
- أكوِّن التوزيعات الاحتمالية، وتمثيلاتها البيانية، وأستعملها في إيجاد الاحتمال.
- أستعمل القانون التجريبي لإيجاد الاحتمالات.
- أميّز بين العينة الإحصائية، والمجتمع الإحصائي.

لماذا

التربية: يستعمل الاحتمال والإحصاء في دراسة الفرضيات التربوية واختبارها. حيث تُستعمل المسوحات، وتجرى التجارب لتحديد الطرائق التعليمية التي تؤدي إلى تعلم أفضل. ويستعمل الإحصاء في تحديد الدرجات عند تمثيل درجات الفصول بيانيًّا، أو عندما يريد المعلمون تقييم درجات الطلاب.

مراجعة المفردات

التباديل (Permutations):
هي تنظيم لمجموعة من العناصر، حيث يكون الترتيب فيها مهمًّا.

التوافيق (Combinations):
هي تنظيم لمجموعة من العناصر، حيث يكون الترتيب فيها غير مهم.

الحادثتان المستقلتان (Independent Events):
تكون A و B حادثتين مستقلتين، إذا كان احتمال حدوث A لا يؤثر في احتمال حدوث B.

الحادثتان غير المستقلتين (Dependent Events):
تكون A و B حادثتين غير مستقلتين، إذا كان احتمال حدوث A يغيِّر بطريقة ما احتمال حدوث B.

الحادثتان المتنافيتان (Mutually Exclusive Events):
تكون A و B حادثتين متنافيتين، إذا لم يكن وقوعهما ممكنًا في الوقت نفسه.

نظرية ذات الحدين (Binomial Theorem):
إذا كان n عددًا طبيعيًّا، فإن :

$$(a+b)^n$$

$$={}_nC_0\,a^nb^0+{}_nC_1\,a^{n-1}b^1+{}_nC_2\,a^{n-2}b^2+\ldots+{}_nC_n\,a^0b^n$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}a^{n-k}\,b^k$$

الاحتمال (Probability):
هو النسبة التي تقيس فرصة وقوع حادثةٍ معينةٍ.

فضاء العينة (Sample Space):
هو مجموعة النواتج الممكنة لتجربةٍ ما.



اختبار سريع

حدِّد ما إذا كانت الحوادث الآتية مستقلة، أو غير مستقلة.

1) اختيار قصة وكتاب آخر لا يمثِّل قصة من مكتبة.

2) اختيار رئيس، ونائب رئيس، وسكرتير، ومحاسب في نادٍ، على افتراض أنّ الشخص الواحد لا يشغل سوى منصب واحد.

3) اختيار طالب ومعلم ومشرف اجتماعي للمشاركة في تنظيم الرحلات المدرسية.





اختبار سريع

حدّد ما إذا كانت كل حالة من الحالات الآتية تتطلب تطبيق التباديل أو التوافيق في حلّها:

4) اصطفاف سبعة أشخاص في صف واحد عند المحاسب في أحد المتاجر.

5) ترتيب أحرف كلمة «مدرسة».

6) اختيار نكهتين مختلفتين لفطيرة من بين 6 نكهات.





اختبار سريع

اكتب مفكوك كل من العبارات الآتية:

7) $(a-2)^4$

8) $(2a+b)^6$

9) $(3x-2y)^5$

10) $\left(\frac{a}{2}+2\right)^5$



لا تنطفيء..إياك أن يخفت بريقك و شغفك للحياة ..هناك شيء ينتظرك..



الدراسات المسحية

والتجريبية والقائمة على الملاحظة



فيما سبق

درست تصميم دراسة مسحية. (مهارة سابقة)



والآن

- أميِّز الدراسات المسحية، والدراسات القائمة على الملاحظة والدراسات التجريبية.
- أميّز بين الارتباط والسببية.



المفردات

الدراسة المسحية	survey
المجتمع	population
التعداد العام	census
العينة	sample
المتحيزة	biased
غير المتحيزة	unbiased

الدراسة القائمة على الملاحظة	observational study
المجموعة التجريبية	treatment group
المجموعة الضابطة	control group
الارتباط	correlation
السببية	causation



لـــــازا

يرغب الطلاب في تشكيل فريق لكرة السلة في مدرستهم، وكي يجدوا دعمًا لمشروعهم، فقد نفّذوا دراسة مسحية شملت الطلاب وأولياء الأمور؛ لمعرفة الموافقين منهم والمعارضين.



الدراسات التجريبية والمسحية تُستعمل **الدراسات المسحية** في جمع البيانات، وإذا شملت عملية جمع البيانات جميع الطلاب في مدرسة ما، نقول: إن الدراسة شملت **المجتمع**، وفي هذه الحالة تُسمّى هذه العملية **تعدادًا عامًّا**. أمّا إذا تم اختيار عدد محدود من طلاب المدرسة مثل 100طالب، فتكون الدراسة المسحية قد اعتمدت على **العينة**.

وتكون العينة **متحيزة** عندما يتم تفضيل بعض أقسام المجتمع على باقي الأقسام، فمثلًا: إذا شملت الدراسة المسحية الواردة في فقرة "لماذا؟" رأي لاعبي كرة السلة وأولياء أمورهم فقط، تكون العينة متحيزة. وتكون العينة **غير متحيزة** إذا تم اختيارها عشوائيًّا، أي إذا كان لكل شخص في المجتمع الفرصة نفسها لأن يكون ضمن عينة الدراسة، فإذا أُرسلت استبانة في دراسة مسحية لـ 100 طالب تم اختيارهم عشوائيًّا عندها تكون العينة غير متحيزة.



مثال ١ من واقع الحياة : العينات المتحيزة والغير متحيزة

دراسات مسحية : حدِّد ما إذا كانت كل دراسة مسحية فيما يأتي تتبنى عينة متحيزة، أو غير متحيزة، وفسّر إجابتك:

a) سؤال كل عاشر شخص يخرج من قاعة الندوات عن عدد مرات حضوره ندوات ثقافية؛ لتحديد مدى دعم سكان المدينة للندوات الثقافية.

متحيزة؛ لأن الأشخاص الذين تم سؤالهم قد يختلفون عن سكان المدينة، حيث إنهم ممن يحضرون الندوات الثقافية.

b) استطلاع آراء أفراد في سوق الماشية؛ لمعرفة ما إذا كان سكان المدينة يحبون تربية الماشية أو لا .

متحيزة؛ لأن المجموعة التي تم مسح رأيها لا تُمثّل بالضرورة رأي أهل المدينة؛ لأنهم غالبًا ممن يحبون تربية الماشية.

c) يحتوي صندوق على أسماء طلاب المدرسة جميعهم، سُحب من الصندوق 100 اسم عشوائيًّا، وسُئل أصحابها عن رأيهم في مقصف المدرسة.

غير متحيزة؛ لأن لكل شخص في مجتمع الدراسة الفرصة نفسها لأن يكون ضمن عينة الدراسة الذين استُطلِعت آراؤهم.



حدِّد ما إذا كانت كل دراسة مسحية فيما يأتي تتبنى عينة متحيزة، أو غير متحيزة، وفسّر إجابتك:

1A) سؤال كل لاعب في فريق كرة السلة عن الرياضة التي يحب مشاهدتها على التلفاز.

1B) الذهاب إلى ملعب كرة القدم وسؤال 100 شخص اختيروا عشوائيًّا عن رياضتهم المفضلة.

لتجنب التحيز في الدراسات المسحية
المعتمدة على العينات لابد من
تحقق أمرين هما :

أن تكون العينة العشوائية مناسبة
وذلك بأن تكون غير متحيزة و حجمها
كبير نسبياً ،
وأن لاتكون الأسئلة المطروح متحيزة .





مثال ؟ من واقع الحياة : تصميم الدراسات المسحية

دراسات مسحية في المدرسة : يريد خالد أن يُحدّد أفضل الأماكن للرحلة المدرسية. ما الأسئلة التي تعطيه الإجابة التي يبحث عنها دون تحيُّز؟

a) هل تحب الذهاب إلى مركز الملك عبدالعزيز التاريخي؟

هذا سؤال متحيز لصالح مكان محدد.

b) هل تحب الذهاب إلى حديقة الحيوان، أم إلى متنزَّه سلام؟

هذا سؤال متحيز؛ لأنه يحدد بديلين بالاسم.

c) أين تفضل أن تذهب في الرحلة؟

هذا سؤال غير متحيز؛ لأنه يعطي الإجابة التي يبحث عنها دون تحيّز.

إرشادات للدراسة

العينة المتحيزة

تعدّ العينة متحيزة إذا وفقط إذا كانت غير عشوائية.



أي مما يأتي يُحدّد أفضل مادة بالنسبة إلى الطلاب دون تحيُّز؟

2A) هل تفضل المادة التي خرجت من حصتها الآن؟

2B) أيهما تفضل أكثر: العلوم أو الرياضيات؟

2C) ما مادتك المفضلة؟

موضوع الدرس: الدراسات المسحية والتجريبية والقائمة على الملاحظة



في **الدراسة القائمة على الملاحظة**، تتم ملاحظة الأفراد دون أي محاولة للتأثير في النتائج. وفي **الدراسة التجريبية**، يتم إجراء معالجة خاصة على الأشخاص أو الحيوانات أو الأشياء قيد الدراسة، وتجرى ملاحظة استجاباتهم.

دراسة قائمة على الملاحظة

- من 100 شخص، اختر 50 شخصًا خضعوا المعالجة .
- اجمع البيانات، وحلّلها، وفسّرها .

دراسة تجريبية

- من 100 شخص، اختر من بينهم 50 شخصًا عشوائيًّا وأخضعهم للمعالجة المقصودة بالتجريب، بينما لا تخضع الآخرين لأي معالجة أو لمعالجة شكلية.
- اجمع البيانات، وحلِّلها، وفسّرها.

في الدراسة التجريبية، يُسمّى الأشخاص أو الحيوانات أو الأشياء التي تخضع للمعالجة **المجموعة التجريبية**. أمّا الأشخاص أو الحيوانات أو الأشياء الذين لا يخضعون للمعالجة أو يخضعون لمعالجة شكلية، فيسمون **المجموعة الضابطة**. وتعطى المعالجة الشكلية لكي لا يعرف أفراد المجموعات لأي المجموعتين ينتمون، وتصبح الدراسة التجريبية عندها غير متحيزة.



مثال ٣ من واقع الحياة: الدراسات التجريبية والدراسات القائمة على الملاحظة.

حدِّد ما إذا كان كل موقف ممّا يأتي يمثِّل دراسة تجريبية، أو دراسة قائمة على الملاحظة. وفي حالة الدراسة التجريبية اذكر كلًّا من المجموعة الضابطة والمجموعة التجريبية، ثم بيِّن ما إذا كانت الدراسة التجريبية متحيزة أم لا.

a) اختر 200 طالب نصفهم خضع لأنشطة إضافية في مادة معينة، وقارن بين درجاتهم في تلك المادة.

هذه دراسة قائمة على الملاحظة.

b) اختر 200 طالب واقسمهم عشوائيًّا إلى نصفين، وأخضع إحدى المجموعتين إلى برنامج تدريبي معيّن، أمّا الأخرى فلا تخضعها لأي برنامج تدريبي.

هذه دراسة تجريبية؛ لأنه تم تقسيم المجموعتين عشوائيًّا، وإحداهما خضعت للبرنامج التدريبي وهي المجموعة التجريبية، والأخرى لم تخضع لأي برنامج تدريبي وهي المجموعة الضابطة، وهي دراسة متحيزة؛ لأن كل طالب يعرف المجموعة التي ينتمي إليها.



حدّد ما إذا كان الموقف الآتي يمثِّل دراسة تجريبية، أو دراسة قائمة على الملاحظة، وفي حالة الدراسة التجريبية اذكر كلًّا من المجموعة الضابطة والمجموعة التجريبية، ثم بيِّن ما إذا كانت الدراسة التجريبية متحيزةً أم لا.

3) اختر 80 طالبًا جامعيًّا نصفهم درس الإحصاء في المدرسة الثانوية، وقارن نتائج المجموعتين في مساق للإحصاء تم تدريسه في الجامعة.

موضوع الدرس: الدراسات المسحية والتجريبية والقائمة على الملاحظة



كيف تعرف متى تُستعمل الدراسات المسحية أو الدراسات التجريبية أو الدراسات القائمة على الملاحظة؟ تستعمل الدراسات المسحية عند الرغبة في جمع بيانات، أو آراء أفراد المجتمع حول موضوع معين، بينما تُستعمل الدراسات القائمة على الملاحظة عند الرغبة في دراسة أثر معالجة سابقة تعرض لها أفراد من المجتمع دون أي تأثير عليهم من الباحث، وتستعمل الدراسات التجريبية عند الرغبة في اختبار طريقة جديدة، أو في دراسة نتائج معالجة مقصودة يؤثر الباحث بها في مجموعة من الأفراد يتم تعيينهم عشوائيًّا.



مثال ٤: الدراسات التجريبية والدراسات القائمة على الملاحظة.

حدِّد ما إذا كانت كل من الحالات الآتية تتطلب دراسة مسحية، أو دراسة قائمة على الملاحظة، أو دراسة تجريبية، وفسّر إجابتك:

a) **تريد أن تختبر طريقة معالجة لمرض ما.**

يستدعي ذلك إجراء دراسة تجريبيّة يكون المستهدفون فيها مرضى يشكّلون المجموعة التجريبية، وتخضع هذه المجموعة للعلاج، بينما يخضع أفراد المجموعة الضابطة الآخرون وهم مرضى كذلك لعلاج شكلي.

b) **تريد أن تجمع آراءً حول القواعد المعتمَدة في انتخاب رئيس الصف.**

يستدعي هذا دراسة مسحية للآراء، حيث من الأفضل أن تختار أشخاصًا من الصف بصورة عشوائية؛ لتحصل على عينة غير متحيزة.

c) **تريد أن تعرف ما إذا كان التدخين لمدة 10 سنوات يؤثّر في سعة الرئة أو لا.**

يستدعي هذا إجراء دراسة قائمة على الملاحظة تقارن فيها سعة رئة المدخنين لمدة 10 سنوات، مع سعة الرئة لعدد مساوٍ لهم من غير المدخنين.



حدّد ما إذا كانت الحالة الآتية تتطلب دراسة مسحية، أو دراسة قائمة على الملاحظة، أو دراسة تجريبية، فسّر إجابتك.

4) تريد استطلاع آراء طلاب مدرسة ثانوية حول وسيلة المواصلات المدرسية باستعمال مقياس متدرج من 1 (لا أوافق مطلقًا) إلى 5 (أوافق بشدة).



التمييز بين الارتباط والسببية إن أي علاقة تظهر بين نتائج التجربة والمعالجة لا تعني بالضرورة أن المعالجة هي السبب في النتيجة.

فعندما يوجد **ارتباط** بين ظاهرتين، فإن كلًّا من الظاهرتين تؤثر في الأخرى فإن معرفتك بقيم الظاهرة الأولى يمكِّنك من التنبؤ بقيم الظاهرة الثانية، والعكس صحيح، فمثلًا: هناك ارتباط بين كتل الأشخاص وأطوالهم، فكلما زاد طول الشخص زادت كتلته بشكل عام، فإذا عرفت طول شخص يمكنك التنبؤ بكتلته. وعندما يوجد **سببية**، فإن وقوع ظاهرة معينة يكون سببًا مباشرًا في وقوع الظاهرة الأخرى لذا فإن السببية تتضمن الترتيب الزمني، فوقوع الظاهرة الأولى أولًا يكون سببًا في وقوع الظاهرة الثانية لاحقًا كنتيجة لذلك، فمثلًا: دوران الأرض حول محورها هو السبب الوحيد في تعاقب الليل والنهار. وبينما يكون من السهل ملاحظة الارتباط بين ظاهرتين، فإنه من الصعب البرهنة على وجود سببية بين الظاهرتين.



مثال ٥: التمييز بين الارتباط والسببية

بيّن ما إذا كانت العبارات الآتية تُظهر ارتباطًا، أو سببية، ثم فسّر إجابتك:

a) أظهرت الدراسات أن الطلاب يكونون أقل نشاطًا بعد تناول الغداء .

العبارة تظهر ارتباطًا فقط، ولا تظهر سببية؛ لأن تناول الغداء ليس سببًا مباشرًا ولا كافيًّا وحده لقلة النشاط لدى الطلاب، فهناك عوامل أخرى تشترك معه، مثل نوعية وكمية الغداء.

b) إذا رَفعتُ أثقالًا، أستطيع الالتحاق بفريق كرة القدم .

العبارة تظهر ارتباطًا؛ لأن رفع الاثقال وحده ليس سببًا مباشرًا للالتحاق بفريق كرة القدم، فقد تكون هناك متطلبات أخرى تشترك معه، مثل: المهارة واللياقة وغيرها.

c) عندما ترى الشمس يكون النهار قد طلع.

العبارة الواردة تظهر سببية؛ لأنه ليس هناك عوامل أخرى مع الشمس يلزم وجودها لتسبب طلوع النهار.

إرشادات للدراسة

السببية

إذا لم يوجد أي سبب آخر يعطي النتيجة فإنك تفترض السببية.



بيّن ما إذا كانت العبارة الآتية تُظهر ارتباطًا، أو سببية، ثم فسّر إجابتك.

5) عندما أدرس أحصل على تقدير ممتاز.

مسائل مهارات التفكير العليا



25) اكتشف الخطأ: طُلب إلى كل من سامي وهشام أن يصمم دراسة تجريبية غير متحيزة. هل وفّق أي منهما في ذلك؟ فسّر إجابتك.

سامي

- خذ مجموعة من 20 شخصًا بطريقة عشوائية.
- اطلب إلى نصفهم عشوائيًّا الالتزام بحمية تعتمد على الفواكه بالكامل لمدة 3 أسابيع.
- قارن بين أوزانهم بعد الأسابيع الثلاثة.

هشام

- خذ 20 لاعبًا لكرة القدم.
- اطلب إلى نصفهم عشوائيًّا أن يقفزوا 500 قفزة إلى أعلى في اليوم.
- قارن عدد مرات القفز إلى أعلى التي تستطيع كل مجموعة تنفيذها بعد الأسابيع الثلاثة.

مسائل مهارات التفكير العليا



28) **مسألة مفتوحة:** اذكر مثالًا من واقع الحياة لكل دراسة ممّا يأتي، وحدِّد عدد أفراد العينة، وكيفية اختيارها.

a) مسحية

b) قائمة على االملاحظة

c) تجريبية

مسائل مهارات التفكير العليا



29) **تبرير:** كيف يحدث التحيّز في الدراسة التجريبية؟ وكيف يؤثّر في النتيجة؟ أعطِ مثالًا على ذلك.

أنتَ مَن يُحي حُلمَك، وأنت مَن يقتُله، تمسّك بحلمك حتىٰ ولو في أصعبِ الظُروف..

التحليل الإحصائي



اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

فيما سبق

درست مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت. (مهارة سابقة)

والآن

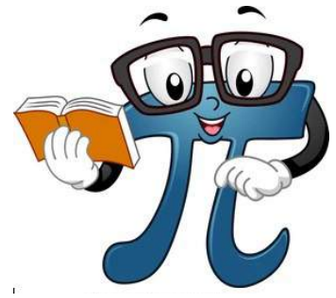
- أختار مقياس النزعة المركزية الأنسب لتمثيل البيانات.
- أجد هامش خطأ المعاينة وأستعمله.
- أستعمل مقاييس التشتت لمقارنة مجموعات من البيانات.

المفردات

الإحصائي	Statistic
هامش خطأ المعاينة	margin of sampling error
مقياس التشتت	measure of variation
التباين	variance
الانحراف المعياري	standard deviation
التحليل الإحصائي	statistical analysis
المتغير	variable
بيانات في متغير واحد	univariate data
مقاييس النزعة المركزية	measure of central tendency
المَعْلَمة	parameter







لماذا؟



7:20	6:59	7:29	6:49	7:03	6:51
6:48	6:52	6:50	7:01	6:49	6:57
6:53	7:07	6:54	6:56	7:09	7:02

شارك أمجد في 18 سباقًا جبليًّا للدراجات خلال العام الماضي، ويُمثّل الجدول المجاور الزمن بالدقائق والثواني الذي استغرقه للوصول إلى خط النهاية في كل منها. أي من مقاييس النزعة المركزية يفضل أن يستعمله أمجد لوصف هذه الأزمنة؟

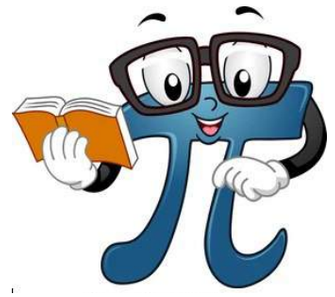
إن إيجاد أحد مقاييس النزعة المركزية لوصف البيانات وتلخيصها، والوصول إلى الاستنتاجات المتعلقة بالدراسة يُسَمى **التحليل الإحصائي** لها.

التحليل الإحصائي البيانات الموجودة في الجدول أعلاه تشتمل على **متغير**؛ لذا تُسمى **بيانات في متغير واحد**.
ولوصف مثل هذه البيانات، يُستعمل أحد **مقاييس النزعة المركزية**، الذي يشير إلى متوسط البيانات أو منتصفها (مركزها)، وأبرز هذه المقاييس هو المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال.

والآن: اختار مقياس لوصف البيانات يمكن استعمال الجدول أدناه:







مفهوم أساسي

مقاييس النزعة المركزية

المقياس	التعريف	أكثر فائدةً عندما
المتوسط الحسابي	مجموع القيم مقسومًا على عددها	لا توجد في البيانات قيم متطرفة.
الوسيط	العدد الذي يشغل موقع المنتصف عند ترتيب القيم تنازليًّا أو تصاعديًّا في مجموعة بيانات عددها فرديٌّ، أو هو المتوسط للعددين الموجودين في المنتصف، في مجموعة بيانات عددها زوجي ومرتبة ترتيبًا تصاعديًّا أو تنازليًّا.	توجد في البيانات قيم متطرفة، ولا توجد فجوات كبيرة في منتصف البيانات.
المنوال	القيمة الأكثر تكرارًا أو شيوعًا بين القيم.	تحوي البيانات قيمًا متكررة.







مثال ١ من واقع الحياة : مقاييس النزعة المركزية

a) زمن السباق: إشارة إلى البيانات في سباق الدراجات أعلاه، أيّ مقاييس النزعة المركزية يصف البيانات بصورة أفضل؟ ولماذا؟

بما أن البيانات تنتشر ولا يظهر فيها قيم متطرفة، يكون المتوسط هو الأفضل.

17	15	17	16
15	16	16	12
18	18	18	14
1	48	16	40

b) أيّ من مقاييس النزعة المركزية يناسب البيانات في الجدول المجاور؟ ولماذا؟

بما أنه توجد قيم متطرفة ولا يوجد فجوات كبيرة في منتصف البيانات، فإن الوسيط أفضل من غيره لتمثيل البيانات.

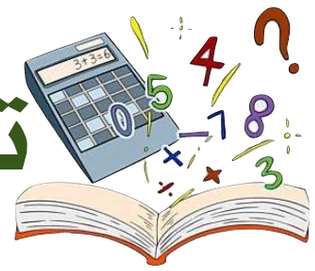
إرشادات للدراسة

القيمة المتطرفة

هي واحدة من البيانات أكبر أو أصغر كثيرًا من بقية البيانات.





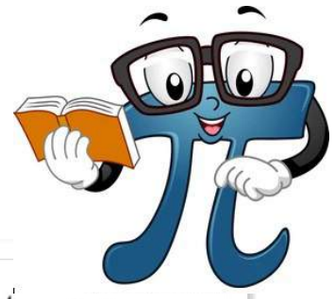


تحقق من فهمك

1) تمنح مؤسسة جائزة كبرى قيمتها 20000 ريال، و30 جائزة أخرى قيمة كل منها 500 ريال، أي مقاييس النزعة المركزية يلائم البيانات بصورة أفضل؟ ولماذا؟







موضوع الدرس: التحليل الإحصائي

يوجد نوعان من المقاييس يمكن استعمالهما لمجموعة من البيانات، هما **المَعْلَمة** وهو مقياس يصف خاصية في المجتمع. و**الإحصائي** وهو مقياس يصف خاصية في العينة. فمتوسط دخل الفرد في المملكة هو مثال على المَعْلَمة، أما دخل الفرد في مدينتك التي تسكنها، فهو مثال على الإحصائي. ويتم تحديد مجتمع الدراسة في ضوء الهدف من الدراسة، فإذا أراد باحث مثلًا تعرف مدى رضا معلِّمِي الرياضيات عن المناهج الجديدة في المملكة، فإن مجتمع الدراسة يكون جميع معلِّمِي الرياضيات الذين يدرِّسون المناهج الجديدة في المملكة، ولصعوبة إجراء الدراسة على جميع المعلمين، فإنه يتم اختيار مجموعة صغيرة والتي تمثل عينة الدراسة.

وعند سحب عينة من مجتمع فهنالك خطورة من وجود خطأ في المعاينة ناتج عن إجراء الدراسة على عينة من المجتمع وليس على المجتمع بأكمله يسمى **هامش خطأ المعاينة**. وكلما زاد حجم العينة قلَّ هامش خطأ المعاينة، ويُحَدِّد هامش خطأ المعاينة الفترة التي تدل على مدى اختلاف استجابة العينة عن المجتمع، وهذا يعني أنه يصف المدى الذي تقع فيه نسبة المجتمع فيما إذا أجريت الدراسة على المجتمع بأكمله.

مفهوم أساسي **هامش خطأ المعاينة**

عند سحب عينة حجمها n من مجتمع كلي، فإنه يمكن تقريب هامش خطأ المعاينة بالقيمة $\pm \frac{1}{\sqrt{n}}$







مثال ٢ : هامش خطأ المعاينة

إرشادات للدراسة

كتابة هامش خطأ المعاينة

نكتب هامش خطأ المعاينة عادة على صورة نسبة مئوية.

في دراسة مسحية عشوائية شملت 2148 شخصًا، أفاد 58% منهم أن كرة القدم هي لعبتهم المفضّلة.

a) ما هامش خطأ المعاينة؟

$$\text{هامش خطأ المعاينة} \approx \pm\frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \text{قانون هامش خطأ المعاينة}$$

$$\approx \pm\frac{1}{\sqrt{2148}} \qquad n = 2148$$

$$\approx \pm 0.0216 \qquad \text{بسّط}$$

إذن هامش الخطأ للمعاينة $\pm 2.16\%$ تقريبًا.

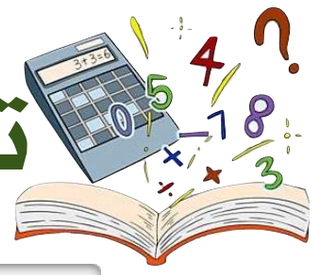
b) ما الفترة الممكنة التي تتضمّن نسبة المجتمع الذين أفادوا أن كرة القدم هي لعبتهم المفضلة؟

$$58\% + 2.16\% = 60.16\% \qquad 58\% - 2.16\% = 55.84\%$$

الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة المجتمع الذين أفادوا بأن كرة القدم هي لعبتهم المفضلة تقع بين 55.84% و 60.16% أي تقع في الفترة (60.16% , 55.84%).







تحقق من فهمك

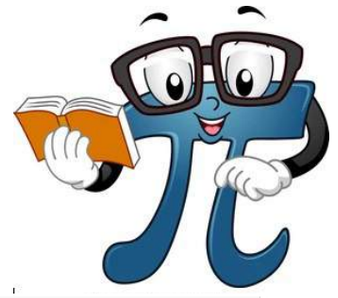
في دراسة مسحية عشوائية شملت 3247 شخصًا، قال 41% منهم: إنهم مرتاحون للنهضة العلمية.

2A) ما هامش خطأ المعاينة؟

2B) ما الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة أفراد المجتمع المرتاحين للنهضة العلمية؟







موضوع الدرس: التحليل الإحصائي

إرشادات للدراسة

مقاييس التشتت

درست سابقًا مقاييس التشتت (المدى، الربيعات، المدى الربيعي، الانحراف المتوسط.

مقاييس التشتت تصف **مقاييس التشتت** مقدار تباعد البيانات أو تقاربها، ومن أشهر مقاييس التشتت **التباين**، و**الانحراف المعياري**. ويصف هذان المقياسان مدى بعد مجموعة البيانات عن المتوسط أو قربها منه.

يُمثّل الرمز $\bar{x}$ المتوسط للعينة ويُقرأ «x بار»، ويمثّل الرمز μ المتوسط للمجتمع ويُقرأ «ميو». ويحسب كل من المتوسط للعينة والمتوسط للمجتمع بالطريقة ذاتها، أمّا طريقة حساب الانحراف المعياري لكل من بيانات العينة وبيانات المجتمع، فتختلف، وفيما يأتي توضيح لطريقة حساب كل من الانحراف المعياري للعينة)ويُرمز له بالرمز s، والانحراف المعياري للمجتمع (ويرمز له بالرمز σ ويقرأ «سيجما»).

مفهوم أساسي

قانونا الانحراف المعياري

العينة

$$s=\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2}{n-1}}$$

حيث n عدد قيم العينة وَ $\bar{x}$ المتوسط الحسابي للعينة وَ x_k قيم العينة.

المجتمع

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2}{n}}$$

حيث n عدد قيم المجتمع وَ μ المتوسط الحسابي للمجتمع وَ x_k قيم المجتمع.







مثال ٣ من واقع الحياة : الانحراف المعياري

درجات اختبار: حصل طلاب المعلم صالح في اختبارين متتاليين على المتوسط نفسه في اختبار الرياضيات وهو 75. إذا علمت أن درجات الاختبارين كما يأتي:

الاختبار A	الاختبار B
85, 80, 75, 75, 70, 75, 75, 65, 75, 75, 75, 80, 75, 75, 70, 80, 70, 75, 75, 75, 75, 75	100, 100, 90, 10, 100, 95, 10, 95, 100, 100, 85, 15, 95, 20, 95, 90, 100, 100, 90, 10, 100, 100, 25

a) بيِّن ما إذا كانت هذه البيانات تمثل عينة أم مجتمعًا، ثم أوجد الانحراف المعياري لدرجات الاختبار A.

الخطوة 1 بما أن المتوسط 75 للاختبار كاملًا ، فهو يمثل متوسط المجتمع. ومن هنا فإن:

$\mu = 75$.

الخطوة 2 أوجد الانحراف المعياري.

قانون الانحراف المعياري

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} (x_k - \mu)^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{(85-75)^2 + (80-75)^2 + \ldots + (75-75)^2 + (75-75)^2}{23}}$$

$$\approx 3.9$$

المتوسط لدرجات الاختبار A يساوي 75، والانحراف المعياري يساوي تقريبًا 3.9



الربط مع الحياة

يستعمل المعلمون الأنواع المختلفة من الأسئلة الموضوعية والمقالية لتقدير درجات طلابهم.

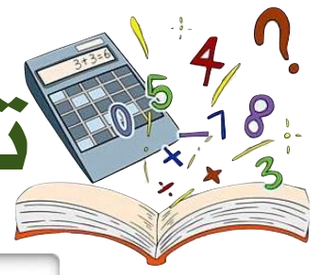
إرشادات للدراسة

المتوسط للمجتمع

عندما يكون المتوسط للمجتمع μ معلومًا، يمكنه أن يحلّ مكان المتوسط للعينة $\bar{x}$.







تحقق من فهمك

31	33	33	34	28
31	36	34	29	33
36	28	32	29	30
28	28	29	33	29
29	27	28	31	26

3A) احسب المتوسط والانحراف المعياري للمجتمع للبيانات المحدّدة في الجدول المجاور.

3B) ضع 70 مكان 30 في الجدول المجاور. ماذا تتوقع أن يحدث لكلٍّ من المتوسط والانحراف المعياري؟ أعد الحسابات للتحقّق.

3C) اختير (5) طلاب عشوائيًّا من فصل دراسي، وقيست أطوالهم فكانت:175 سم، 170 سم، 168 سم، 167سم، 170 سم. بيِّن ما إذا كانت هذه البيانات تمثِّل عينة أم مجتمعًا، ثم أوجد الانحراف المعياري لأطوال هؤلاء الطلاب.







مسائل مهارات التفكير العليا

15) **تحدٍّ:** إذا أيَّد 67% من المستهدفين موضوع دراسة مسحية، وكانت الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة أفراد المجتمع المؤيدة هي 64.8%-69.2%، فكم شخصًا تناولت الدراسة المسحية رأيهم؟







مسائل مهارات التفكير العليا

17) **تبرير:** إذا زيدت كل قيمة في مجموعة بيانات بمقدار 10، فكيف يؤثّر ذلك في المتوسط والوسيط والانحراف المعياري؟ فسّر إجابتك.







تدريب على اختبار

28) **إحصاء:** في مجموعة من تسعة أعداد مختلفة، أي ممّا يأتي لا يؤثّر في الوسيط؟

A مضاعفة كل عدد

B زيادة كل عدد بمقدار 10

C زيادة القيمة الصغرى فقط

D زيادة القيمة الكبرى فقط







تدريب على اختبار

29) درجات اختبار: كانت درجات 5 طلاب اختيروا عشوائيًّا في فصل دراسي كما يلي 55, 45, 30, 50, 70. بيِّن ما إذا كانت هذه البيانات تمثِّل عينة أم مجتمعًا، ثم احسب الانحراف المعياري لدرجاتهم إلى أقرب عدد صحيح.

A 40 **B** 15

C 14 **D** 13





لا بأس إنها فقط القليل من الأيام التي تحتاج إلى المزيد من الاجتهاد عليك

أن تبذل فيها ما تستطيع لانها ستصنع مستقبلك

الاحتمال المشروط

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

موضوع الدرس: الاحتمال المشروط



درست مفهوم الاحتمال وكيفية حسابه . (مهارة سابقة)



- أجد احتمال وقوع حادثة إذا عُلم أن حادثة أخرى قد وقعت.
- أستعمل الجداول التوافقية لإيجاد احتمالات مشروطة .



الاحتمال المشروط

conditional probability

الجدول التوافقي

contingency table

التكرار النسبي

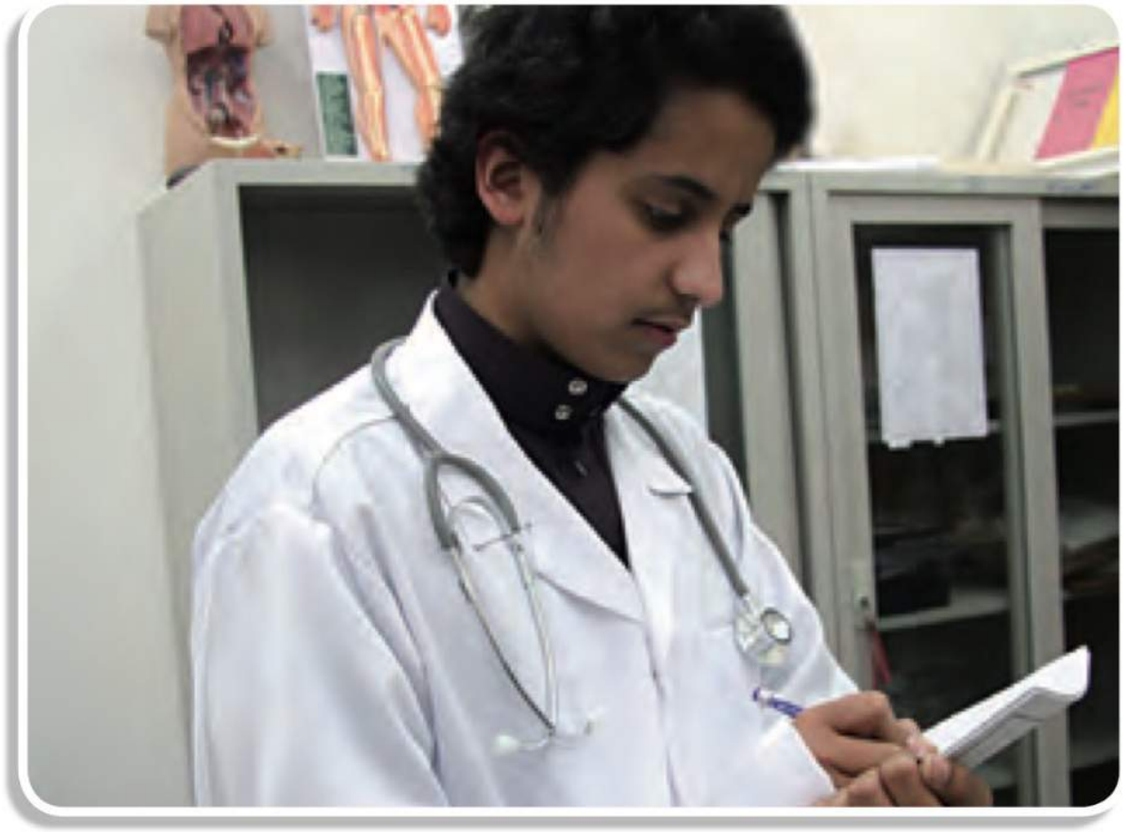
relative frequency



لماذا؟

يختبر هيثم دواءً يقي من بعض الأمراض. وتوجد مجموعتان من الأشخاص إحداهما تجريبية تمّ إعطاء الدواء الحقيقي لأفرادها، بينما تمّ إعطاء دواء شكلي (غير فعّال) للمجموعة الأخرى (المجموعة الضابطة). وبعد الحصول على النتائج، يريد هيثم أن يجد احتمال بقاء المستهدفين أصحاء نتيجة الدواء.

وهذا المثال يُفسّر مفهوم الاحتمال المشروط.



موضوع الدرس: الاحتمال المشروط



الاحتمال المشروط يُسمّى احتمال وقوع الحادثة B بشرط وقوع الحادثة A، **احتمالًا مشروطًا**. ويرمز له بالرمز $P(B \mid A)$، ويقرأ احتمال وقوع الحادثة B بشرط وقوع الحادثة A.

مفهوم أساسي

الاحتمال المشروط

إذا كانت A, B حادثتين غير مستقلتين، فإن الاحتمال المشروط لوقوع الحادثة B، إذا عُلِم أن الحادثة A قد وقعت يعرّف على النحو:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \text{ وَ } B)}{P(A)}, \quad P(A) \neq 0$$



مثال ١ : الاحتمال المشروط.

ألقت عبير مكعب أرقام مرةً واحدةً. ما احتمال ظهور العدد 3 ، علمًا بأن العدد الظاهر فردي؟

توجد 6 نواتج ممكنة من إلقاء مكعب الأرقام مرةً واحدةً.

لتكن A الحادثة التي يكون فيها العدد الظاهر عددًا فرديًّا.
ولتكن B الحادثة التي يظهر فيها العدد 3.

3 نواتج ذات عدد فردي من بين 6 نواتج — $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

واحد من النواتج الستة فردي ويُمثّل العدد 3 — $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

احتمال وقوع الحادثة B علمًا بأن الحادثة A قد وقعت — $P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

$P(A) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ — $= \frac{1}{6} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

احتمال ظهور العدد 3 علمًا بأن العدد الظاهر فردي هو $\frac{1}{3}$.



تحقق من فهمك

1) يحتوي كيس على 52 بطاقة مقسمة إلى أربع مجموعات لكل منها لون من الألوان الآتية: الأحمر والأخضر والأزرق والأصفر، ورقّمت بطاقات كل لون بالأعداد من 1 إلى 13. إذا سحبت نوال بطاقة، فما احتمال أن تحمل هذه البطاقة العدد 13 علمًا بأن ما سحبته كان العدد 11 أو 12 أو 13؟

موضوع الدرس: الاحتمال المشروط



الجداول التوافقية **الجداول التوافقية** هي جداول تكرارية ذات بعدين، يتم فيها تسجيل بيانات ضمن خلايا، حيث إن كل خلية من خلايا الجدول تُمثّل تكرارًا يسمى **تكرارًا نسبيًّا**، إذ يكون منسوبًا إلى مجموع التكرارات في الجدول، أو منسوبًا إلى مجموع التكرارات في الصف الذي تقع فيه الخلية، أو منسوبًا إلى مجموع التكرارات في العمود الذي تقع فيه الخلية، ويمكن استعمال الجداول التوافقية في إيجاد الاحتمال المشروط.



مثال ٢ : الجداول التوافقية.

مشي: أوجد احتمال أن يكون شخص اختير عشوائيًا معافى، علمًا بأنه يمارس المشي.

الحالة	عدد الأشخاص	
	يمارس المشي (W)	لا يمارس المشي (Nw)
مريض(S)	1600	1200
معافى(H)	800	400

عدد الأشخاص الكلي في الدراسة $400 + 1200 + 800 + 1600$ ويساوي 4000 شخص، ويراد إيجاد احتمال H علمًا بأن W قد وقع.

قانون الاحتمال المشروط $$P(H \mid W) = \frac{P(H \text{ وَ } W)}{P(W)}$$

$$= \frac{800}{4000} \div \frac{2400}{4000}$$

$P(H \text{ وَ } W) = \frac{800}{4000}$, $P(W) = \frac{1600 + 800}{4000}$

بسِّط $$= \frac{800}{2400} = \frac{1}{3}$$

احتمال أن يكون الشخص معافى، بشرط أنه يمارس المشي هو $\frac{1}{3}$.



تحقق من فهمك

2) أوجد احتمال أن يكون شخص اختير عشوائيًا معافى، علمًا بأنه لا يمارس المشي.

إرشادات للدراسة

حل مختصر

يمكن اختصار الحل في المثال 2 باستعمال الجداول التوافقية وفضاء العينة المختصر على النحو الآتي:

احتمال أن يكون الشخص معافى بشرط أنه يمارس المشي هو

$$P(H \mid W) = \frac{800}{2400} = \frac{1}{3}$$



مثال ٣ : على الاختبار.

يوضّح الجدول أدناه عدد الطلاب الجامعيين الذين يمارسون الرياضة بشكل منتظم، إذا اختير طالب عشوائيًّا، فأوجد احتمال أن يكون الطالب من ضمن المنتخب الجامعي، علمًا بأنه في السنة الثالثة.

الرياضيون الجامعيون	سنة أولى	سنة ثانية	سنة ثالثة	سنة رابعة
ضمن المنتخب الجامعي(K)	7	22	36	51
ليس ضمن المنتخب الجامعي(S)	269	262	276	257

A 11.5% تقريبًا

B 16.6% تقريبًا

C 13.0% تقريبًا

D 19.8% تقريبًا

اقرأ فقرة الاختبار

تريد معرفة احتمال أن يكون الطالب من ضمن المنتخب الجامعي (K) علمًا بأنه في السنة الثالثة (T). مجموع الطلاب هو 1180 طالبًا.

حُلّ فقرة الاختبار

قانون الاحتمال المشروط

$$P(K \mid T) = \frac{P(K \cap T)}{P(T)}$$

$$= \frac{36}{1180} \div \frac{312}{1180}$$

$P(K \cap T) = \frac{36}{1180}$, $P(T) = \frac{36 + 276}{1180}$

$$\approx 0.115\% \approx 11.5\%$$

الجواب الصحيح A.



تحقق من فهمك

3) أوجد احتمال أن يكون الطالب من ضمن المنتخب الجامعي، علمًا بأنه في السنة الأولى.

A 2.6% تقريبًا **B** 2.5% تقريبًا **C** 8.4% تقريبًا **D** 7.7% تقريبًا

إرشادات للدراسة

كتابة الاحتمال

تذكر أن الاحتمال يُعبَّر عنه بكسر اعتيادي أو بكسر عشري أو بنسبة مئوية.



تدرب وحل المسائل

يحتوي كيس على 8 كرات زرقاء، و 6 كرات حمراء، و 10 كرات صفراء، و 6 كرات بيضاء، و 5 كرات خضراء. إذا سُحبت كرة واحدة عشوائيًّا، فأوجد الاحتمال في كل حالة مما يأتي: **(مثال 1)**

1) أن تكون الكرة خضراء، إذا عُلم أنها ليست زرقاء.

2) أن تكون حمراء، إذا عُلم أنها ليست خضراء.

3) أن تكون صفراء، إذا عُلم أنها ليست حمراء وليست زرقاء.

4) أن تكون خضراء أو بيضاء، إذا عُلم أنها ليست حمراء.

5) أن تكون زرقاء، إذا عُلم أنها بيضاء.



تدرب وحل المسائل

7) **فحص القيادة:** يوضّح الجدول أدناه أداء مجموعة من الأشخاص في فحص القيادة، علمًا بأن بعضهم أخذ حصصًا تدريبية تحضيرًا للفحص، والبعض الآخر لم يأخذ. إذا اختير أحد الأشخاص عشوائيًّا، فأوجد احتمال كل مما يأتي: **(مثال 2)**

	أخذ حصصًا	لم يأخذ حصصًا
ناجح	64	48
راسب	18	32

a) الشخص ناجح علمًا بأنه أخذ حصصًا.

b) الشخص راسب علمًا بأنه لم يأخذ حصصًا.

c) لم يأخذ حصصًا، علمًا بأنه ناجح.



مسائل مهارات التفكير العليا

17) **تحدٍّ:** ألقي مكعب مرقم من 1 إلى 6 خمس مرات متتالية. ما احتمال ظهور الرقم 2 في الرميات الخمس علمًا بأن الرقم 2 ظهر في الرميات الثلاث الأولى؟



تدريب على اختبار

26) إذا كانت A , B حادثتين في فضاء العينة لتجربة عشوائية ما، بحيث كان $P(A)=0.2, P(B)=0.5, P(A\cup B)=0.4$ ، فما قيمة $P(A \mid B)$ ؟

A 0.5

B 0.6

C 0.7

D 0.8

ما خُلقنا لنفشل ، ما خُلقنا لنسقط ، خُلقنا لنكون

عظماء ، لنكون أسياد أحلامنا ، لنراها واقعاً يفرحنا..

الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية



اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

موضوع الدرس: الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية

فيما سبق

درست إيجاد احتمال وقوع حادثة إذا علم أن حادثة أخرى قد وقعت. (الدرس 3–3)

الآن

- أجد الاحتمالات باستعمال التباديل والتوافيق.
- أجد الاحتمالات باستعمال المتغيرات العشوائية.
- أمثِّل بيانيًّا التوزيعات الاحتمالية وأستعملها.

المفردات

النجاح	success
الفشل	failure
المتغير العشوائي	random variable
المتغير العشوائي المنفصل	discrete random variable
التوزيع الاحتمالي	probability distribution
التوزيع الاحتمالي المنفصل	discrete probability distribution
الاحتمال النظري	theoretical probability
الاحتمال التجريبي	experimental probability
القيمة المتوقعة	expected value

لماذا؟





افترض أن شركة لديها 4 شواغر، وتشترط لتعيين الموظفين لديها اجتيازهم لمقابلة شخصية. إذا تقدم للشركة 8 أشخاص من المنطقة A، و 10 أشخاص من المنطقة B، وتمت مقابلة المتقدمين، واختير 4 منهم بشكل عشوائي، فما احتمال أن يفوز بالوظائف 3 أشخاص من المنطقة A وشخص واحد من المنطقة B؟

موضوع الدرس: الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية



الاحتمال تسمى النسبة التي تقيس فرصة وقوع حادثة معيَّنة احتمالًا. ووقوع الشيء المرغوب فيه يُسمّى **نجاحًا**، وعدم وقوعه يُسمّى **فشلًا**. ومجموعة النواتج الممكنة تُسمّى فضاء العينة. وكلما اقترب احتمال وقوع حادثة من 1، كانت فرصة أو إمكانية وقوعها أكبر.

مفهوم أساسي

احتمال النجاح والفشل

إذا كان عدد مرات نجاح وقوع حادثة s من المرات، وعدد مرات فشل وقوع الحادثة نفسها f من المرات، فإن احتمال النجاح يُكتب على النحو $P(S)$، كما يُكتب احتمال الفشل على النحو $P(F)$. ويُعطى كل من احتمال النجاح واحتمال الفشل بالصيغتين الآتيتين:

$$P(S) = \frac{s}{s+f} \quad , \quad P(F) = \frac{f}{s+f}$$

لاحظ أن الصيغة: $P(S) = \frac{s}{s+f}$ لا تختلف في مضمونها عن الصيغة: $P(\text{الحادثة}) \frac{\text{عدد النواتج في الحادثة}}{\text{عدد النواتج الممكنة}}$



مثال ١ : الاحتمال باستعمال التوافيق.

رشّحت مدرسة 12 طالبًا من الصف الثاني الثانوي، و 16 طالبًا من الصف الأول الثانوي للتنافس على 6 جوائز؛ نظرًا لتفوقهم الدراسي. إذا تمت مقابلة المرشحين، واختير 6 منهم بشكل عشوائي، فما احتمال أن يفوز بالجوائز 3 طلاب من الصف الأول الثانوي و 3 طلاب من الصف الثاني الثاني؟

الخطوة 1 حدّد عدد مرات النجاح s

عدد طرق اختيار 3 طلاب من الصف الثاني هو $_{12}C_3$

عدد طرق اختيار 3 طلاب من الصف الأول هو $_{16}C_3$

استعمل التوافيق، ومبدأ العد الأساسي لإيجاد عدد النجاحات s.

$$S = {}_{12}C_3 \cdot {}_{16}C_3 = \frac{12!}{9!\,3!} \cdot \frac{16!}{13!\,3!} = 123200$$

الخطوة 2 حدّد عدد النواتج الممكنة (عدد عناصر فضاء العينة)، $s + f$.

$$s + f = {}_{28}C_6 = \frac{28!}{22!\,6!} = 376740$$

الخطوة 3 أوجد الاحتمال

احتمال النجاح $P(\text{فوز 3 من الأول و3 من الثاني}) = \frac{s}{s+f}$

$s = 123200,\ s + f = 376740$ $= \frac{123200}{376740}$

استعمل الآلة الحاسبة ≈ 0.327016

احتمال فوز 3 طلاب من الصف الأول و3 من الصف الثاني هو تقريبًا 0.33 أو 33%.

تنبيه!

احتمال النجاح والفشل

لاحظ أن الحرف الصغير s يدل على عدد مرات النجاح في وقوع حادثة، بينما الحرف الكبير S يدل على حادثة النجاح، وكذلك الأمر بالنسبة للحرفين f وَ F.



تحقق من فهمك

1) في المثال 1 إذا كان عدد الذين رُشِّحوا من الصف الثاني الثانوي 3، ومن الصف الأول الثانوي 11، وكان عدد الجوائز 4، واختير 4 طلاب من الذين رُشِّحوا بطريقة عشوائية، فما احتمال أن يفوز طالبان من الصف الثاني وطالبان من الصف الأول؟



مثال ٢ : الاحتمال باستعمال التباديل.

لدى صالح 6 أصدقاء تبدأ أسماؤهم بالأحرف A , B , C , D , E , F ، ويتوقع من كل منهم اتصالًا هاتفيًّا للاتفاق على موعد رحلة ينوون القيام بها. ما احتمال أن يتصل A أولًا ثم B ثانيًا، ويتصل كل من D, E , F أخيرًا.

الخطوة 1 حدِّد عدد مرات النجاح s.

عدد طرق اتصال A أولًا ثم B ثانيًا هو 1

عدد طرق اتصال كل من D , E , F في الأخير هو ${}_3P_3$

استعمل التباديل ومبدأ العد الأساسي لإيجاد s.

$$s = 1 \cdot {}_3P_3 = 1 \cdot 3! = 6$$

الخطوة 2 أوجد عدد النواتج الممكنة (عدد عناصر فضاء العينة)، $s + f$.

$s + f = {}_6P_6 = 6! = 720$ ، وتمثل عدد الترتيبات الممكنة لاتصالات الأصدقاء الستة.

الخطوة 3 أوجد الاحتمال.

احتمال النجاح $P(S) = \dfrac{s}{s+f}$

$s = 6 , s + f = 720$ $= \dfrac{6}{720}$

استعمل الآلة الحاسبة ≈ 0.0083

الاحتمال المطلوب هو تقريبًا 0.008 أو 0.8% تقريبًا.

مراجعة المفردات

التباديل والتوافيق

عند اختيار مجموعة من الأشخاص أو الأشياء بترتيب معيّن، فإن الاختيار يُسمّى تبديلًا، وعندما لا نهتم بعملية ترتيب الأشخاص أو الأشياء، فإن الاختيار يُسمّى توفيقًا.



تحقق من فهمك

2) **سباق:** اشترك صلاح، وعبد اللَّه، وسليم في سباق 400 m مع خمسة رياضيين آخرين. ما احتمال أن ينهي هؤلاء الثلاثة السباق في المراكز الثلاثة الأولى؟

موضوع الدرس: الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية



إرشادات للدراسة

البيانات المنفصلة والبيانات المتصلة

تكون البيانات منفصلة إذا أمكن عدّ البيانات مثل عدد الأرانب في مزرعة. وتكون البيانات متصلة إذا كانت تأخذ أي قيمة في فترة من الأعداد الحقيقية، فمثلاً أطوال جميع أفراد العينة تمثل بيانات متصلة.

المتغير العشوائي والتوزيع الاحتمالي يُسمى المتغير الذي يأخذ مجموعة قيم لها احتمالات معلومة **متغيرًا عشوائيًا**. والمتغير العشوائي الذي له عدد محدود من القيم يُسمى **متغيرًا عشوائيًا منفصلاً**.

التوزيع الاحتمالي هو دالة تربط بين كل قيمة من قيم المتغير العشوائي ، مع احتمال وقوعها، ويعبر عنه بجدول أو معادلة، أو تمثيل بياني. ويجب أن يحقق التوزيع الاحتمالي الشرطين الآتيين:

- احتمال كل قيمة من قيم X محصور بين 0 و 1، أي أن $0 \le P(X) \le 1$.
- مجموع كل احتمالات قيم X يساوي 1 ، أي أن $\sum P(X) = 1$.

والتوزيع الاحتمالي المنفصل هو توزيع احتمالي متغيره العشوائي منفصل.

فعند رمي قطعتي نقد متمايزتين مرَّةً واحدة، فإن فضاء العينة هو {TT, TL, LT, LL} ، حيث يُمثّل L الوجه الذي يحمل الشعار، و T الوجه الذي يحمل الكتابة، إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا يدل على عدد مرات ظهور الشعار، فإن X يأخذ القيم 0, 1, 2 . ويمكنك حساب الاحتمال النظري لعدم الحصول على شعار، أو الحصول على شعار واحد، أو الحصول على شعارين، ثم تكوين جدول يمثّل التوزيع الاحتمالي، كما يمكنك تمثيله بيانيًّا كما يأتي:

موضوع الدرس: الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية



قراءة الرياضيات

احتمالات المتغيرات العشوائية

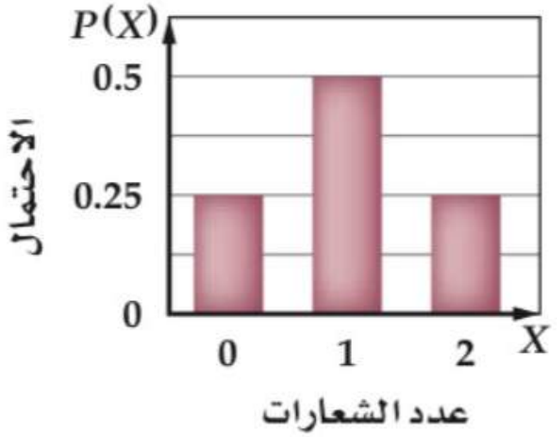
يقرأ الرمز $P(1)$ احتمال أن يكون المتغير العشوائي X مساويًا لـ 1 .

$$P(0) = \frac{1}{4} \quad , \quad P(1) = \frac{1}{2} \quad , \quad P(2) = \frac{1}{4}$$

يُبيّن الجدول أدناه والتمثّيل بالأعمدة المجاور التوزيع الاحتمالي للمتغير X .

عدد الشعارات X	0	1	2
الاحتمال $P(X)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

عدد الشعارات واحتمالاتها



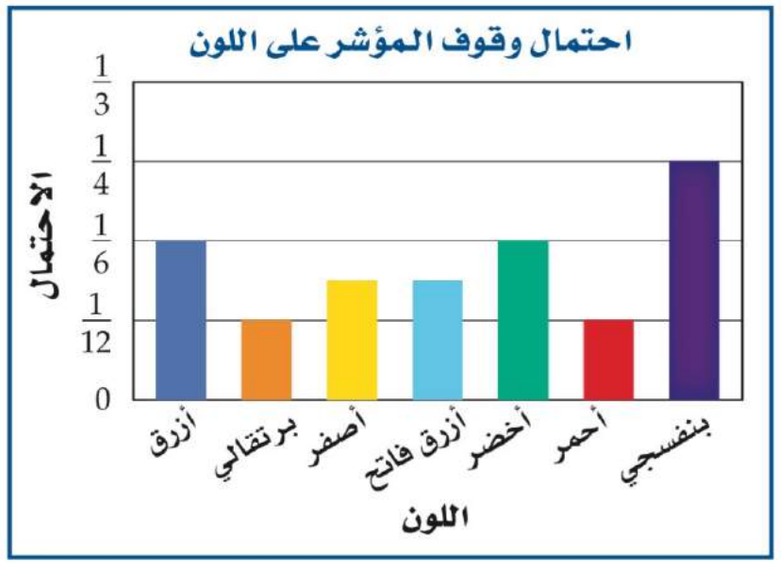


مثال ٣ : التوزيع الاحتمالي المنفصل .

يوضّح القرص ذو المؤشر الدوّار توزيعًا احتماليًّا، حيث يمكن أن يتوقّف المؤشر على أيٍّ من القطاعات الملونة، وقد كتب على كل قطاع احتمال ظهوره (لاحظ أن مجموع الاحتمالات يساوي 1).



a) مثِّل بالأعمدة هذا التوزيع الاحتمالي:



b) استعمل التمثيل بالأعمدة؛ لتحدّد اللون الأكبر إمكانية لوقوف المؤشر عنده، ثم أوجد احتماله.

أكثر الألوان إمكانية لوقوف المؤشر عنده هو اللون البنفسجي، واحتماله يساوي $\frac{1}{4}$.

c) أوجد (أخضر أو أزرق) P .

احتمال التوقّف عند اللون الأزرق أو الأخضر هو $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

تنبيه!

احتمال الحوادث المتنافية

تذكر أنه إذا كانت A و B حادثتين متنافيتين، فإن $P(A \text{ أو } B) = P(A) + P(B)$.



تحقق من فهمك

يوضح الجدول أدناه توزيعًا احتماليًّا، حيث أُلقي مكعبان مرقمان من 1 إلى 6 مرة واحدة، وسُجّل مجموع العددين الظاهرين على الوجهين العلويين واحتمال كلٍّ منها.

المجموع	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
الاحتمال	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

3A) مثِّل بالأعمدة هذا التوزيع الاحتمالي.

3B) استعمل التمثيل بالأعمدة؛ لتحدد الناتج الأكثر إمكانية للوقوع؟ ثم أوجد احتماله.

3C) أوجد $P(5 \text{ أو } 11)$.

موضوع الدرس: الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية



إن الاحتمالات التي تمت دراستها هنا هي **احتمالات نظرية**؛ لأنها مبنية على افتراضات يتوقّع الحصول عليها، بينما **الاحتمالات التجريبية** يتم تقديرها من عدد من التجارب. **والقيمة المتوقعة أو التوقع** $E(X)$ هي المتوسط الموزون للقيم في التوزيع الاحتمالي المنفصل؛ أي أن القيمة المتوقعة $E(x)$ هي مجموع حواصل ضرب قيم المتغير العشوائي X في احتمال كل منها $P(X)$، ويمكن إيجادها باستعمال القانون $E(X)=\sum_{i=1}^{i=n} Xi.P(Xi)$، وتنتج هذه القيمة من خلال اعتماد الاحتمال النظري كوزن للمتغير العشوائي. ويخبرك بما يمكن حدوثه على المدى البعيد، وذلك بعد محاولات كثيرة.



مثال ٤ : القيمة المتوقعة .

أوجد القيمة المتوقّعة عند رمي مكعب مرقم من 1 إلى 6 مرة واحدة.

القيمة المتوقعة $E(X)$ هي مجموع حواصل ضرب قيم المتغير العشوائي X في احتمال كلٍّ منها $P(X)$.

عوِّض في قانون المتوسط الموزون

$$E(X) = 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{6}\right) + 4\left(\frac{1}{6}\right) + 5\left(\frac{1}{6}\right) + 6\left(\frac{1}{6}\right)$$

اضرب

$$= \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6}$$

اجمع

$$= \frac{21}{6} = 3.5$$

إرشادات للدراسة

قانون الأعداد الكبيرة

ينص قانون الأعداد الكبيرة على أنه كلما ازداد عدد مرات إجراء التجربة، اقتربت قيمة معدل القيم الناتجة من القيمة المتوقعة.



تحقق من فهمك

4) أوجد القيمة المتوقّعة عند رمي مكعبين مرقمين مرة واحدة، وتسجيل مجموع العددين الظاهرين على الوجهين العلويين.

تدرب وحل المسائل

1) صندوق فيه 10 كرات، منها 6 حمراء، إذا سحبت منه كرتان معًا عشوائيًا، فما احتمال أن تكون الكرتان حمراوين؟ **(مثال 1)**

تدرب وحل المسائل

3) دخل 8 لاعبين A,B,C,D,E,F,G,H في مباراة، إذا اختيرت أسماء اللاعبين عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون أول 4 لاعبين مختارين هم A,C,E,G على الترتيب؟ **(مثال 2)**

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

تدرب وحل المسائل

6) **أخبار:** أجرى موقع إلكتروني مسحًا للمصادر التي يحصل منها الناس على الأخبار بشكل رئيس. والجدول المجاور يبيّن نتائج هذا المسح. **(مثال 3)**

المصدر	الاحتمال
التلفاز	0.35
المذياع	0.31
الأصدقاء	0.02
الصحف	0.11
الإنترنت	0.19
مصادر أخرى	0.02

a) بيّن أن هذه البيانات تمثِّل توزيعًا احتماليًّا.

b) إذا اختير أحد الذين شملهم هذا المسح عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون مصدر أخباره الرئيس الصحف أو الإنترنت؟

c) مثّل البيانات بالأعمدة.

مسائل مهارات التفكير العليا

19) **تبرير:** حدّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا: «يُبنى الاحتمال النظري على نتائج التجارب». برِّر إجابتك.

تدريب على اختبار

25) ما القيمة المتوقّعة للتوزيع الاحتمالي المبيَّن في الجدول أدناه؟

x	1	2	3
p(x)	0.1	0.8	0.1

A 0.1

B 0.16

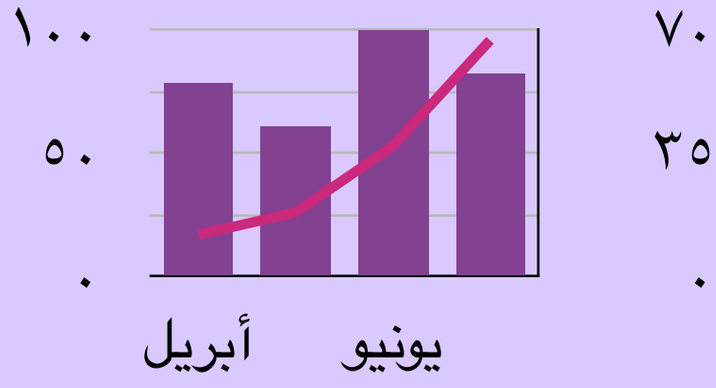
C 0.56

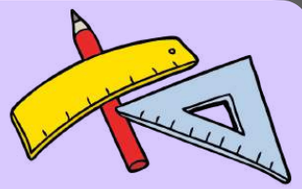
D 1



صباحَ الخيرِ , إستَدع دائماً الافكار الطيبة والأحلام والطُّموحات التي تود الوصول إليها

التوزيع الطبيعي





فيما سبق

درست التوزيعات الاحتمالية. (الدرس 4–3)

والآن

- أحدِّد ما إذا كانت مجموعة بيانات تبدو موزَّعة طبيعيًّا أو ملتوية .
- أستعمل القانون التجريبي لأجد الاحتمالات.

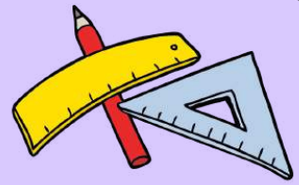
المفردات

التوزيع الاحتمالي المتصل
continuous probability distribution

التوزيع الطبيعي
normal distribution

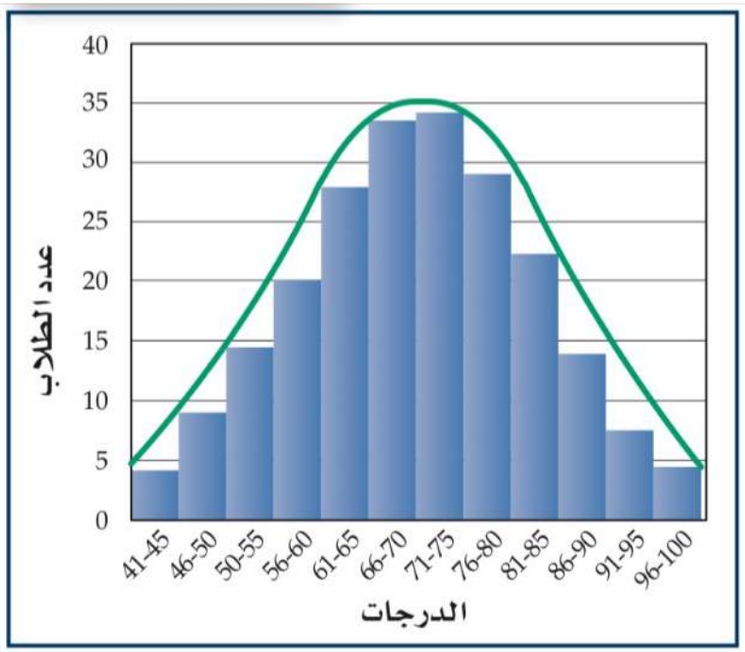
التوزيع الملتوي
skewed distribution





لماذا

مثَّل المعلم عبدالعزيز درجات طلاب مدرسته في مادة الرياضيات بيانيًّا كما هو مبيَّن في الشكل المجاور. لاحظ أن هناك تجمعًا لدرجات الطلاب في المنتصف، كما أن شكل التمثيل البياني لتوزيع الدرجات يشبه الجرس تقريبًا. إن مثل هذا التوزيع يسمى توزيعًا طبيعيًّا.

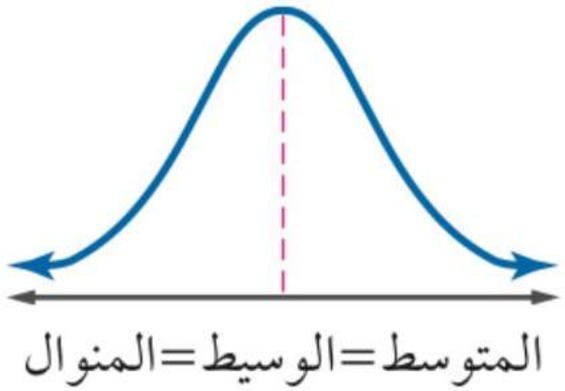


التوزيعات الطبيعية والملتوية في **التوزيع الاحتمالي المتصل** والذي هو توزيع احتمالي متغيره العشوائي متصل، يمكن للنواتج أن تأخذ أي قيمة في فترة من الأعداد الحقيقية، ومثال ذلك أطوال أشخاص وأوزانهم، ومستوى الدهنيات عند الأشخاص البالغين. وأفضل مثال على التوزيعات الاحتمالية المتصلة هو **التوزيع الطبيعي**.



مفهوم أساسي

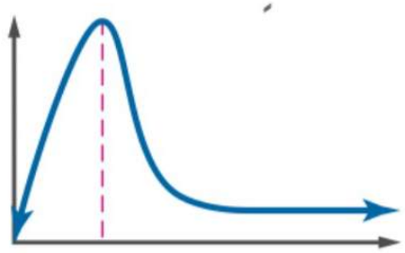
خصائص التوزيع الطبيعي



- التمثيل البياني له منحنى يشبه الجرس، ومتماثل حول المستقيم الرأسي المار بالمتوسط.
- يتساوى فيه المتوسط والوسيط والمنوال.
- المنحنى متصل.
- يقترب المنحنى من المحور x في جزأيه الموجب والسالب، ولكنه لا يمسه.

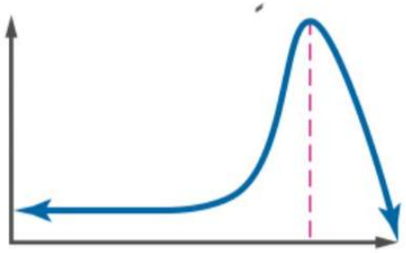
على الرغم من أن التوزيع الطبيعي متصل، فإن التوزيعات المنفصلة أيضًا يمكن أن يكون لها شكل التوزيع الطبيعي. ويمكن للتوزيعات أن تظهر بأشكال أخرى تُسمّى **توزيعات ملتوية**.

التواء موجب
(ملتوٍ إلى اليمين)



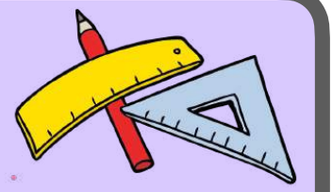
معظم البيانات تتركز في اليسار وقليل منها في اليمين.

التواء سالب
(ملتوٍ إلى اليسار)



معظم البيانات تتركز في اليمين وقليل منها في اليسار.





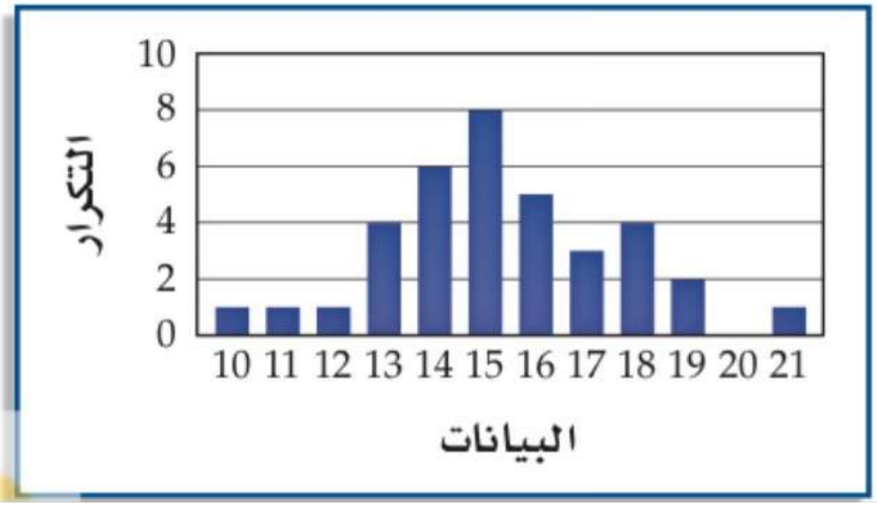
مثال ١ تصنيف بيانات التوزيع

حدِّد ما إذا كانت البيانات في الجدول التكراري أدناه تظهر التواءً موجبًا، أو التواءً سالبًا، أو موزَّعة توزيعًا طبيعيًّا:

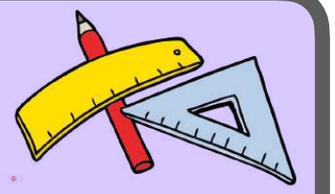
a)

البيانات	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	21
التكرار	1	1	1	4	6	8	5	3	4	2	1

استعمل الجدول التكراري أعلاه؛ لتمثيل البيانات بالأعمدة.
وبما أن التمثيل عالٍ في الوسط، ويبدو كأنه إلى حد ما متماثل حول المتوسط، فإن البيانات تُعتبر موزَّعة توزيعًا طبيعيًّا.







مثال ١ تصنيف بيانات التوزيع

إرشادات للدراسة

«منفصل» مقابل «متصل»

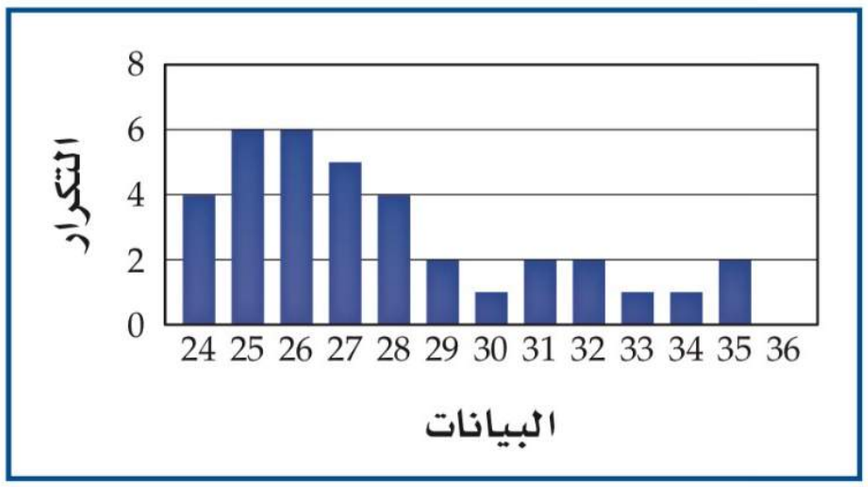
يأخذ التوزيع الاحتمالي المنفصل عددًا محدودًا من القيم، وغالبًا ما تكون أعدادًا صحيحة. أما التوزيع الاحتمالي المتصل، فيأخذ عددًا غير محدد من القيم تنتمي إلى فترة متصلة. وفي حالة التوزيع الاحتمالي المتصل يكون احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي قيمة واحدة فقط مساويًا للصفر .

حدِّد ما إذا كانت البيانات في الجدول التكراري أدناه تظهر التواءً موجبًا، أو التواءً سالبًا، أو موزَّعة توزيعًا طبيعيًّا:

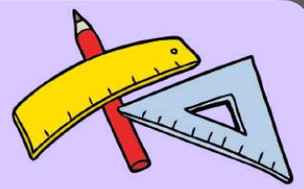
b)

البيانات	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
التكرار	4	6	6	5	4	2	1	2	2	1	1	2

استعمل الجدول التكراري أعلاه؛ لتمثيل البيانات بالأعمدة.
وبما أن التمثيل عالٍ في جهة اليسار ومنخفض في كل من الوسط وعلى اليمين، فإن التوزيع يبدو كأنه ملتوٍ إلى اليمين (التواء موجب).





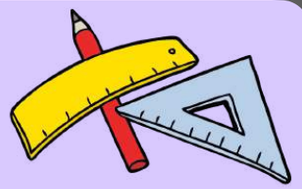


تحقق من فهمك

1) حدِّد ما إذا كانت البيانات في الجدول المجاور تُظهر التواءً موجبًا، أو التواءً سالبًا، أو موزَّعة توزيعًا طبيعيًّا.

قياس الحذاء	38	39	40	41	42	43	44	45
التكرار	6	8	9	7	4	2	3	1



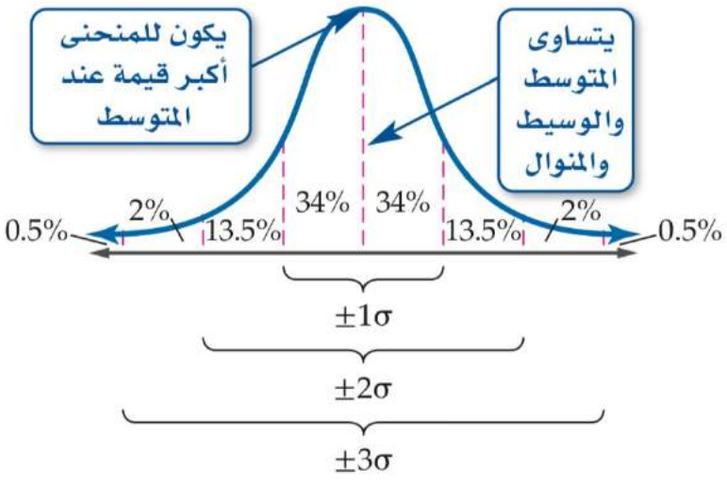


موضوع الدرس : التوزيع الطبيعي

القانون التجريبي إن المساحة بين قيمتين من البيانات تمثِّل نسبة البيانات التي تقع بين هاتين القيمتين. ويمكن أن يستعمل القانون التجريبي لوصف المساحات تحت المنحنى الطبيعي، والتي تقع ضمن انحراف أو انحرافين أو ثلاثة انحرافات معيارية من المتوسط.

مفهوم أساسي

القانون التجريبي



يتصف التوزيع الطبيعي الذي متوسطه μ وانحرافه المعياري σ بالخصائص الآتية:

- يقع 68% تقريبًا من البيانات ضمن الفترة $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$.

وهذا يعني أن 68% من البيانات لا يتجاوز بعدها عن المتوسط قيمة الانحراف المعياري.

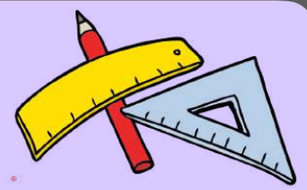
- يقع 95% تقريبًا من البيانات ضمن الفترة $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$.

وهذا يعني أن الغالبية العظمى من البيانات (95%) لا يتجاوز بعدها عن المتوسط ضعف قيمة الانحراف المعياري.

- يقع 99% تقريبًا من البيانات ضمن الفترة $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$.

وهذا يعني أن جميع البيانات تقريبًا (99%) لا يتجاوز بعدها عن المتوسط ثلاثة أمثال الانحراف المعياري.





مثال ٢ التوزيع الطبيعي

المتوسط لتوزيع طبيعي 34، وانحرافه المعياري 5. أوجد احتمال أن تزيد قيمة لـ X تم اختيارها عشوائيًّا في هذا التوزيع عن 24، (أي أوجد $P(X > 24)$).

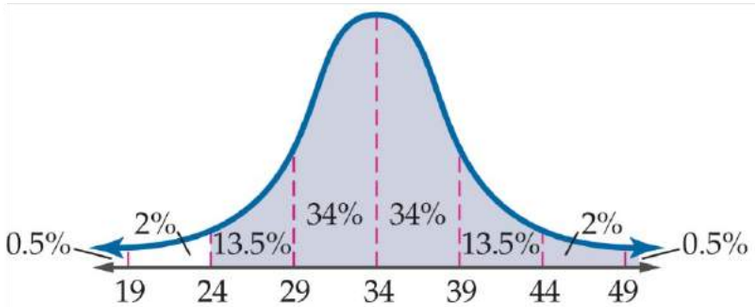
$\mu = 34\,,\ \sigma = 5$

الخطوة 1 أوجد القيم $\mu \pm \sigma\,,\ \mu \pm 2\sigma\,,\ \mu \pm 3\sigma$ (وهي المتوسط مضافًا إليه أو مطروحًا منه المضاعفات الثلاثة الأولى للانحراف المعياري).

$$\mu \pm \sigma = 34 \pm 5 = 29,\ 39$$
$$\mu \pm 2\sigma = 34 \pm 10 = 24,\ 44$$
$$\mu \pm 3\sigma = 34 \pm 15 = 19,\ 49$$

الخطوة 2 ارسم منحنى التوزيع الطبيعي، وحدِّد عليه المتوسط $\mu = 34$ والقيم السابقة.

الخطوة 3 ظلل المنطقة التي تمثل الاحتمال المطلوب.

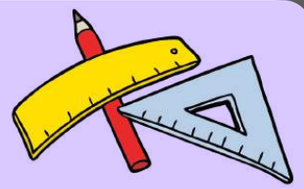


الخطوة 4 احسب الاحتمال المطلوب:

$$P(X > 24) = (13.5 + 34 + 34 + 13.5 + 2 + 0.5)\% = 97.5\%$$

إذن: $P(X > 24) \approx 97.5\%$

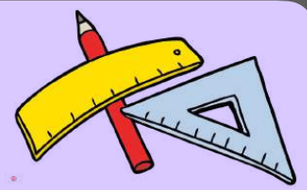




تحقق من فهمك

2) أوجد احتمال أن تكون قيمة تم اختيارها عشوائيًّا في التوزيع الوارد في المثال 2 أقل من 49.

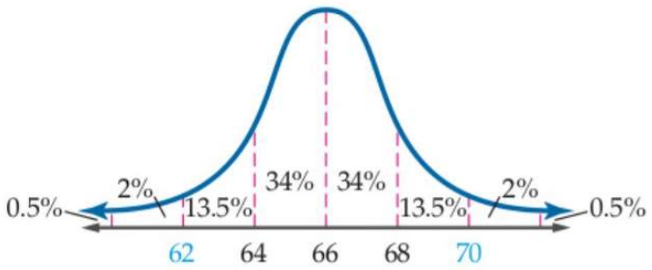




مثال ٣ من واقع الحياة عينة موزعة توزيعاً طبيعياً

أطوال: توزّع أطوال 1800 يافع توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط 66 in ، وانحراف معياري يساوي 2 in.

a) ما العدد التقريبي لليافعين الذين تتراوح أطوالهم بين 62 in و 70 in ؟

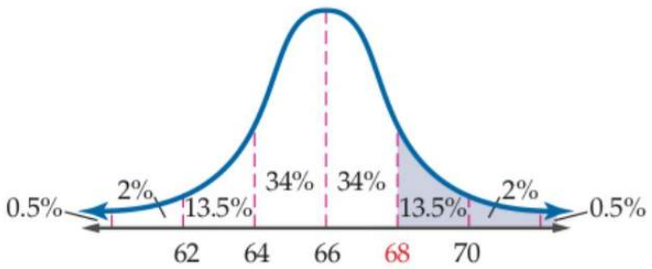


ارسم منحنى التوزيع الطبيعي.

تبعد كل من 62 , 70 عن المتوسط الحسابي انحرافين معياريين؛ لذا فإن 95% من البيانات واقعة بين الطولين 62 , 70.

ولأن $95\% \times 1800 = 1710$، لذا يوجد 1710 يافعين تقريبًا تقع أطوالهم بين 62 in و 70 in.

b) ما احتمال أن يتم اختيار أحد اليافعين عشوائيًّا، بحيث يزيد طوله على 68 in؟



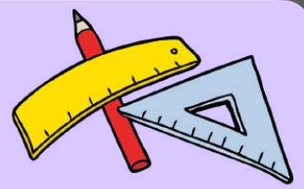
من الشكل المجاور، القيمة الأكبر من 68 تبعد أكثر من انحراف معياري واحد عن المتوسط الحسابي، وتتوزّع الأطوال على النحو الآتي: 13.5% بين انحراف معياري واحد وانحرافين معياريين، 2% بين انحرافين معياريين وثلاثة انحرافات معيارية، 0.5% فوق 3 انحرافات معيارية.

لذا فاحتمال اختيار يافع يكون طوله أكبر من 68 in

$(13.5 + 2 + 0.5)\% = 16\%$

إذن الاحتمال المطلوب يساوي 16% تقريبًا





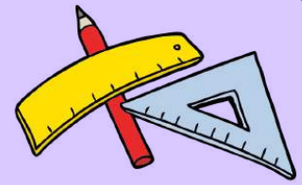
تحقق من فهمك

درجات: إذا علمت أن كتل 100 موظف في شركة تتوزَّع توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط حسابي مقداره 70 كيلوجرامًا، وانحراف معياري 10 كيلوجرامات، فاعتمد على ذلك في الإجابة عن السؤالين الآتيين :

3A) ما العدد التقريبي للموظفين الذين تقع كتلهم بين 60, 80 كيلوجرامًا؟

3B) ما احتمال أن يتمّ اختيار موظف بصورة عشوائية، وتكون كتلته أقل من 90 كيلوجرامًا؟







14) اكتشف الخطأ : تتوزّع أطوال أقطار نوع من الأشجار توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط مقداره 11.5 cm ، وانحراف معياري مقداره 2.5 cm ومدى من 3.6 cm إلى 19.8 cm ، وقد حاولت كل من مريم وأمينة إيجاد مدى 68% من البيانات التي تقع في وسط التوزيع. أيهما كانت إجابتها صحيحة؟ فسّر إجابتك.

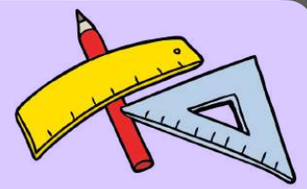
مريم

مدى البيانات 16.2cm ، 68% من المدى يساوي تقريبًا 11cm، ويتوزّع هذا المدى بالتساوي حول المتوسط 11.5cm، أي أن مدى 68% سيكون من 6 cm إلى 17 cm

أمينة

تمتد النسبة 68% من $\mu + \sigma$ إلى $\mu - \sigma$ أي أن مدى 68% سيكون من 9 cm إلى 14 cm







17) **تبرير:** بحسب القانون التجريبي، فإن معظم البيانات في التوزيع الطبيعي تقع ضمن الفترة $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$. هل هذا صحيح أم خاطئ؟ برِّر إجابتك.





بات الحُلم قريباً

التوزيعات ذات الحدين





فيما سبق

درست استعمال نظرية ذات الحدين. (مهارة سابقة)

والآن

- أميِّز تجربة ذات الحدين.
- أجد الاحتمالات باستعمال التوزيع ذي الحدين ومفكوكه.

المفردات

تجربة ذات الحدين
binomial experiment

التوزيع ذو الحدين
binomial distribution



عروض رياضيات ٦ كامل
اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

بات الحُلم قريباً



لماذا ؟

في لعبة الكرة الطائرة تبين أن اللاعب سلمان ينجح في لعب الإرسال الساحق الذي لا يصده الخصم في 36% من محاولاته، وبذلك يحصل فريقه على نقطة في كل مرة ينجح فيها.



التوزيع ذو الحدين كثير من التجارب الاحتمالية يكون لها نتيجتان فقط؛ نجاح أو فشل أو يمكن جعلها كذلك. فمثلًا في مسائل الاختيار من متعدد التي لها 5 إجابات، يمكن تصنيف نتائج الإجابة عن كل فقرة إلى صح، أو خطأ، ويمكن تصنيف نتائج دواء طبي على أنه فعّال أو غير فعّال.





مفهوم أساسي

تجربة ذات الحدين

تجربة ذات الحدين هي تجربة احتمالية تحقق الشروط الآتية:

- يُعاد إجراء التجربة لعدد محدد(n) من المحاولات المستقلة (المرات) .
- كل محاولة لها فقط نتيجتان متوقعتان؛ نجاح S ، أو فشل F .
- $P(S)$ "ويرمز له بالحرف p" هو نفسه في كل محاولة. واحتمال الفشل $P(F)$ "ويرمز له بالحرف q" هو نفسه في كل محاولة ويساوي $1 - p$.

ويُمثّل المتغير العشوائي X عدد مرات النجاح في n من المحاولات.



عروض رياضيات ٦ كامل
اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math



بات الحُلم قريباً

مثال ١ : تمييز التجربة ذات الحدين

حدّد ما إذا كانت كل تجربة مما يأتي ذات حدين، أو يمكن جعلها كذلك. وإذا كانت تجربة ذات حدين، فاكتب قيم n, p, q ، وقيم المتغير العشوائي الممكنة، وإذا لم تكن كذلك فبيِّن السبب.

a) تُبيّن نتيجة لمسح إحصائي داخل إحدى المدارس أن 68% من الطلاب يمتلكون حاسبة بيانية. إذا تم اختيار **6 طلاب عشوائيًّا، وسؤالهم عمَّا إذا كانوا يمتلكون هذه الآلة؛ وكان المتغير العشوائي X يُمثّل عدد الطلاب الذين يملكون الحاسبة البيانية، فإن:**

هذه التجربة تحقق شروط تجربة ذات الحدين وهي:

- كل طالب تم اختياره يُمثّل محاولة، وعملية اختيار الطلاب الستة تتكون من محاولات مستقلة.
- للتجربة نتيجتان متوقعتان: الطالب يملك الحاسبة البيانية S، أو لا يملكها F .
- احتمال النجاح نفسه لكل طالب تم اختياره $P(S) = 0.68$.

وفي هذه التجربة $n = 6 , p = P(S) = 0.68$. احتمال الفشل $q = 1 - p$ ، أي أن:

$q = 1 - 0.68 = 0.32$. ويُمثّل X عدد الطلاب الذين يملكون حاسبة بيانية من الّذين تم اختيارهم، أي أن:

$X = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$



عروض رياضيات ٦ كامل
shikhah_math اعداد: شيخة المرزوقي



بات الحُلم قريباً

مثال ١ : تمييز التجربة ذات الحدين

b) يحتوي صندوق على 52 بطاقة، وخُصّص لكل 13 بطاقة أحد الألوان الآتية: الأحمر، الأسود، الأخضر، الأبيض. سحبت منه 5 بطاقات الواحدة تلو الأخرى دون إرجاع. وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد البطاقات المسحوبة ذات اللون الأخضر.

في هذه التجربة، كل بطاقة يتم سحبها تُمثّل محاولة، وبما أنه يتم الاحتفاظ بالبطاقة التي تم اختيارها (السحب دون إرجاع)، فإن المحاولات غير مستقلة، واحتمال النجاح في كل محاولة يختلف عن الأخرى؛ لذا فإن هذه التجربة ليست ذات حدين.





بات الحُلم قريباً

تحقق من فهمك :

حدّد ما إذا كانت كل تجربة مما يأتي ذات حدين، أو يمكن جعلها كذلك. وإذا كانت تجربة ذات حدين، فاكتب قيم n, p, q ، وقيم المتغير العشوائي الممكنة، وإذا لم تكن كذلك فبيِّن السبب.

1A) أظهرت نتيجة لمسح إحصائي في إحدى المدارس ذات الزي الموحَّد أن 61% يحبون الزي الجديد، وأن 24% لا يحبونه. إذا تم اختيار 20 طالبًا بشكل عشوائي، وسؤالهم عمَّا إذا كانوا يحبون الزي الجديد. وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد الطلاب الذين يحبون الزي الجديد.





بات الحلم قريباً

تحقق من فهمك :

1B) أجاب خالد عن اختبار مكوّن من 20 فقرة من نوع «الاختيار من متعدد» لكل فقرة منها أربع إجابات، واحدة فقط صحيحة (دون معرفة علمية بموضوع الاختبار). وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد الإجابات الصحيحة.



بات الحُلم قريباً



يُسمى توزيع النتائج المتوقَّعة لتجربة ذات حدين والاحتمالات المرتبطة بها **توزيع ذات الحدين**. ويمكن حساب الاحتمالات في هذا التوزيع باستعمال الصيغة ${}_nC_X p^X q^{n-X}$ التي تمثل حدًّا في مفكوك $(p+q)^n$.

مفهوم أساسي

صيغة احتمال ذات الحدين

احتمال النجاح في X مرة من n من المحاولات المستقلة في تجربة ذات الحدين هو:

$$P(X) = {}_nC_X\, p^X q^{n-X} = \frac{n!}{(n-X)!X!}\, p^X q^{n-X}$$

حيث p احتمال النجاح، وq احتمال الفشل في المحاولة الواحدة.



عروض رياضيات ١ كامل
اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math



بات الحُلم قريباً

مثال من واقع الحياة ٢ : التوزيع ذو الحدين

اختبار: في اختبار نهائي، أكد 35% من الطلاب أنهم أجابوا بشكل اعتيادي. إذا اختير 5 طلاب عشوائيًّا، وتم سؤالهم عما إذا أدوا الاختبار بشكل اعتيادي. وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد الطلاب الذين أجابوا بنعم عن السؤال ، فكوِّن جدولًا للتوزيع ذي الحدين، ومثّله بالأعمدة، ثم أوجد احتمال أن يجيب 3 طلاب على الأقل عن السؤال بنعم.

هذه تجربة ذات حدين فيها: $n = 5, p = 0.35, q = 1 - 0.35 = 0.65$. استعمل الحاسبة البيانية TI-nspire؛ لحساب احتمال كل قيمة ممكنة من قيم X مستعملًا صيغة احتمال ذات الحدين.

$$P(0) = {}_5C_0 \cdot 0.35^0 \cdot 0.65^5 \approx 0.116$$

$$P(1) = {}_5C_1 \cdot 0.35^1 \cdot 0.65^4 \approx 0.312$$

$$P(2) = {}_5C_2 \cdot 0.35^2 \cdot 0.65^3 \approx 0.336$$

$$P(3) = {}_5C_3 \cdot 0.35^3 \cdot 0.65^2 \approx 0.181$$

$$P(4) = {}_5C_4 \cdot 0.35^4 \cdot 0.65^1 \approx 0.049$$

$$P(5) = {}_5C_5 \cdot 0.35^5 \cdot 0.65^0 \approx 0.005$$

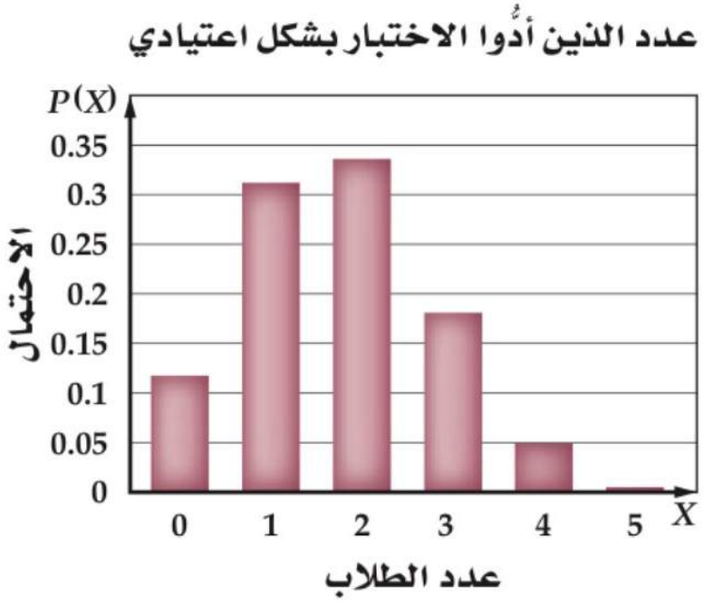
وفيما يأتي جدول التوزيع ذي الحدين للمتغير X ، وتمثيله بالأعمدة.



بات الحُلم قريباً



مثال من واقع الحياة ٢ : التوزيع ذو الحدين



X	$P(X)$
0	0.116
1	0.312
2	0.336
3	0.181
4	0.049
5	0.005

لإيجاد احتمال أن 3 طلاب على الأقل أجابوا بنعم، أوجد $P(3) + P(4) + P(5)$.

احتمال 3 طلاب على الأقل $P(X \geq 3) = P(3) + P(4) + P(5)$

$P(3) = 0.181, P(4) = 0.049, P(5) = 0.005$ $= 0.181 + 0.049 + 0.005$

بسّط $= 0.235 = 23.5\%$



بات الحُلم قريباً

تحقق من فهمك :

2) **كليات:** يدرس في إحدى الكليات 48% من الطلاب لغة عالمية خلال سنة التخرج. إذا اختير 7 خريجين عشوائيًّا، وتم سؤالهم عمَّا إذا درسوا لغة عالمية في سنتهم الأخيرة. وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد الطلاب الذين أجابوا بنعم، فكوِّن التوزيع ذا الحدين، ومثِّله بالأعمدة، ثم أوجد احتمال أن يجيب أقل من 4 طلاب بنعم.





بات الحُلم قريباً

تستعمل الصيغ الآتية؛ لإيجاد المتوسط والتباين والانحراف المعياري للتوزيع ذي الحدين.

مفهوم أساسي

المتوسط والتباين والانحراف المعياري للتوزيع ذي الحدين

يحسب المتوسط والتباين والانحراف المعياري لمتغير عشوائي X في التوزيع ذي الحدين بالصيغ الآتية:

المتوسط $\mu = np$

التباين $\sigma^2 = npq$

الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{npq}$





بات الحُلم قريباً

مثال ٣ : المتوسط والتباين والانحراف المعياري للتوزيع ذي الحدين

اختبار: بالرجوع إلى تجربة ذات الحدين في المثال 2 . أوجد المتوسط والتباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X، ثُمَّ فسّر معنى المتوسط في سياق الموقف.

استعمل صيغ المتوسط والتباين والانحراف المعياري للتوزيع ذي الحدين. في هذه التجربة ذات الحدين $n = 5, p = 0.35, q = 0.65$.

$$\begin{aligned}\mu &= np \\ &= 5(0.35) = 1.75\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= npq \\ &= 5(0.35)(0.65) = 1.1375\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{\sigma^2} \\ &= \sqrt{1.1375} \simeq 1.0665\end{aligned}$$

متوسط التوزيع يساوي 1.8 تقريبًا، ويعني أن خريجَين تقريبًا من أصل 5 أجابوا بنعم. كل من التباين والانحراف المعياري يساوي 1.1 تقريبًا.





بات الحُلم قريباً

تحقق من فهمك :

3) **كليات:** أوجد المتوسط والتباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X في تحقق من فهمك 2 ، وفسّر معنى المتوسط في سياق الموقف.





بات الحُلم قريباً

عندما يزداد عدد المحاولات في تجربة ذات الحدين، يمكن استعمال التوزيع الطبيعي لتقريب التوزيع ذي الحدين.

مفهوم أساسي

تقريب التوزيع ذي الحدين إلى التوزيع الطبيعي

في التوزيع ذي الحدين عندما تُمثّل n عدد المحاولات ، واحتمال النجاح p ، واحتمال الفشل q ، ويكون $n\,p \geq 5, n\,q \geq 5$ ، يمكن تقريب التوزيع ذي الحدين إلى توزيع طبيعي بمتوسط $\mu = np$ ، وانحراف معياري $\sigma = \sqrt{npq}$.



عروض رياضيات ٢ كامل
shikhah_math اعداد: شيخة المرزوقي



بات الحلم قريباً

مثال ٤ : تقريب توزيع ذي الحدين إلى التوزيع الطبيعي

أشارت دراسة سابقة إلى أن 64% من الخريجين يرون أن سنوات الجامعة كانت ممتعة. وقد نفّذ بلال دراسة مسحية على 300 من هؤلاء الخريجين اختارهم عشوائيًّا. ما احتمال أن يوافق 200 خريج منهم على الأقل على ما جاء في الدراسة الإحصائية السابقة؟

في الدراسة المسحية التي نفَّذها بلال، عدد الخريجين الذين يرون أن سنوات الجامعة كانت ممتعة يتبع التوزيع ذا الحدين، حيث:

$$n = 300, p = 0.64, q = 0.36$$

وحيث إن:

$$n\,p = 300\,(0.64) = 192 > 5$$

$$n\,q = 300\,(0.36) = 108 > 5$$

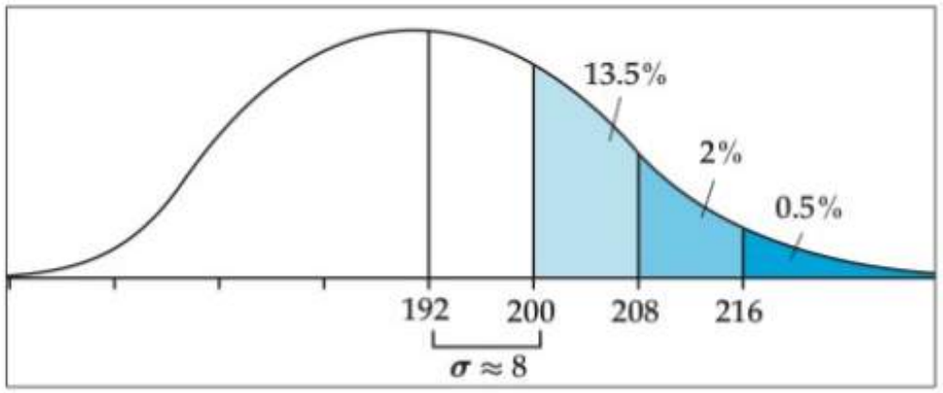




بات الحُلم قريباً

مثال ٤ : تقريب توزيع ذي الحدين إلى التوزيع الطبيعي

يمكنك استعمال التوزيع الطبيعي لتقريب الاحتمال على النحو الآتي:



المتوسط للتوزيع الطبيعي	$\mu = n\,p$
$n = 300\,,\ p = 0.64$	$= 300(0.64) = 192$
الانحراف المعياري للتوزيع الطبيعي	$\sigma = \sqrt{n\,p\,q}$
$n = 300,\ p = 0.64,\ q = 0.36$	$= \sqrt{300(0.64)(0.36)}$
استعمل الآلة الحاسبة	≈ 8.31

العدد 200 أكبر من المتوسط بمقدار انحراف معياري واحد تقريبًا كما هو مبين في الرسم أعلاه؛ لذا يكون احتمال أن يوافق 200 خريج منهم على الأقل يساوي 16% تقريبًا.





تحقق من فهمك :

4) أشارت دراسة سابقة إلى أن 32% من أولياء الأمور المستطلعة آراؤهم يرون أنه يجب تقليل عدد أيام الإجازة الصيفية للطلاب في نهاية العام الدراسي. غير أن آية ترى أن النسبة أقل من ذلك، ولذلك قامت بإجراء دراسة مسحية شملت 250 من أولياء الأمور اختارتهم بطريقة عشوائية ممن استهدفتهم الدراسة السابقة. ما احتمال ألَّا يرى أكثر من 65 من أولياء الأمور وجوبَ تقليلِ عدد أيام الإجازة الصيفية؟





مسائل مهارات التفكير العليا

25) **تبرير:** حدّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا. وبرّر إجابتك. « من الأفضل أن تجد احتمال الفشل وتطرحه من 1 لتجد احتمال النجاح ».





تدريب على اختبار

34) إذا كان احتمال نجاح عملية جراحية 90% ، فما احتمال نجاح عملية واحدة على الأقل إذا أُجريت العملية ثلاث مرات؟

A) 0.001 **B)** 0.1

C) 0.9 **D)** 0.999



الفصل الثامن:

النهايات والاشتقاق

لا تدع أول مشكلة تحطم حلمك استفد من تجربتك..و ابدأ من جديد..



النهايات والاشتقاق

التهيئة

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

فيما سبق

درستُ النهايات ومُعدلات التغيّر.

والآن

- أَحسبُ نهايات دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية.
- أَجدُ مُعدلات التغيّر اللحظية.
- أَجدُ مشتقات دوال كثيرات الحدود، وأحسب قيمها.
- أجد المساحة تحت منحنى دالة باستعمالِ التكامل المحدد.
- أجد الدالة الأصلية، وأستعمل النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل في إيجاد التكامل المحدد.

لماذا

الأفعوانية : يُعد الاشتقاق وسيلة فاعلة ومهمة عند دراسة مُعدلات التغيّر غير الثابتة ، فإذا ركبت الأفعوانية يومًا ، فإن سرعتك وتسارعك يتغيران باستمرار مع الزمن بالاعتماد على موقعك، وستدرس في هذا الفصل مسائل تحتوي مواقف مشابهة.



مراجعة المفردات

النهاية (limit)

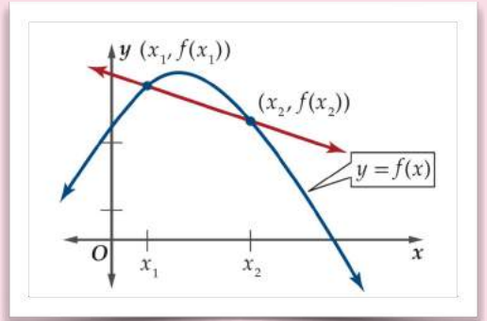
الاقتراب من قيمة دون الوصول إليها بالضرورة.

عدم الاتصال القابل للإزالة (removable discontinuity)

نقاط عدم اتصال قابلة للإزالة تحدث غالبًا عندما يكون بين بسط ومقام الدالة النسبية عوامل مشتركة.

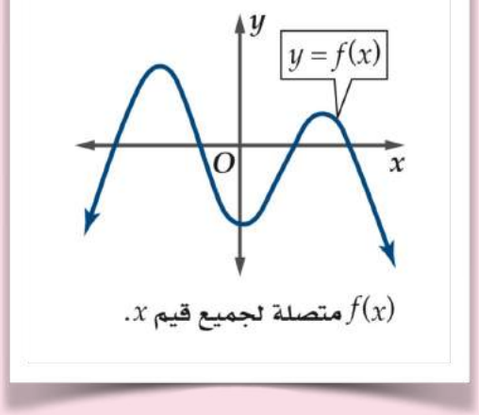
متوسط معدل التغير (average rate of change)

متوسط معدل التغير بين نقطتين على منحنى الدالة $f(x)$ هو ميل المستقيم المار بهاتين النقطتين.



الدالة المتصلة (continuous function)

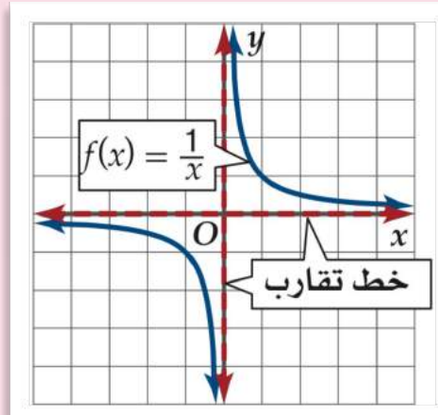
تكون الدالة متصلة إذا لم يكن في تمثيلها البياني أي انقطاع أو قفزة.



$f(x)$ متصلة لجميع قيم x.

خطوط التقارب (asymptotes)

خط يقترب من منحنى الدالة دون أن يصله.



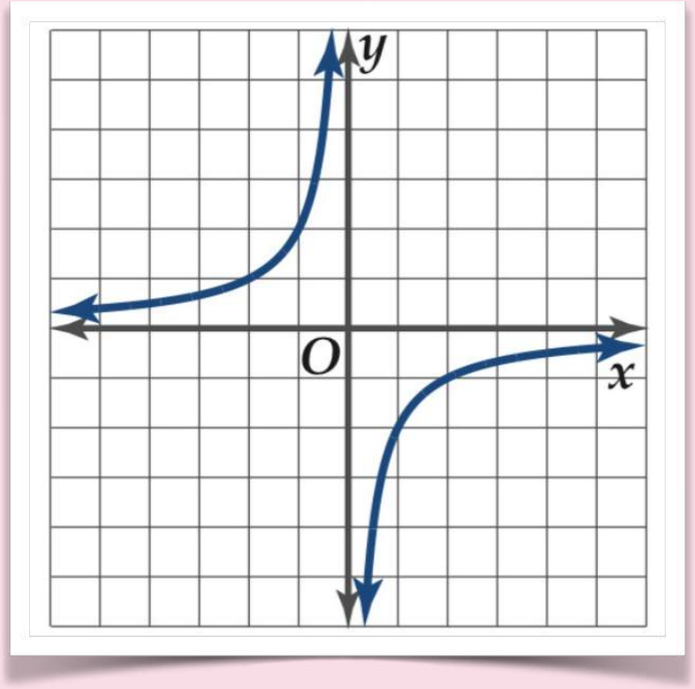
اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

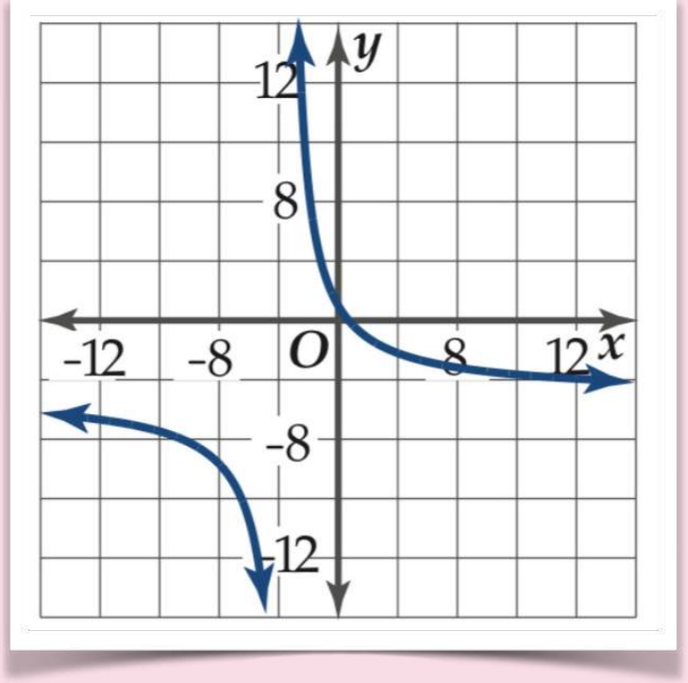
اختبار سريع

استعمل التمثيل البياني لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي:

1) $q(x) = -\frac{2}{x}$

2) $m(x) = \frac{7 - 10x}{2x + 7}$





اختبار سريع

3) **صناعة :** يمكن تقدير معدل التكلفة بالريال لإنتاج x قطعة من منتج ما باستعمال الدالة $A(x) = \frac{1700}{x} + 1200$. صف سلوك الدالة باستعمال التمثيل البياني للحاسبة البيانية عندما تقترب x من موجب مالانهاية.

اختبار سريع

4) أوجد متوسط مُعدّل تغيّر الدالة $f(x) = -2x^3 - 5x^2 + 6$ ، على الفترة $[-4, -1]$

اختبار سريع

أوجد معادلات خطوط التقارب الرأسية والأفقية (إن وجدت) لكل دالة مما يأتي:

5 $f(x) = \dfrac{4x^2}{2x^2 + 1}$

6 $h(x) = \dfrac{2x^2 - 8}{x - 10}$

7 $f(x) = \dfrac{(x - 1)(x + 5)}{(x + 2)(x - 4)}$

8 $g(x) = \dfrac{x^2 - 16}{(x - 2)(x + 4)}$

اختبار سريع

أوجد الحدود الأربعة التالية في كل متتابعة مما يأتي:

9) $8, 3, -2, -7, \ldots$

10) $5, -1, -7, -13, \ldots$

11) $5, -10, 20, -40, \ldots$

12) $-28, -21, -14, -7, \ldots$

لن تكون عظيماً حتى تملأ عقلك بالعلم النافع ، وحياتك بالعمل الصارق..

تقدير النهايات بيانياً

موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

المفردات :

النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

النهاية من جهتين
two-sided limit



لماذا ؟

هل هناك نهايات للأرقام المسجَّلة في المسابقات الرياضية لا يمكن تجاوزها؟ لقد كان الرقم القياسي المسجَّل في دورة الألعاب المقامة في بكين عام 2008 م لمسابقة الوثب بالزانة 5.05 m. ويمكن استعمال الدالة:

$f(x) = \dfrac{5.334}{1 + 62548.213\,(2.7)^{-0.129x}}$ لتقدير الرقم القياسي الذي تم تسجيله في هذه الرياضة للأعوام بين 1996 م و2008 م ، حيث x عدد السنوات منذ عام 1900 م ، يمكنك استعمال نهاية هذه الدالة عندما تقترب x من المالانهاية؛ للتنبؤ بأكبر رقم يمكن تسجيله.

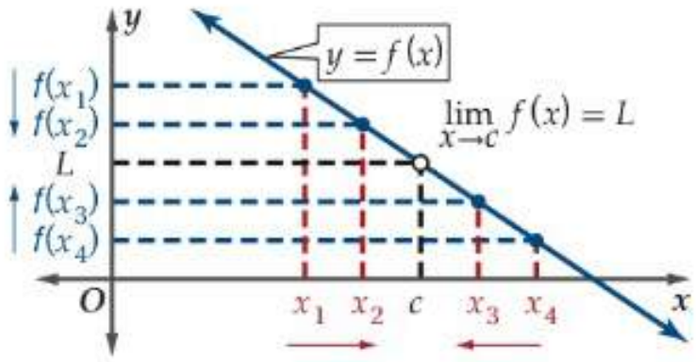
تقدير النهايات عند قيم محددة : يتمحور علمُ التفاضلِ والتكاملِ حول مسألتين أساسيتين:

- إيجاد معادلة مماس منحنى دالة عند نقطة واقعة عليه.
- إيجاد مساحة المنطقة الواقعة بين التمثيل البياني لدالة والمحور x.

وتُعدُّ مفاهيم النهايات أساسية لحل هاتين المسألتين.

تعلمت سابقًا أنه إذا اقتربت قيم $f(x)$ من قيمة وحيدة L، كلما اقتربت قيم x من العدد c من كلا الجهتين ، فإن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L ، وتكتب على الصورة $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

يمكنك تطبيق مفهوم النهاية لتقدير نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من العدد c؛ أي $\lim_{x \to c} f(x)$، وذلك من خلال تمثيل الدالة بيانيًّا، أو إنشاء جدولٍ لقيم $f(x)$.





موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

المفردات :

النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

النهاية من جهتين
two-sided limit

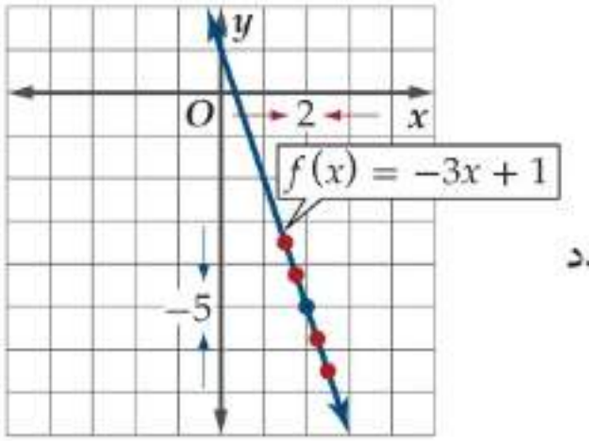
مثال ١ : تقدير النهاية (النهاية تساوي قيمة الدالة)

قدِّر $\lim_{x\to 2}(-3x+1)$ باستعمال التمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك باستعمال جدول قيم.

التحليل بيانيًّا : مثِّل الدالة الخطية $y=-3x+1$ بيانيًّا باستعمال النقطتين $(-2, 1), (1, -2)$.

يُبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x)=-3x+1$، أنه كلما اقتربت x من العدد 2، فإن قيم $f(x)$ المقابلة تقترب من العدد -5 ؛ لذا فإن بإمكاننا تقدير أن :

$$\lim_{x\to 2}(-3x+1)=-5 .$$



التعزيز عدديًّا : كوّن جدولًا لقيم $f(x)$، وذلك باختيار قيم x القريبة من العدد 2 من كلا الجهتين.

	x تقترب من 2 ←				→ x تقترب من 2		
x	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	−4.7	−4.97	−4.997		−5.003	−5.03	−5.3

يبيِّن نمط قيم $f(x)$ أنه كلما اقتربت x من العدد 2 من اليمين أو من اليسار، فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد -5 ، وذلك يعزِّز تحليلنا البياني.



موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

المفردات :

النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

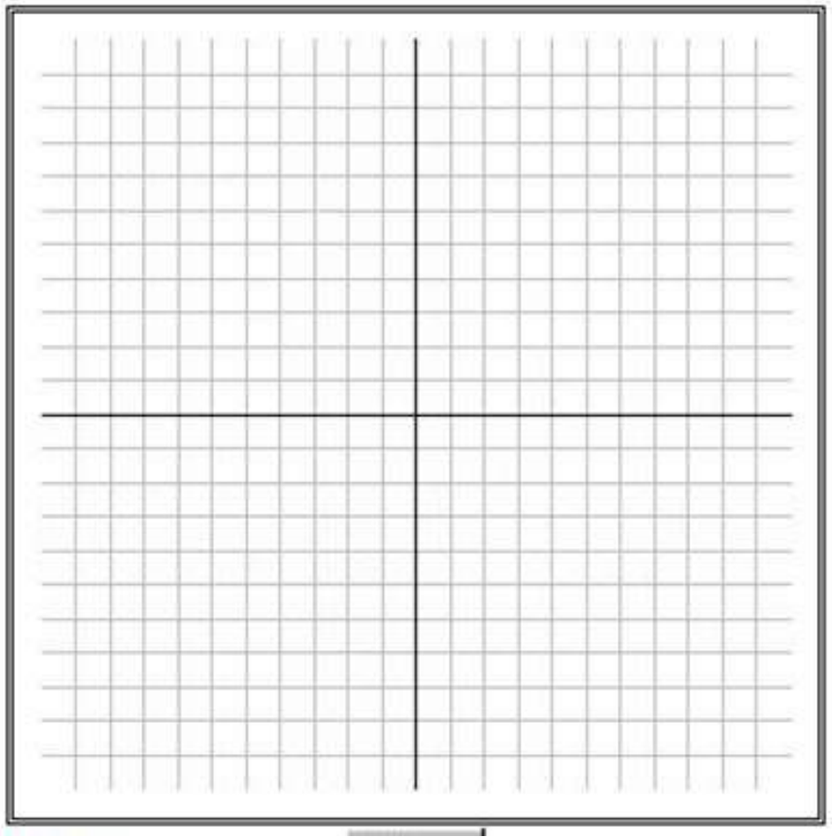
النهاية من جهتين
two-sided limit

تحقق من فهمك

قدِّر كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك باستعمال جدول قيمٍ.

(1A $\lim_{x \to -3} (1 - 5x)$

التحليل بيانياً



التعزيز العددي

x تقترب من 2 ←					→ x تقترب من 2		
x							
$f(x)$							



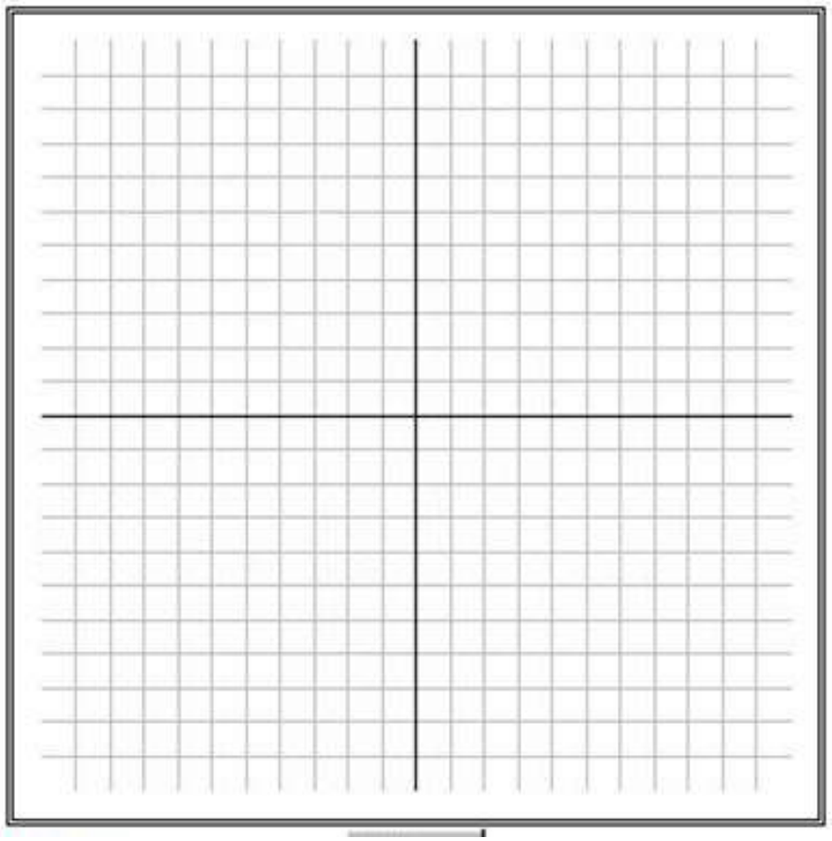


تحقق من فهمك

قدِّر كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك باستعمال جدول قيمٍ.

1B) $\lim_{x \to 1} (x^2 - 1)$

التحليل بيانياً



التعزيز العددي

x تقترب من 2 ←							→ x تقترب من 2
x							
$f(x)$							
→							←



موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

المفردات :

النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

النهاية من جهتين
two-sided limit

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math



مثال ٢ : تقدير النهاية (النهاية لاتساوي قيمة الدالة)

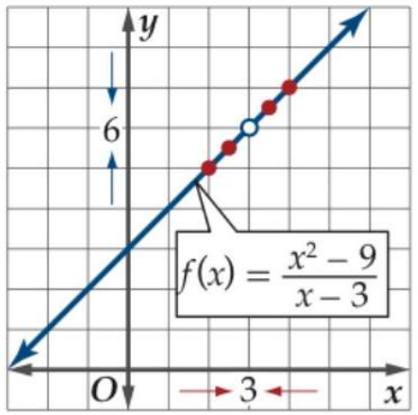
قدِّر $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$ باستعمال التمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك باستعمال جدولِ قيم.

التحليل بيانيًا :

مجال الدالة $R-\{3\}$

يُبيِّن التمثيل البياني للدالة $f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$ المجاور، أنه كلما اقتربت x من العدد 3 ، فإن قيمة $f(x)$ المقابلة لها تقترب من العدد 6 ؛ لذا فإن بإمكاننا تقدير أن:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$



التعزيز عدديًا :

كوّن جدولًا لقيم $f(x)$، وذلك باختيار قيم x القريبة من العدد 3 من كلا الجهتين.

x تقترب من 3 ← ، → x تقترب من 3

x	2.9	2.99	2.999	3	3.001	3.01	3.1
$f(x)$	5.9	5.99	5.999		6.001	6.01	6.1

يُبيّن نمط قيم $f(x)$ ، أنه كلما اقتربت قيم x من العدد 3 ، فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 6 ، وذلك يعزِّز تحليلنا البياني.



موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

المفردات :

النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

النهاية من جهتين
two-sided limit

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math



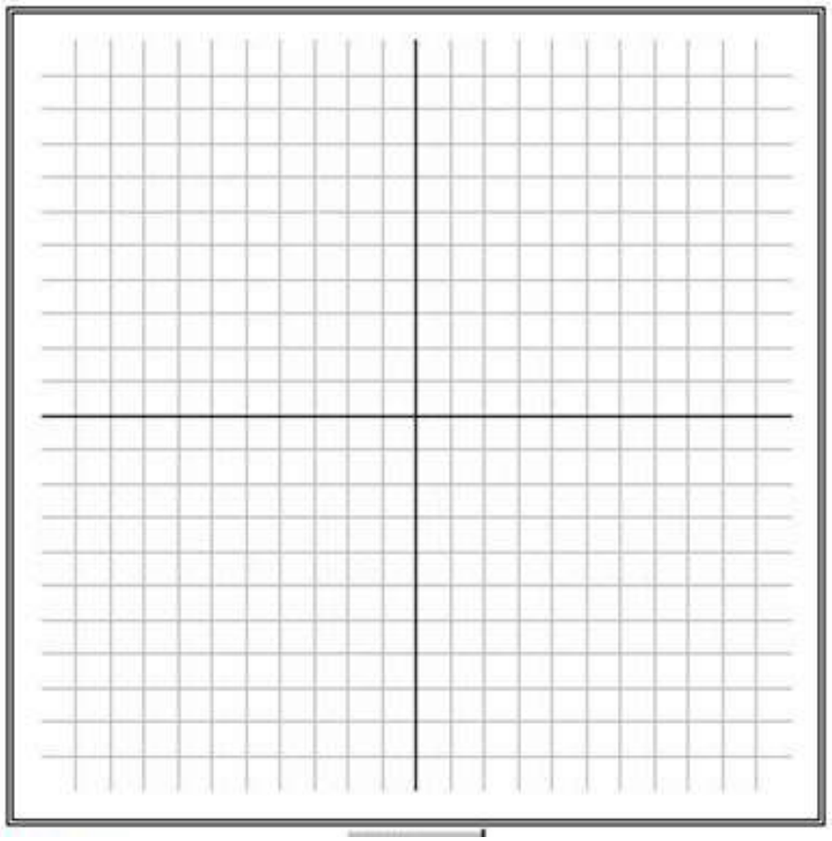
تحقق من فهمك

قدِّر كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك باستعمال جدول قيمٍ.

(2A $\lim_{x \to -2} \frac{x+2}{x^2-4}$

التحليل بيانياً

التعزيز العددي



x							
$f(x)$							

x تقترب من 2 ←

→ x تقترب من 2



موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

المفردات :

النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

النهاية من جهتين
two-sided limit

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math



موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

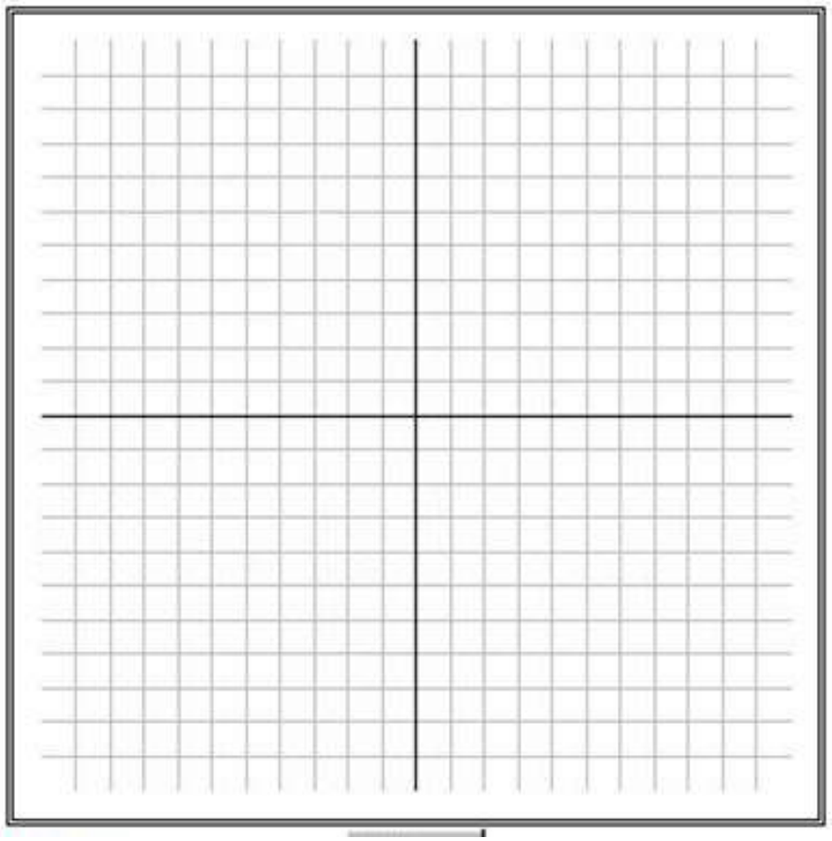


تحقق من فهمك

قدِّر كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك باستعمال جدول قيمٍ.

(2B $\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 4x - 5}{x - 5}$

التحليل بيانياً



التعزيز العددي

	x تقترب من 2 ←				→ x تقترب من 2		
x							
$f(x)$							



فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

والآن :

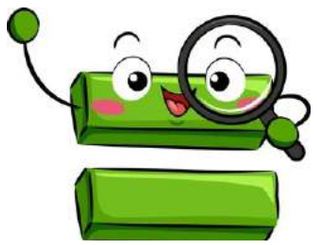
- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

المفردات :

النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

النهاية من جهتين
two-sided limit

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

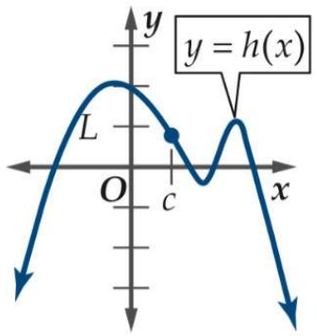


في المثال 2 ، لاحظ أن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 6 عند اقتراب قيم x من العدد 3، على الرغم من أن $f(3) \neq 6$.
فالعبارة $\frac{x^2-9}{x-3}$ غير معرّفة عندما $x = 3$. وهذه الملاحظة توضِّح مفهومًا مهمًّا في النهايات.

مفهوم أساسي — عدم اعتماد النهاية على قيمة الدالة عند نقطة

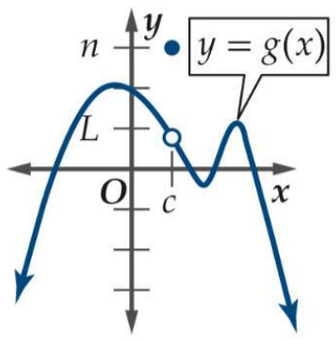
التعبير اللفظي: لا تعتمد نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من العدد c على قيمة الدالة عند c.

الأمثلة:



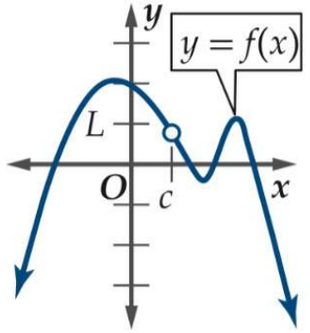
$\lim_{x \to c} h(x) = L$

$h(c) = L$



$\lim_{x \to c} g(x) = L$

$g(c) = n$



$\lim_{x \to c} f(x) = L$

$f(c)$ غير معرفة

إن النهاية عند عدد لا تعني قيمة الدالة عند ذلك العدد، وإنما قيمة الدالة عندما تقترب x من ذلك العدد.



موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

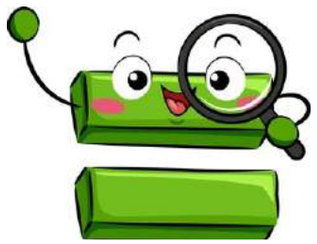
والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

المفردات :

النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

النهاية من جهتين
two-sided limit



لاحظ أننا عندما نقدِّر النهاية باستعمال التمثيل البياني أو جدول القيم، فإننا نبحث عن قيمة $f(x)$ عندما تقترب x من c من كلا الجهتين. ويمكننا إيجاز وصف سلوك التمثيل البياني عن يمين عدد أو عن يساره بمفردة **النهاية من جهةٍ واحدة**.

مفهوم أساسي — النهايات من جهة واحدة

النهاية من اليمين

إذا اقتربت قيم $f(x)$ من قيمة وحيدة L_1، عند اقتراب قيم x من العدد c من اليمين، فإن:

$\lim_{x \to c^+} f(x) = L_1$ ، وتقرأ:

نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c من اليمين هي L_1

النهاية من اليسار

إذا اقتربت قيم $f(x)$ من قيمة وحيدة L_2، عند اقتراب قيم x من العدد c من اليسار، فإن:

$\lim_{x \to c^-} f(x) = L_2$ ، وتُقرأ:

نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c من اليسار هي L_2



موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

والآن :

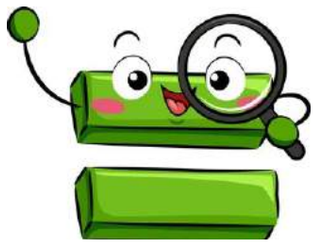
- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

المفردات :

النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

النهاية من جهتين
two-sided limit

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math



يمكننا باستعمال هذين التعريفين إيجاز ما تعنيه مفردة **النهاية من جهتين** ، وما يعنيه كونها موجودة.

مفهوم أساسي — النهاية عند نقطة

تكون نهاية $f(x)$ موجودة عندما تقترب x من c ، إذا وفقط إذا كانت النهايتان من اليمين واليسار موجودتين ومتساويتين، أي أنه:

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x) = L \text{ ،}$$

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \text{ إذا وفقط إذا كان}$$



موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

المفردات :

النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

النهاية من جهتين
two-sided limit

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math



مثال ٣ : تقدير النهاية من جهة واحدة ومن جهتين

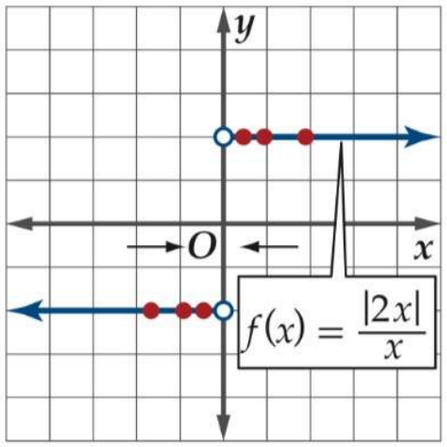
قدِّر إن أمكن كلًّا من النهايات الآتية باستعمال التمثيل البياني للدالة:

(a $\lim_{x\to0^-}\frac{|2x|}{x}$, $\lim_{x\to0^+}\frac{|2x|}{x}$, $\lim_{x\to0}\frac{|2x|}{x}$

يُبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x)=\frac{|2x|}{x}$ أن:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{|2x|}{x}=2 \quad , \quad \lim_{x\to0^-}\frac{|2x|}{x}=-2$$

وبما أن النهايتين من اليسار واليمين غير متساويتين ، فإن $\lim_{x\to0}\frac{|2x|}{x}$ غير موجودة.

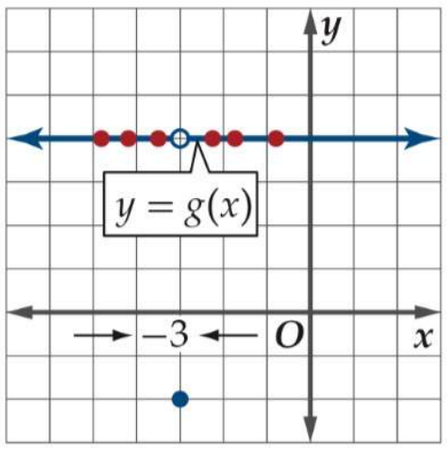


(b $\lim_{x\to-3^-}g(x)$, $\lim_{x\to-3^+}g(x)$, $\lim_{x\to-3}g(x)$ ، حيث $g(x)=\begin{cases}4 & , \ x\neq-3\\ -2 & , \ x=-3\end{cases}$

يُبيّن التمثيل البياني للدالة $g(x)$ أن:

$$\lim_{x\to-3^+}g(x)=4 \quad , \quad \lim_{x\to-3^-}g(x)=4$$

وبما أن النهايتين من اليسار ومن اليمين متساويتان ، فإن $\lim_{x\to-3}g(x)$ موجودة وتساوي 4.





موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

المفردات :

النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

النهاية من جهتين
two-sided limit

موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

المفردات :

النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

النهاية من جهتين
two-sided limit

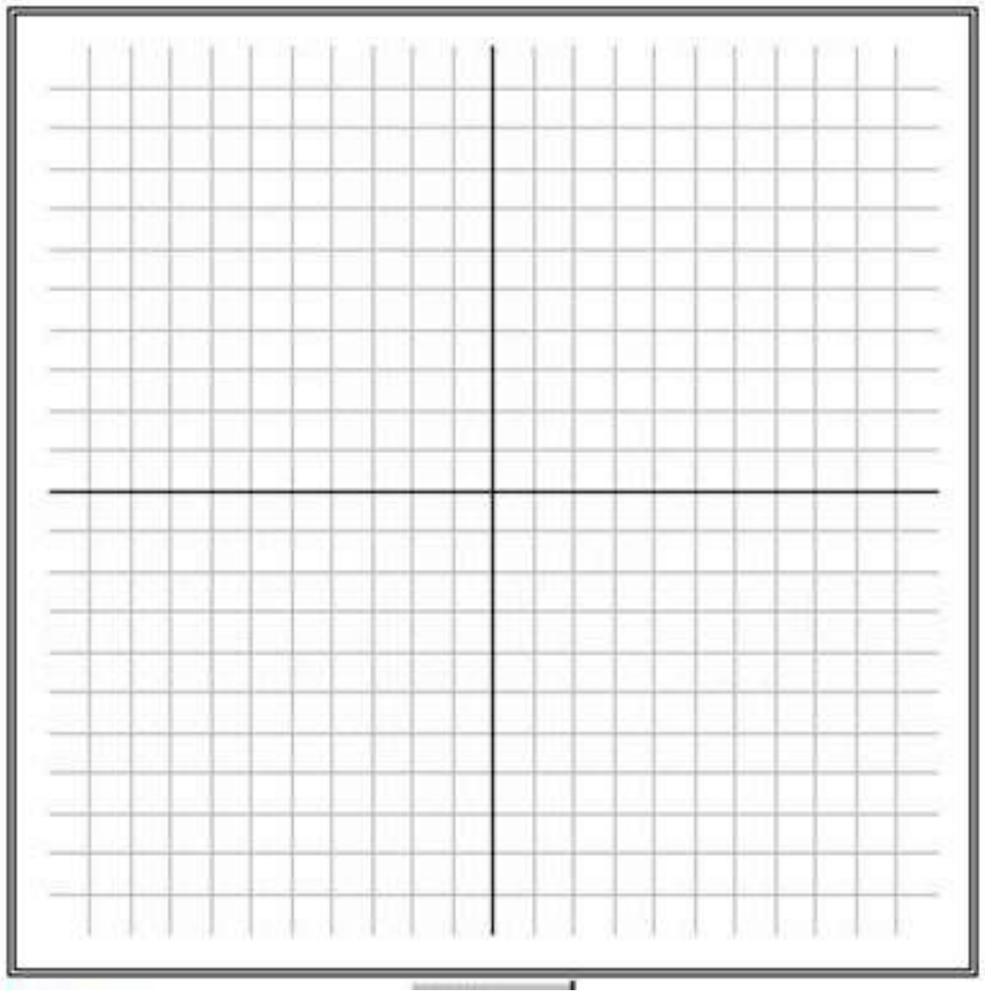


تحقق من فهمك

قدِّر إن أمكن كلًّا من النهايات الآتية إذا كانت موجودة:

(3A $\lim_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim_{x\to 1} f(x)$ ، حيث:

$$f(x)=\begin{cases} x^3+2 & , \quad x<1 \\ 2x+1 & , \quad x\geq 1 \end{cases}$$





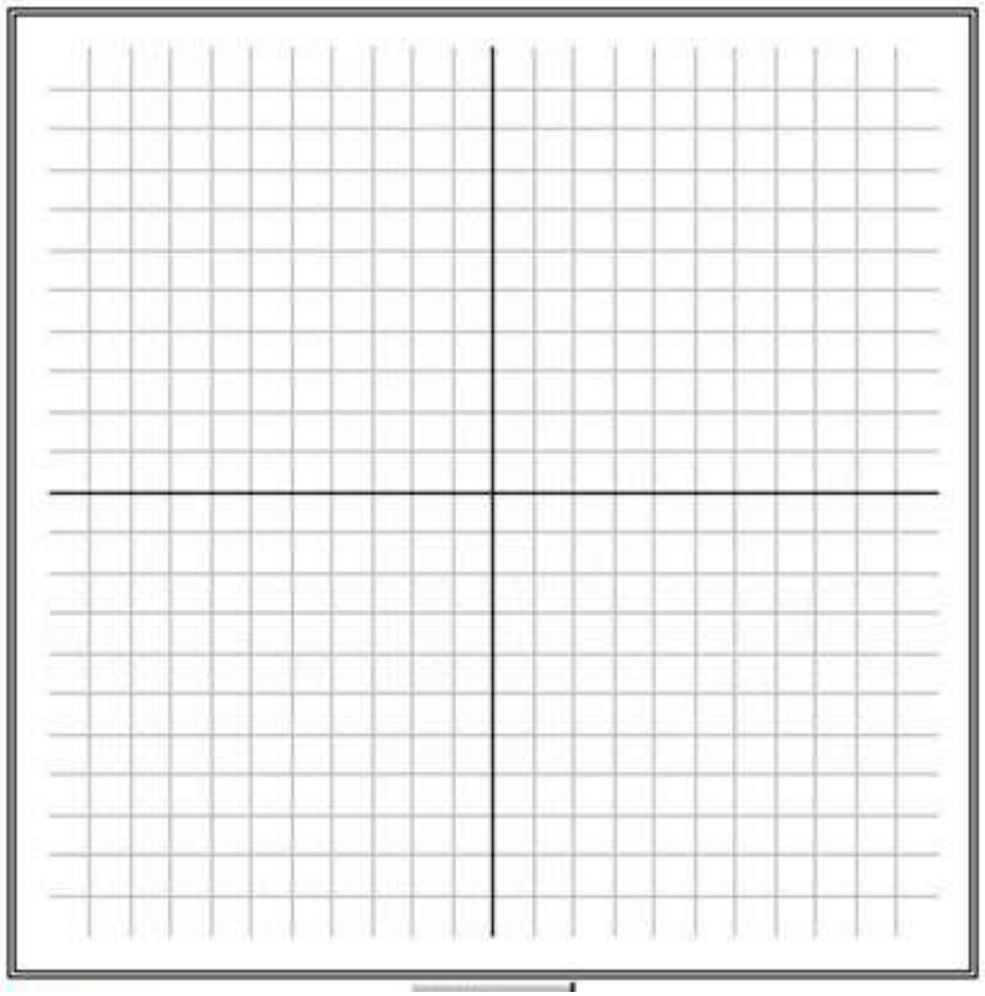


تحقق من فهمك

قدِّر إن أمكن كلًّا من النهايات الآتية إذا كانت موجودة:

(3B $\lim_{x\to -2^-} g(x)$, $\lim_{x\to -2^+} g(x)$, $\lim_{x\to -2} g(x)$ ، حيث:

$$g(x)=\begin{cases} -0.5x+2 & , \quad x<-2 \\ -x^2 & , \quad x\geq -2 \end{cases}$$





موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

المفردات :

النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

النهاية من جهتين
two-sided limit

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math



إن عدم مقدرتنا على إيجاد قيمة نهاية للدالة f كعدد حقيقي عند الاقتراب من نقطة ثابتة ليس ناتجًا بالضرورة عن عدم تساوي النهايتين من اليسار واليمين؛ إذ من الممكن أن تزداد قيم $f(x)$ بشكلٍ غير محدود عند اقتراب قيم x من c، وفي هذه الحالة نشير إلى النهاية بالرمز ∞، أما إذا تناقصت قيم $f(x)$ بشكلٍ غير محدود عند اقتراب قيم x من c، فإننا نشير إلى النهاية بالرمز $-\infty$.

قراءة الرياضيات

السلوك غير المحدود

تعني زيادة أو نقصان $f(x)$ بصورة غير محدودة عندما $x \to c$، أنه باختيار قيمة لـ x قريبة من c بالقدر الذي نريد، فإنه يمكننا الحصول على قيمة كبيرة لـ $|f(x)|$ بالقدر الذي نريد، وكلما كانت x قريبة من c كانت $|f(x)|$ أكبر.

موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

المفردات :

النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

النهاية من جهتين
two-sided limit

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

المفردات :

النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

النهاية من جهتين
two-sided limit

مثال ٤ : النهايات والسلوك الغير محدود

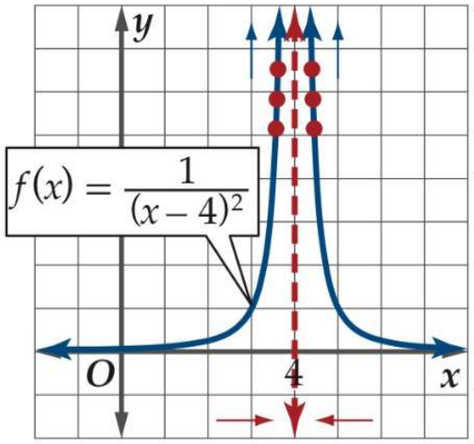
قدِّر –إن أمكن– كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

a) $\lim_{x\to 4} \frac{1}{(x-4)^2}$

التحليل بيانيًّا : يُبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x)=\frac{1}{(x-4)^2}$ المجاور أن :

$$\lim_{x\to 4^+} \frac{1}{(x-4)^2}=\infty \quad , \quad \lim_{x\to 4^-} \frac{1}{(x-4)^2}=\infty$$

فكلما اقتربت قيم x من العدد 4 ، ازدادت قيم $f(x)$ بشكل غير محدود، وبما أن كلًّا من النهايتين من اليسار ومن اليمين ∞ . لذا فإن $\lim_{x\to 4} \frac{1}{(x-4)^2}$ لا تساوي عددًا حقيقيًّا، إلا أنه وبسبب كون كلتا النهايتين ∞ ، فإننا نصف سلوك $f(x)$ عند العدد 4 بكتابة $\lim_{x\to 4} \frac{1}{(x-4)^2}=\infty$.



التعزيز عدديًّا :

x تقترب من 4 ← | → x تقترب من 4

x	3.9	3.99	3.999	4	4.001	4.01	4.1
$f(x)$	100	10000	1000000		1000000	10000	100

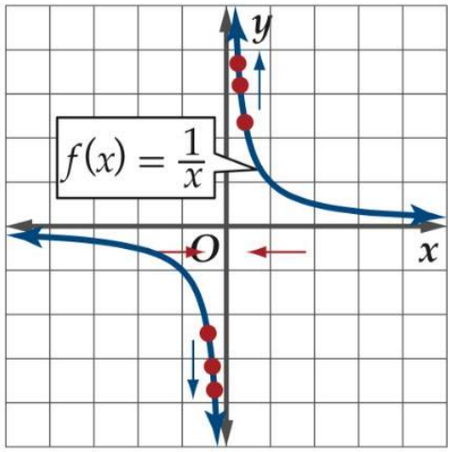
يُبيّن نمط قيم $f(x)$ أنه كلما اقتربت قيم x من العدد 4 من اليسار أو من اليمين ، فإن قيم $f(x)$ تزداد بشكل غير محدود، وذلك يعزِّز تحليلنا البياني.





مثال ٤ : النهايات والسلوك الغير محدود

b) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$



التحليل بيانيًا : يُبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x)=\frac{1}{x}$ المجاور أن:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty \quad , \quad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$$

فكلما اقتربت قيم x من العدد 0 من اليسار ، قلَّت قيم $f(x)$ بشكل غير محدود، في حين تزداد قيم $f(x)$ كلما اقتربت قيم x من العدد 0 من اليمين.

إن كلتا النهايتين من اليسار واليمين غير متساويتين. لذا فإن $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ غير موجودة ، لذلك لا يمكننا وصف سلوك الدالة عندما $x=0$ بعبارة واحدة ، بمعنى أنه لا يمكن أن نكتب $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$ ، وذلك بسبب سلوك الدالة غير المحدود من اليمين واليسار .

التعزيز عدديًا :

x تقترب من 0 ← | → x تقترب من 0

x	−0.1	−0.01	−0.001	0	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	−10	−100	−1000		1000	100	10

يُبيّن نمط قيم $f(x)$ أنه كلما اقتربت قيم x من العدد 0 من اليسار أو من اليمين ، فإن قيم $f(x)$ إما أن تنقص أو تزداد بشكل غير محدود، وذلك يعزز تحليلنا البياني.



موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

المفردات :

النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

النهاية من جهتين
two-sided limit

تحقق من فهمك

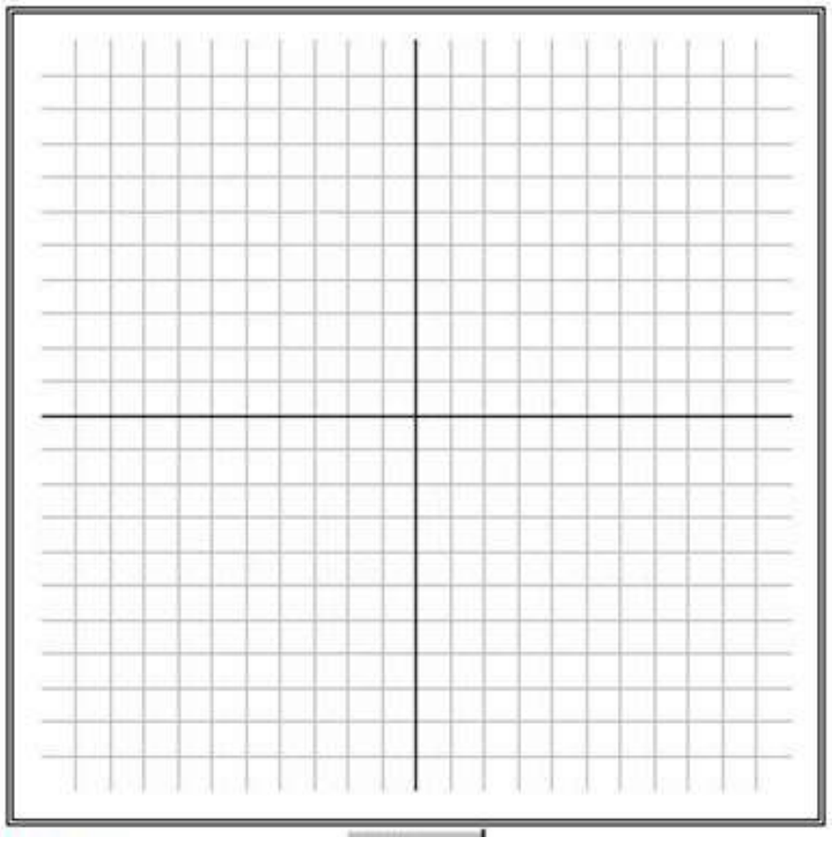
قدِّر –إن أمكن– كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

(4A $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 4}{x - 3}$

التحليل بيانياً

التعزيز العددي

	x تقترب من 2 ←				→ x تقترب من 2		
x							
$f(x)$							





فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

المفردات :

النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

النهاية من جهتين
two-sided limit

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math



تحقق من فهمك

قدِّر –إن أمكن– كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

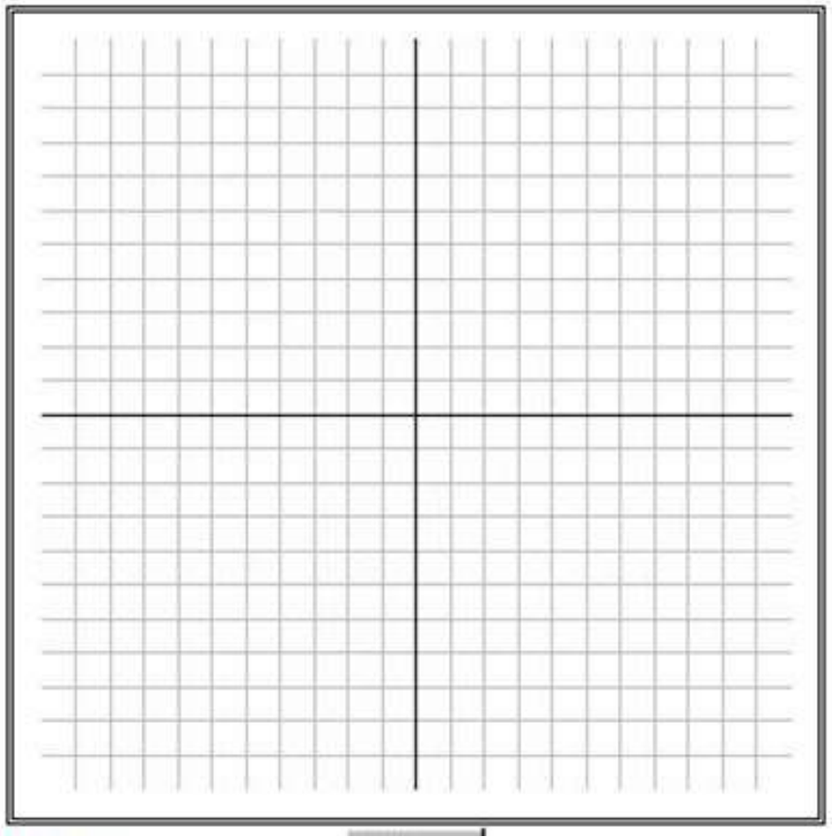
(4B $\lim_{x \to 0} -\frac{2}{x^4}$

التحليل بيانياً

التعزيز العددي

x							
$f(x)$							

x تقترب من 2 ← | → x تقترب من 2





موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

المفردات :

النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

النهاية من جهتين
two-sided limit

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

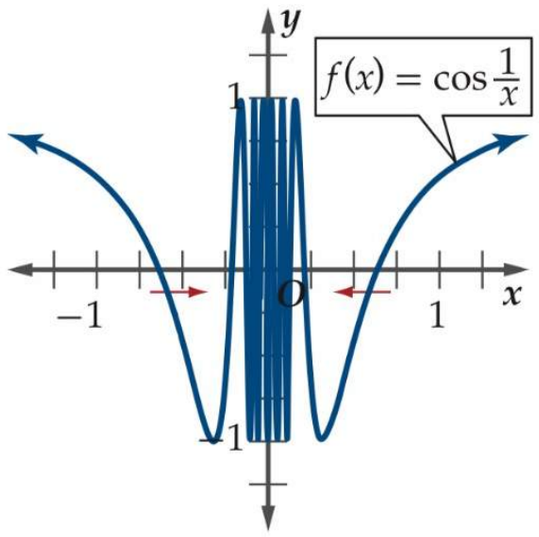


مثال ٥ : النهايات والسلوك التذبذبي

قدِّر $\lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$ إذا كانت موجودة.

يُبيِّن التمثيل البياني للدالة $f(x)=\cos\frac{1}{x}$ المجاور أن قيم $f(x)$ تتذبذبُ بشكل مستمر بين العددين -1 ، 1 كلما اقتربت قيم x من العدد 0 ، مما يعني أنه لأي قيمة x_1 قريبة من الصفر ، بحيث $f(x_1)=1$ ، يمكنك إيجاد قيمة قريبة جدًّا من الصفر مثل x_2 ، بحيث $f(x_2)=-1$ ، وبالمثل لأي قيمة قريبة من الصفر x_3 ، بحيث $f(x_3)=-1$، يمكنك إيجاد قيمة مثل x_4 قريبة جدًّا من الصفر، بحيث $f(x_4)=1$.

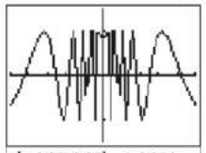
أي أن $\lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$ غير موجودة.



إرشاد تقني

التذبذب اللانهائي

خاصية تتبع المسار في الحاسبة البيانية تفيد غالبًا في توقع قيمة النهاية للدالة، إلا أنه لا يمكنك الاعتماد عليها دائمًا. فهي تعتمد على عدد محدود من النقاط في تمثيل المنحنى، كما في المثال 5 المبيَّن تمثيله أدناه.



فالتمثيل بالحاسبة البيانية لم يظهر أن للدالة عددًا لا نهائيًا في التذبذبات بالقرب من الصفر.



موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

المفردات :

النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

النهاية من جهتين
two-sided limit

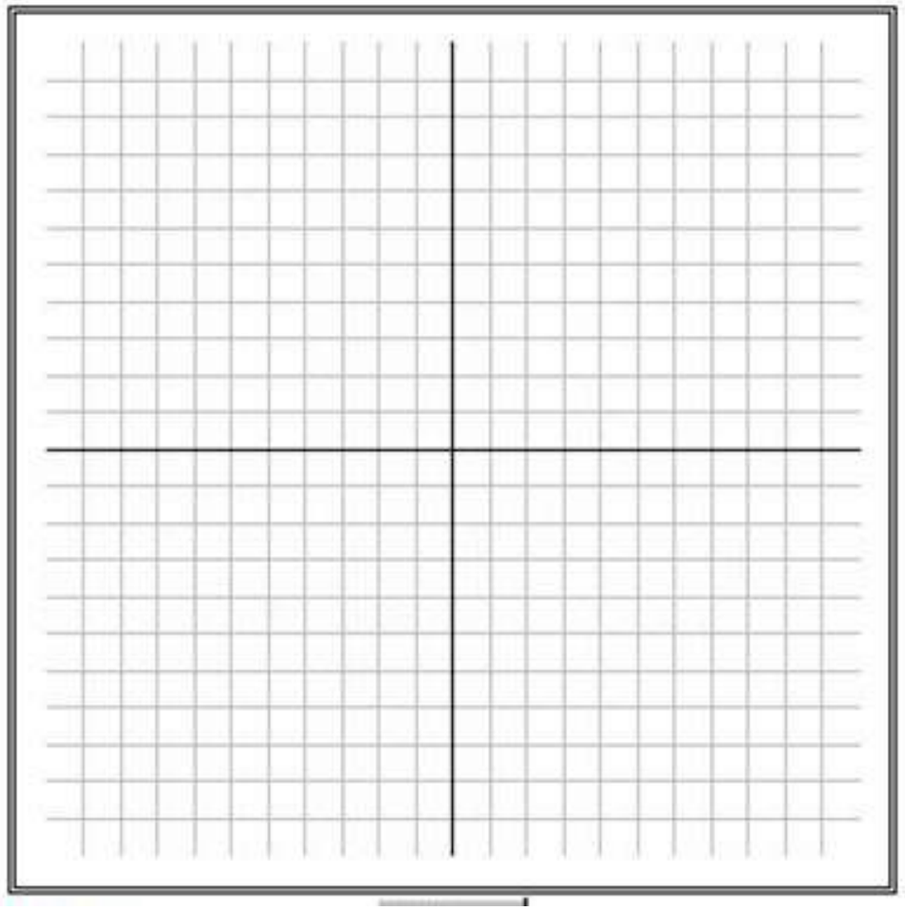
اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math



تحقق من فهمك

قدِّر كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

(5A $\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$





موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

المفردات :

النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

النهاية من جهتين
two-sided limit

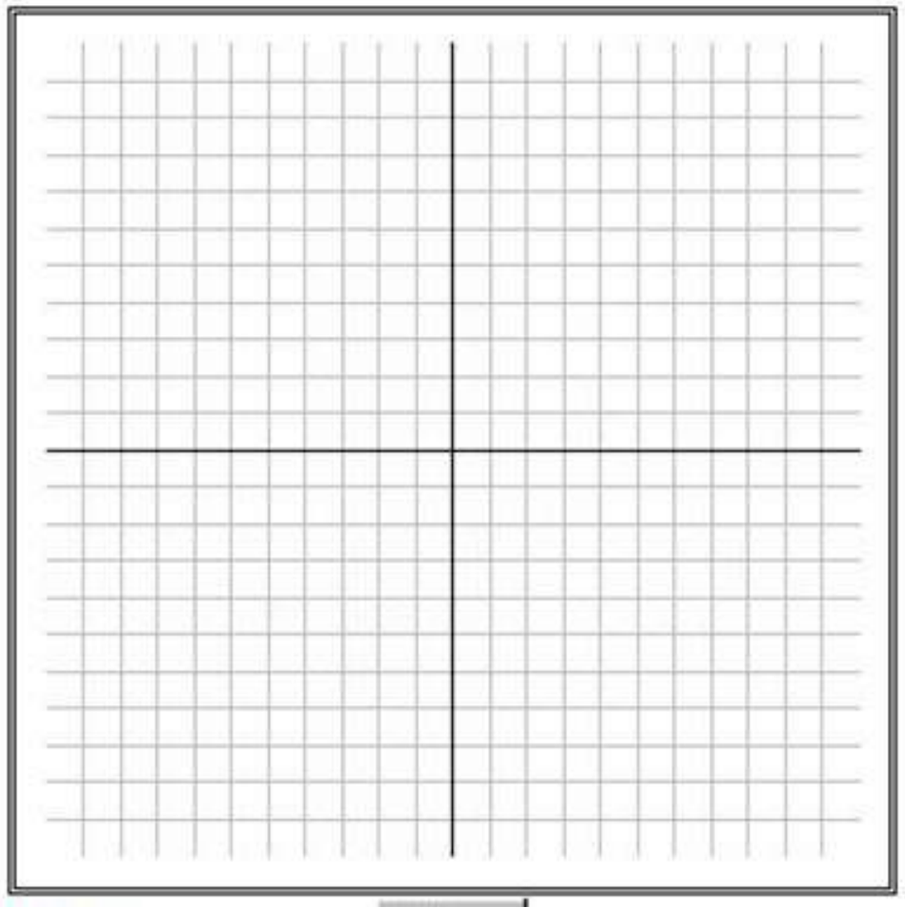
اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math



تحقق من فهمك

قدِّر كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

(5B $\lim_{x \to 0} (x^2 \sin x)$





موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

المفردات :

النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

النهاية من جهتين
two-sided limit

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math



نلخّص فيما يأتي أهم ثلاثة أسباب تجعل نهاية الدالة عند نقطة غير موجودة.

ملخص المفهوم

أسباب عدم وجود نهاية عند نقطة

تكون $\lim_{x \to c} f(x)$ غير موجودة في الحالات الآتية:

- عندما تقترب قيم $f(x)$ من قيمتين مختلفتين عند اقتراب قيم x من العدد c من اليسار ومن اليمين.
- عندما تزداد قيم $f(x)$ بشكلٍ غير محدود عند اقتراب قيم x من العدد c من اليسار وتتناقص قيمها بشكل غير محدود عند اقترابٍ x من العدد c من اليمين، أو العكس.
- عندما تتذبذب قيم $f(x)$ بين قيمتين مختلفتين عند اقتراب قيم x من العدد c.

موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

المفردات :

النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

النهاية من جهتين
two-sided limit

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

المفردات :

النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

النهاية من جهتين
two-sided limit



تقدير النهاية عند المالانهاية : درست فيما سبق استعمال النهايات لوصف سلوك $f(x)$ عندما تقترب قيم x من عدد ثابت c ، و تستعمل النهايات أيضًا لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة . وهو سلوك الدالة عند ازدياد أو نقصان قيم x بشكل غير محدود. وفيما يأتي ملخّص لرموز هذه النهايات.

مفهوم أساسي — **النهايات عند المالانهاية**

- إذا اقتربت قيم $f(x)$ من عدد وحيد L_1 عند ازدياد قيم x بشكل غير محدود، فإن:
  $\lim_{x\to\infty} f(x) = L_1$ ، وتُقرأ « نهاية $f(x)$ عندما تقترب قيم x من موجب مالانهاية هي L_1 »
- إذا اقتربت قيم $f(x)$ من عدد وحيد L_2 عند نقصان قيم x بشكل غير محدود، فإن:
  $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L_2$ ، وتُقرأ « نهاية $f(x)$ عندما تقترب قيم x من سالب مالانهاية هي L_2 »

درست سابقًا أنه إذا اقتربت قيم الدالة من ∞ أو $-\infty$ عند اقتراب قيم x من عدد ثابت c ، فإن ذلك يعني وجود خط تقارب رأسي للدالة، كما درست أن خط التقارب الأفقي يحدث عندما تقترب قيم الدالة من عدد حقيقي كلما اقتربت قيم x من ∞ أو $-\infty$ ، بمعنى:

- المستقيم $x = c$ هو خط تقارب رأسي للدالة f ، إذا كانت $\lim_{x\to c^-} f(x) = \pm\infty$ أو $\lim_{x\to c^+} f(x) = \pm\infty$ أو كليهما.
- المستقيم $y = c$ هو خط تقارب أفقي للدالة f ، إذا كانت $\lim_{x\to-\infty} f(x) = c$ أو $\lim_{x\to\infty} f(x) = c$

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

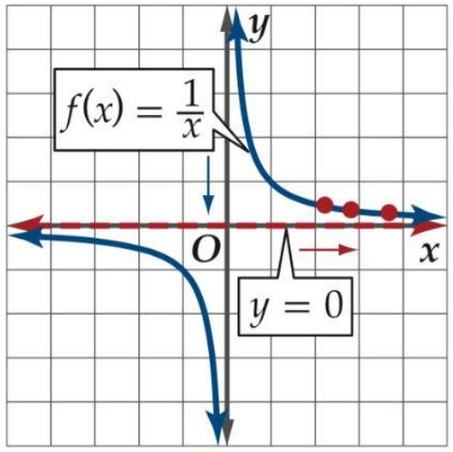


مثال ٦ : تقدير النهاية عند المالانهاية

قدِّر كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$

التحليل بيانيًا : يُبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ المجاور أن $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ ، فكلما زادت قيم x ، اقتربت قيم $f(x)$ من العدد 0.



التعزيز عدديًا :

x تقترب من ∞ ⟵

x	10	100	1000	10000	100000
$f(x)$	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001

⟶

يُبيّن نمط قيم $f(x)$ أنه كلما زادت قيم x ، فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 0.



موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

المفردات :

النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

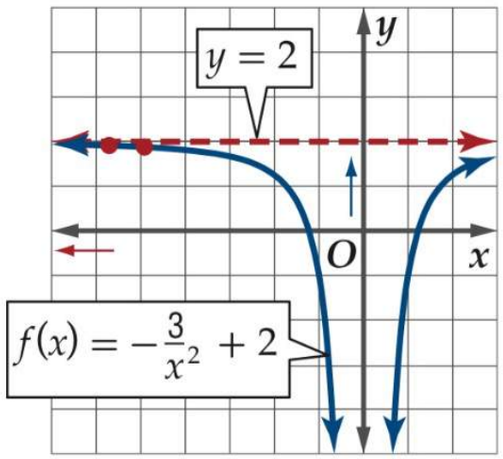
النهاية من جهتين
two-sided limit



مثال ٦ : تقدير النهاية عند المالانهاية

b) $\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{3}{x^2}+2\right)$

التحليل بيانيًا : يُبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x)=-\frac{3}{x^2}+2$ المجاور أن $\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{3}{x^2}+2\right)=2$ ، فكلما قلَّت قيم x ، اقتربت قيم $f(x)$ من العدد 2.



التعزيز عدديًا :

x تقترب من $-\infty$ ←

x	−10000	−1000	−100	−10
$f(x)$	1.99999997	1.999997	1.9997	1.97

→

يُبيّن نمط قيم $f(x)$ أنه كلما قلَّت قيم x ، فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 2.



موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

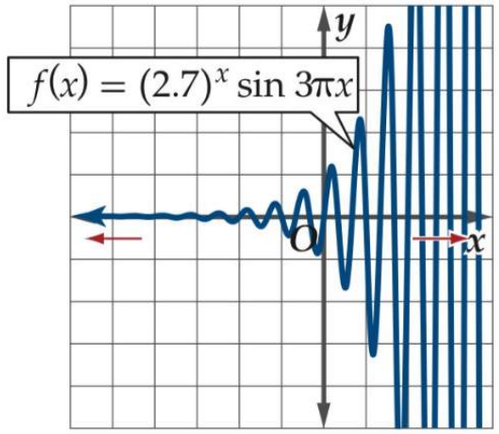
المفردات :

النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

النهاية من جهتين
two-sided limit

مثال ٦ : تقدير النهاية عند الما لانهاية

c) $\lim_{x\to-\infty} (2.7)^x \sin 3\pi x$, $\lim_{x\to\infty} (2.7)^x \sin 3\pi x$



التحليل بيانيًا : يُبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x) = (2.7)^x \sin 3\pi x$ المجاور أن:

$\lim_{x\to-\infty} (2.7)^x \sin 3\pi x = 0$ ، فكلما قلَّت قيم x ، تذبذبت قيم $f(x)$ مقتربة من العدد 0 .

في حين يبيّن التمثيل البياني أن $\lim_{x\to\infty} (2.7)^x \sin 3\pi x$ غير موجودة ، فكلما ازدادت قيم x ، تذبذبت قيم $f(x)$ متباعدةً.

التعزيز عدديًا :

x تقترب من $-\infty$ ← | → x تقترب من ∞

x	−17.1	−10.8	−10.1	0	10.1	50.1	99.1
$f(x)$	3.4×10^{-8}	−0.00002	−0.00004	0	1.8×10^{4}	3.3×10^{21}	-4.5×10^{42}

يتضح من نمط قيم $f(x)$ أنه كلما قلَّت قيم x ، فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 0 ، في حين تتذبذب قيم $f(x)$ متباعدة كلما زادت قيم x.



فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

المفردات :

النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

النهاية من جهتين
two-sided limit

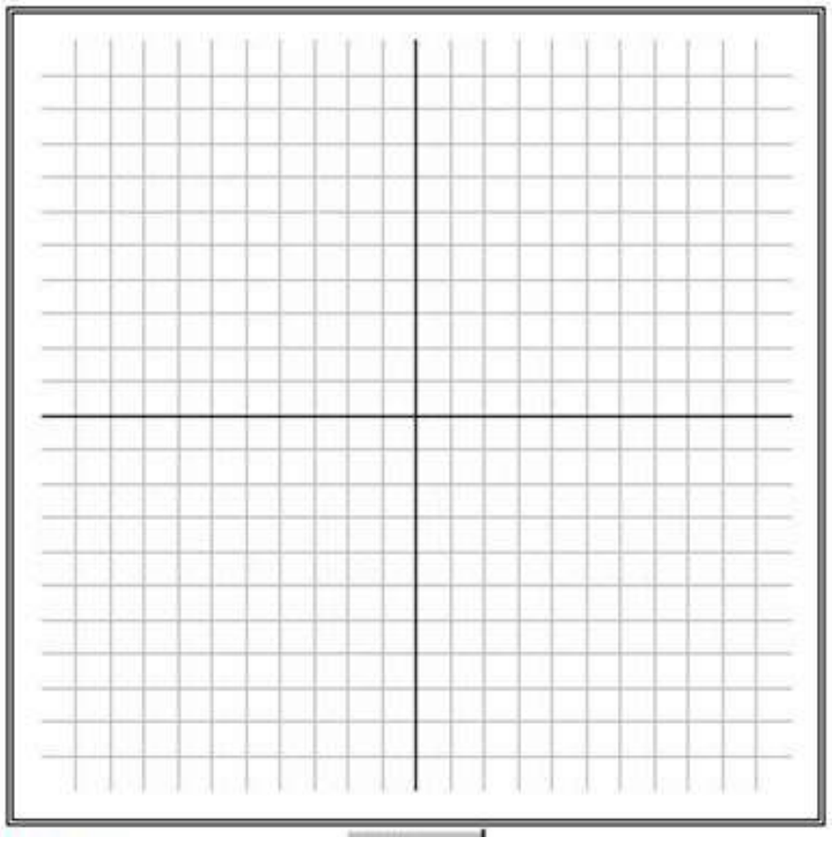


تحقق من فهمك

قدِّر كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

6A) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^4}-3\right)$

التحليل بيانياً



التعزيز العددي

	x تقترب من 2 ←				→ x تقترب من 2		
x							
$f(x)$							



فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

المفردات :

النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

النهاية من جهتين
two-sided limit

موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

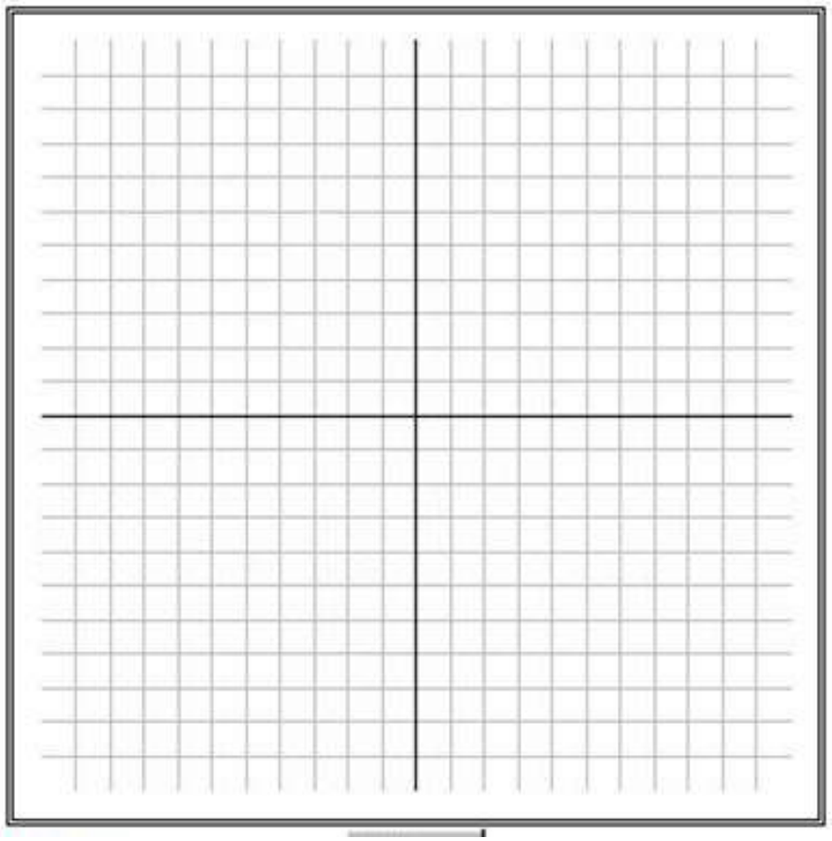


تحقق من فهمك

قدِّر كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

6B) $\lim_{x \to -\infty} 5^x$

التحليل بيانياً



التعزيز العددي

	x تقترب من 2 ←				→ x تقترب من 2		
x							
$f(x)$							



موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

المفردات :

النهاية من جهة واحدة

one-sided limit

النهاية من جهتين

two-sided limit

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math



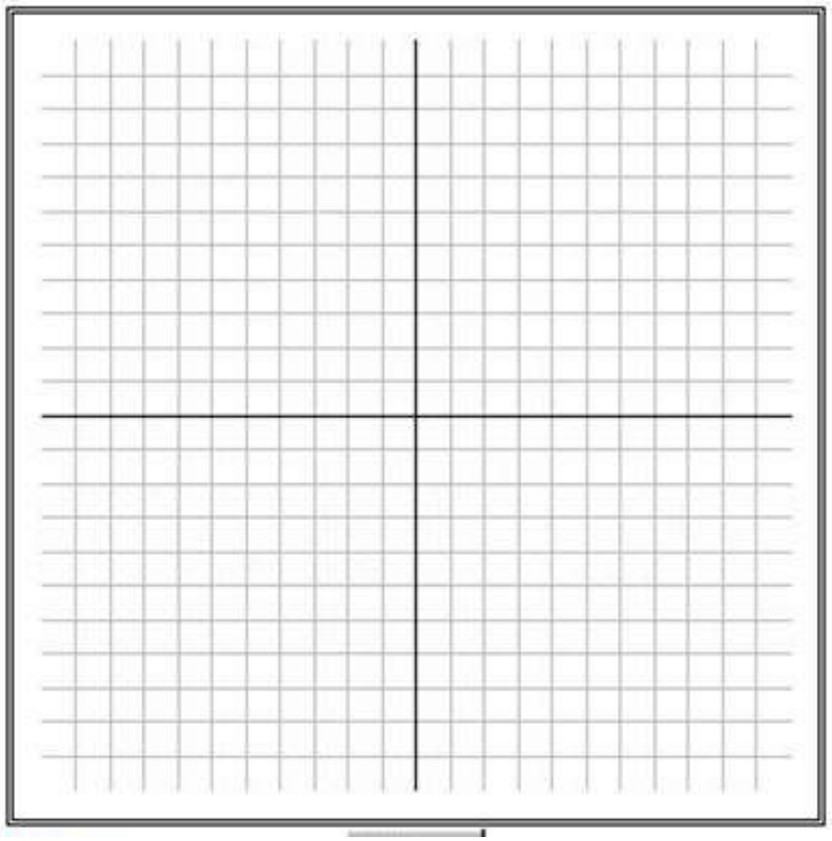


تحقق من فهمك

قدِّر كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

6C) $\lim_{x \to \infty} \sin x$

التحليل بيانياً



التعزيز العددي

	x تقترب من 2 ←				→ x تقترب من 2		
x							
$f(x)$							



موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

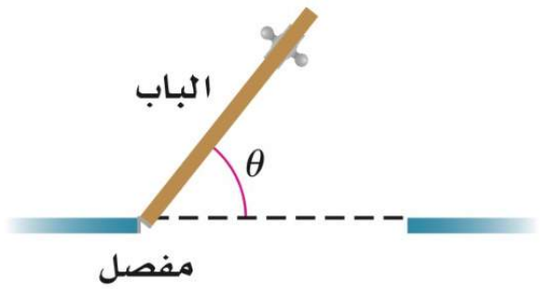
المفردات :

النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

النهاية من جهتين
two-sided limit

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

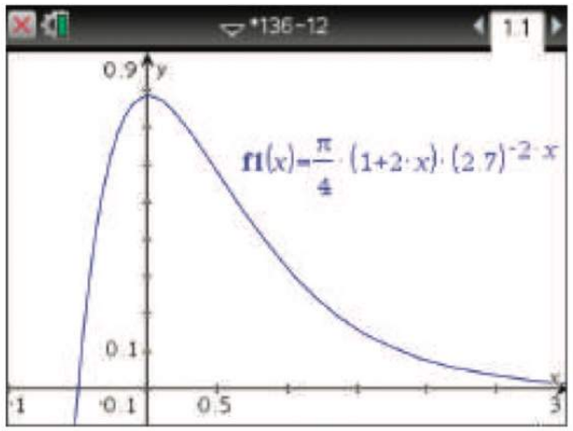
مثال ٧ من واقع الحياة :تقدير النهاية عند ما لانهاية



a) هيدروليك: تستعمل نوابض لإغلاق الأبواب الثقيلة، وآلية هيدروليكية للتحكم في سرعة حركتها، إذا فُتح باب بزاوية $\frac{\pi}{4}$ ثم تُركَ لتغلقه النوابض، فإن الدالة $\theta(t) = \frac{\pi}{4}(1 + 2t)(2.7)^{-2t}$ تمثِّل زاوية فتحته θ بعد t ثانية.
قدِّر $\lim_{t\to\infty} \theta(t)$، وفسِّر معناها إذا كانت موجودة.

قدِّر النهاية:

مثِّل الدالة $\theta(t) = \frac{\pi}{4}(1 + 2t)(2.7)^{-2t}$ بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية.



[−1, 3] scl: 0.5 by [−0.1, 0.9] scl: 0.1

لاحظ أنه كلما زادت قيم t ، فإن قيم الدالة $\theta(t)$ تقترب من العدد 0.
أي أن $\lim_{t\to\infty} \theta(t) = 0$.

فسِّر النتيجة:

إن قيمة النهاية 0 في هذه المسألة، تعني أن الزاوية التي يصنعها الباب مع وضع الإغلاق مع مرور الزمن
هي 0 درجة بالراديان. بمعنى أنه بعد مرور زمن أطول ، فإن الباب سيقترب من وضع الإغلاق التام.



فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

المفردات :

النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

النهاية من جهتين
two-sided limit

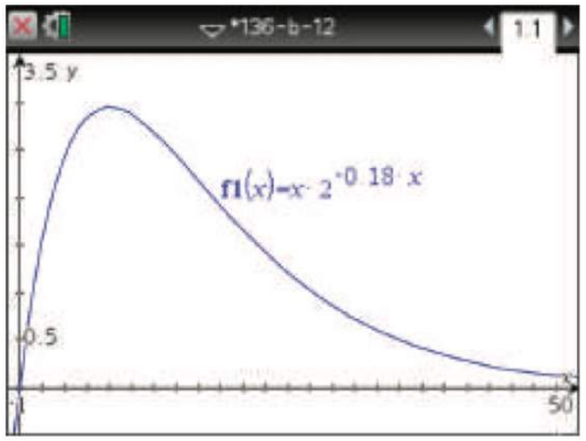
اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

مثال ٧ من واقع الحياة :تقدير النهاية عند ما لانهاية

b) دواء: يُعطى تركيز دواء في دم مريض بوحدة ملجرام لكل مللتر بالعلاقة $C(t) = t2^{-0.18t}$ ، حيث t الزمن بالساعات بعد حقن المريض. قدِّر $\lim_{t\to\infty} C(t)$ ، وفسِّر معناها إذا كانت موجودة.

قدِّر النهاية:

مَثِّل الدالة $C(t) = t2^{-0.18t}$ بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية. يتضح من التمثيل البياني أنه كلما زادت قيمة t فإن منحنى الدالة يقترب من 0، أي أن $\lim_{t\to\infty} C(t) = 0$.



[−1, 50] scl: 2 by [−0.5, 3.5] scl: 0.5

فسِّر النتيجة:

إن قيمة النهاية هي 0 ، وتعني في هذه المسألة أنه مع مرور الزمن، فإن تركيز الدَّواء سيصبح قريبًا من الصفر في دم المريض.



فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

المفردات :

النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

النهاية من جهتين
two-sided limit

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math



تحقق من فهمك

7A) كهرباء: يزوّد مقبس في منطقة ما بفرق جهد كهربائي يُعطى بالعلاقة $V(t) = 165 \sin 120\pi t$ ، حيث t الزمن بالثواني. قدِّر $\lim_{t \to \infty} V(t)$ إذا كانت موجودة، وفسِّر معناها.



موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

المفردات :

النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

النهاية من جهتين
two-sided limit

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math



تحقق من فهمك

7B) **أحياء:** عند وضع عدد من ذبابات الفاكهة في وعاء يحوي حليبًا وفاكهةً وخميرةً فإن عدد الذبابات بعد t يوم يُعطى بالعلاقة $P(t) = \frac{230}{1 + 56.5(2.7)^{-0.37t}}$ ، قدِّر $\lim_{t \to \infty} P(t)$ إذا كانت موجودة، وفسِّر معناها.



موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

المفردات :

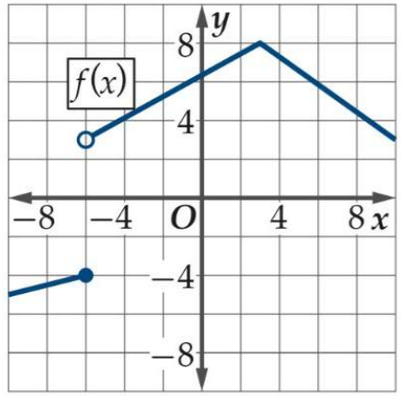
النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

النهاية من جهتين
two-sided limit

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

مسائل مهارات التفكير العليا

48) اكتشف الخطأ: قال علي: إن نهاية الدالة الممثَّلة بيانيًّا في الشكل أدناه عندما تقترب x من -6 هي -4 . في حين قال محمد: إنها 3. هل أي منهما إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك.





موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

المفردات :

النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

النهاية من جهتين
two-sided limit

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

مسائل مهارات التفكير العليا

51) تبرير: حَدِّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. برِّر إجابتك.

إذا كان $f(c) = L$، فإن $\lim_{x \to c} f(x) = L$.



موضوع الدرس:

تقدير النهايات بيانياً

فيما سبق :

درستَ تقدير النهايات لتحديد اتصال الدالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني. (مهارة سابقة)

والآن :

- أقدّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

المفردات :

النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

النهاية من جهتين
two-sided limit

اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

الحياة ليست بحثاً عن الذات ولكنها رحلة لصُنع الذات ،

اخلق من نفسك شيئاً يصعبُ تقليده .

حساب النهايات جبرياً



اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

فيما سبق



درستُ كيفية تقدير النهايات بيانيًا وعدديًا. (الدرس 1–4)

والآن



- أجدُ نهايات دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية عند قيم محددة.
- أجدُ نهايات دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية عند المالانهاية .

المفردات



التعويض المباشر

direct substitution

الصيغة غير المحددة

indeterminate form



اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math







إذا أُعطيت اتساع البؤبؤ بالملمترات لعين حيوان بالعلاقة $d(x) = \frac{152x^{-0.45} + 85}{4x^{-0.45} + 10}$؛
حيث x الاستضاءة الساقطة على البؤبؤ مقيسة بوحدة اللوكس (lux)،
فإنه يمكنك استعمال النهاية عندما تقترب x من 0 أو ∞ لإيجاد اتساع البؤبؤ
عندما تكون الاستضاءة في حدِّها الأدنى أو الأعلى.

حساب النهاية عند نقطة : تعلمتَ في الدرس 1-4 تقدير النهايات بيانيًّا، وباستعمال جداول قيم . وستكتشف في هذا الدرس طرائق جبرية لحساب النهايات.

*ماالنهايةَ التي تقترب منها X عندما تكون الاستضاءة في حدها الأعلى؟

*مثل العلاقةَ بيانياً باستعمال الحاسبةَ البيانيةَ . وضح مالذي يحدث لقطر البؤبؤ عندما تزداد الاستضاءة.



اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math

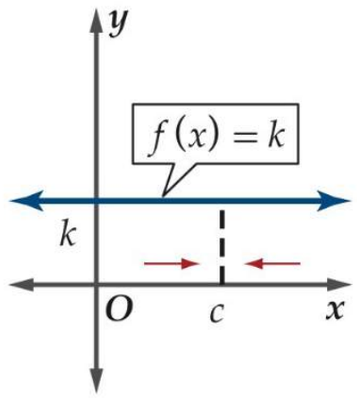
موضوع الدرس: حساب النهايات جبرياً



مفهوم أساسي

نهايات الدوال

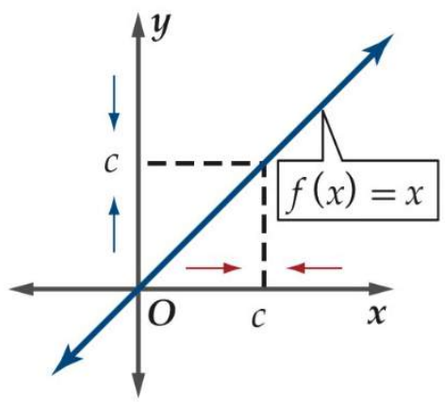
نهايات الدوال الثابتة



التعبير اللفظي: نهاية الدالة الثابتة عند أي نقطة c هي القيمة الثابتة للدالة.

الرموز: $\lim_{x \to c} k = k$

نهايات الدالة المحايدة



التعبير اللفظي: نهاية الدالة المحايدة عند النقطة c هي c .

الرموز: $\lim_{x \to c} x = c$



موضوع الدرس: حساب النهايات جبرياً



تنبيه!

إذا كانت $f(c) \leq 0$ وَ n عددًا زوجيًا فإن $\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)}$ غير موجودة.

مفهوم أساسي

خصائص النهايات

إذا كان c , k عددين حقيقيين، n عددًا صحيحًا موجبًا، وكانت النهايتان $\lim_{x\to c} f(x)$, $\lim_{x\to c} g(x)$ موجودتين، فإن كلًّا من الخصائص الآتية صحيحة:

خاصية المجموع: $\lim_{x\to c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$

خاصية الفرق: $\lim_{x\to c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)$

خاصية الضرب في ثابت: $\lim_{x\to c} [k\, f(x)] = k \lim_{x\to c} f(x)$

خاصية الضرب: $\lim_{x\to c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x)$

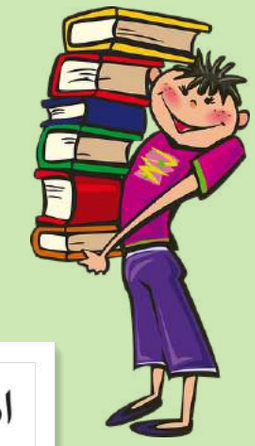
خاصية القسمة: $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$، حيث $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$

خاصية القوة: $\lim_{x\to c} [f(x)]^n = \left[\lim_{x\to c} f(x)\right]^n$

خاصية الجذر النوني: $\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$، إذا كان $\lim_{x\to c} f(x) > 0$، حيث n عدد زوجي.

وإذا كان n عددًا فرديًّا، فإن $\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$ ،





مثال ١ : استعمال خصائص النهايات .

استعمل خصائص النهايات لحساب كل نهاية مما يأتي:

a) $\lim\limits_{x\to 4}(x^2-6x+3)$

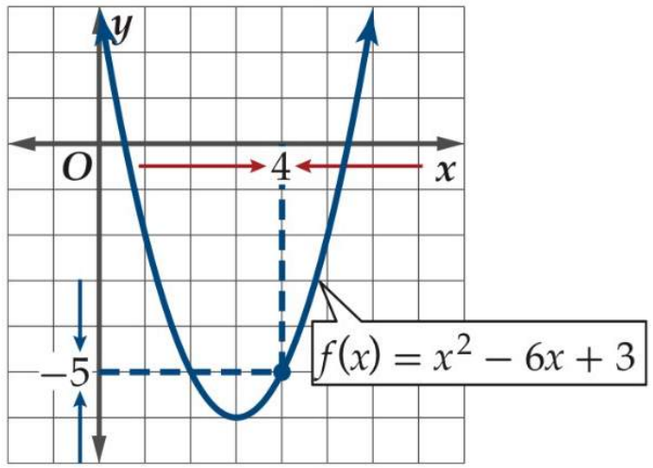
خاصيتا المجموع والفرق: $\lim\limits_{x\to 4}(x^2-6x+3)=\lim\limits_{x\to 4}x^2-\lim\limits_{x\to 4}6x+\lim\limits_{x\to 4}3$

خاصيتا القوة والضرب في ثابت: $=\left(\lim\limits_{x\to 4}x\right)^2-6\cdot\lim\limits_{x\to 4}x+\lim\limits_{x\to 4}3$

نهايتا الدالة الثابتة والدالة المحايدة: $=4^2-6\cdot 4+3$

بسّط: $=-5$

تحقق يعزّز التمثيل البياني للدالة $f(x)=x^2-6x+3$ هذه النتيجة.







مثال ١ : استعمال خصائص النهايات .

(b $\lim_{x\to -2} \frac{4x^3+1}{x-5}$

خاصية القسمة
$$\lim_{x\to -2} \frac{4x^3+1}{x-5} = \frac{\lim_{x\to -2}(4x^3+1)}{\lim_{x\to -2}(x-5)}$$

خاصيتا المجموع والفرق
$$= \frac{\lim_{x\to -2} 4x^3 + \lim_{x\to -2} 1}{\lim_{x\to -2} x - \lim_{x\to -2} 5}$$

خاصيتا القوة والضرب في ثابت
$$= \frac{4\left(\lim_{x\to -2} x\right)^3 + \lim_{x\to -2} 1}{\lim_{x\to -2} x - \lim_{x\to -2} 5}$$

نهايتا الدالة الثابتة والدالة المحايدة
$$= \frac{4(-2)^3+1}{-2-5}$$

بسّط
$$\approx 4.4$$

تحقق كوّن جدولًا لقيم x التي تقترب من $2-$ من الجهتين.

x تقترب من $2-$ ← | → x تقترب من $2-$

x	-2.1	-2.01	-2.001	-2	-1.999	-1.99	-1.9
$f(x)$	5.08	4.49	4.43		4.42	4.37	3.83

من الواضح أنه كلما اقترب x من العدد $2-$، فإن $f(x)$ تقترب من العدد 4.4





مثال ١ : استعمال خصائص النهايات .

(c $\lim_{x\to 3} \sqrt{8-x}$

خاصية الفرق	$\lim_{x\to 3}(8-x) = \lim_{x\to 3} 8 - \lim_{x\to 3} x$
عوّض	$= 8 - 3$
بسّط	$= 5 > 0$
خاصية الجذر النوني	$\lim_{x\to 3} \sqrt{8-x} = \sqrt{\lim_{x\to 3}(8-x)}$
خاصية الفرق	$= \sqrt{\lim_{x\to 3} 8 - \lim_{x\to 3} x}$
نهايتا الدالة الثابتة والدالة المحايدة	$= \sqrt{8-3}$
بسّط	$= \sqrt{5}$





تحقق من فهمك

استعمل خصائص النهايات لحساب كل نهاية مما يأتي:

1A) $\lim_{x \to 2} (-x^3 + 4)$



اعداد: شيخة المرزوقي shikhah_math



تحقق من فهمك

استعمل خصائص النهايات لحساب كل نهاية مما يأتي:

(1B $\lim_{x \to 2} \frac{x - 3}{2x^2 - x - 15}$





تحقق من فهمك

استعمل خصائص النهايات لحساب كل نهاية مما يأتي:

$$\lim_{x \to -1} \sqrt{x+3} \quad \text{(1C}$$



موضوع الدرس: حساب النهايات جبرياً



إرشادات للدراسة

الدوال الجيدة السلوك

تُعدُّ الدوال المتصلة مثل دوال كثيرات الحدود ودالتي الجيب وجيب التمام دوالّ جيدة السلوك، إذ يمكن حساب نهاياتها من خلال التعويض المباشر، ويمكن إيجاد نهاية الدوال من خلال التعويض المباشر حتى وإن لم تكن الدالة جيدة السلوك على مجالها، بشرط أن تكون متصلة عند النقطة التي تحسب عندها النهاية.

مفهوم أساسي

نهايات الدوال

نهايات دوال كثيرات الحدود

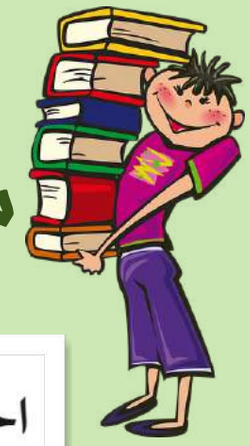
إذا كانت $p(x)$ دالة كثيرة حدود ، وكان c عددًا حقيقيًّا ، فإن $\lim_{x \to c} p(x) = p(c)$.

نهايات الدوال النسبية

إذا كانت $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ دالةً نسبية، وكان c عددًا حقيقيًّا، حيث $q(c) \neq 0$، فإن $\lim_{x \to c} r(x) = r(c) = \frac{p(c)}{q(c)}$.

وبشكل مختصر، فإنه يمكن حساب نهايات دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية من خلال **التعويض المباشر**، شريطة ألا يساوي مقام الدالة النسبية صفرًا عند النقطة التي تُحسب عندها النهاية.





مثال ٢ : استعمال التعويض المباشر لحساب النهايات

احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا، وإلا فاذكر السبب:

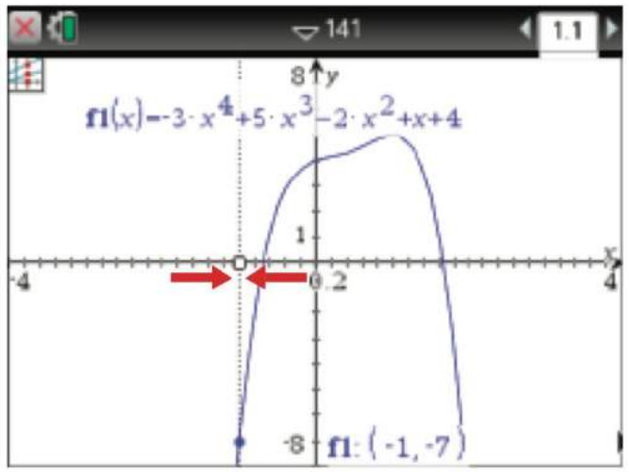
(a $\lim_{x \to -1} (-3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + x + 4)$

بما أن هذه نهاية دالة كثيرة حدود، فيمكننا حسابها باستعمال التعويض المباشر.

$$\lim_{x \to -1} (-3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + x + 4) = -3(-1)^4 + 5(-1)^3 - 2(-1)^2 + (-1) + 4$$

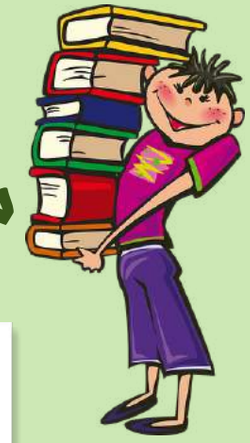
$$= -3 - 5 - 2 - 1 + 4 = -7$$

تحقق يعزِّز التمثيل البياني بالآلة البيانية للدالة $f(x) = -3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + x + 4$ هذه النتيجة.



[−4, 4] scl: 0.2 by [−8, 8] scl: 1





مثال ٢ : استعمال التعويض المباشر لحساب النهايات

[−4, 4] scl: 0.2 by [−8, 8] scl: 1

(b $\lim_{x\to 3} \frac{2x^3-6}{x-x^2}$

بما أن هذه نهاية دالة نسبية مقامُها ليس صفرًا عندما $x = 3$ ، فيمكننا حسابها باستعمال التعويض المباشر.

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x^3-6}{x-x^2} = \frac{2(3)^3-6}{3-(3)^2}$$

$$= \frac{48}{-6}$$

$$= -8$$

(c $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$

بما أن هذه نهاية دالة نسبية مقامها صفر عندما $x = 1$ ، فلا يمكننا حسابها باستعمال التعويض المباشر.

(d $\lim_{x\to -6} \sqrt{x+5}$

بما أن $\lim_{x\to -6}(x+5) = -6+5 = -1 < 0$ ، فلا يمكننا حساب $\lim_{x\to -6}\sqrt{x+5}$ بالتعويض المباشر.





تحقق من فهمك

احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا، وإلا فاذكر السبب:

(2A $\lim_{x \to 4} (x^3 - 3x^2 - 5x + 7)$

(2B $\lim_{x \to -5} \frac{x + 1}{x^2 + 3}$





تحقق من فهمك

احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا، وإلا فاذكر السبب:

(2C $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$

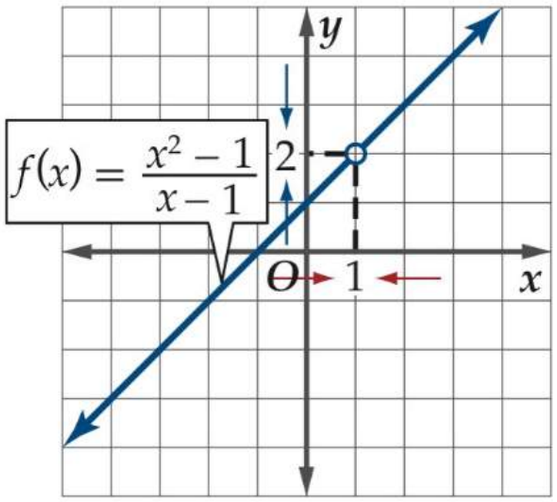
(2D $\lim_{x \to -8} \sqrt{x + 6}$



موضوع الدرس: حساب النهايات جبرياً



يُسمى ناتج التعويض في النهايات على الصورة $\frac{0}{0}$ **الصيغة غير المحددة**؛ لأنه لا يمكنك تحديد نهاية الدالة مع وجود صفر في المقام، ومثل هذه النهايات قد تكون موجودة ولها قيمة حقيقية، أو غير موجودة، أو متباعدة نحو ∞ أو $-\infty$، ويُبيِّن التمثيل البياني للدالة $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ أن $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$ موجودة وتساوي 2 .



على الرغم من أن الصيغة غير المحددة تظهر من خلال تطبيق خاطئ لخصائص النهايات، إلا أن الحصول على هذه الصيغة قد يرشدنا إلى الطريقة الأنسب لإيجاد النهاية.

إذا قمت بحساب نهاية دالة نسبية، ووصلت إلى الصيغة غير المحددة $\frac{0}{0}$ ، فبسِّط العبارة جبريًّا من خلال تحليل كل من البسط والمقام واختصار العوامل المشتركة.





مثال ٣ : استعمال التحليل لحساب النهايات

احسب كل نهاية مما يأتي :

a) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{x^2 - x - 20}{x + 4}$

ينتج عن التعويض المباشر $\dfrac{(-4)^2 - (-4) - 20}{-4 + 4} = \dfrac{0}{0}$ ؛ لذا فإن علينا تحليل المقدار جبريًّا، واختصار أي عوامل مشتركة بين البسط والمقام.

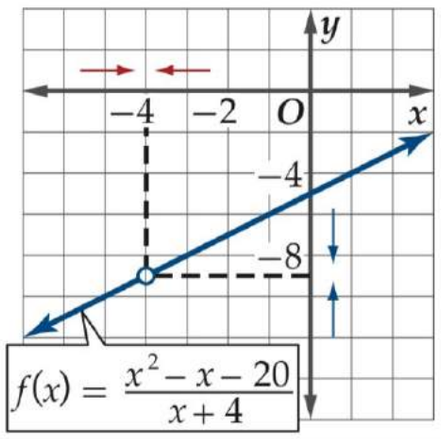
حلّل البسط
$$\lim_{x\to -4} \frac{x^2 - x - 20}{x + 4} = \lim_{x\to -4} \frac{(x - 5)(x + 4)}{x + 4}$$

اختصر العامل المشترك
$$= \lim_{x\to -4} \frac{(x - 5)\cancel{(x + 4)}}{\cancel{x + 4}}$$

بسّط
$$= \lim_{x\to -4} (x - 5)$$

عوّض وبسّط
$$= (-4) - 5 = -9$$

تحقق يعزِّز التمثيل البياني للدالة $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 20}{x + 4}$ هذه النتيجة.







مثال ٣ : استعمال التحليل لحساب النهايات

(b $\lim_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^3-3x^2-7x+21}$

يَنتج عن التعويض المباشر $\dfrac{3-3}{3^3-3(3)^2-7(3)+21} = \dfrac{0}{0}$.

أعد تجميع المقام

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^3-3x^2-7x+21} = \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{(x^3-3x^2)+(-7x+21)}$$

أخرج العامل المشترك من الحدود المجمعة في المقام

$$= \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2(x-3)-7(x-3)}$$

أخرج العامل المشترك في المقام

$$= \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{(x^2-7)(x-3)}$$

اختصر

$$= \lim_{x\to 3} \frac{\cancel{x-3}}{(x^2-7)\cancel{(x-3)}}$$

بسّط

$$= \lim_{x\to 3} \frac{1}{x^2-7}$$

عوّض وبسّط

$$= \frac{1}{(3)^2-7} = \frac{1}{2}$$





موضوع الدرس: حساب النهايات جبرياً

تحقق من فهمك

احسب كل نهاية مما يأتي:

(3A $\lim_{x\to -2} \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x + 2}$

(3B $\lim_{x\to 6} \frac{x^2 - 7x + 6}{3x^2 - 11x - 42}$





ينتج عن اختصار العامل المشترك بين بسط ومقام الدالة النسبية دالة جديدة ، ففي المثال 3a ينتج عن الاختصار بين بسط ومقام الدالة f دالة جديدة g، حيث:

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 20}{x + 4} \ , \ g(x) = x - 5$$

إن قيم هاتين الدالتين متساوية لجميع قيم x إلا عندما $x = -4$ ، فإذا تساوت قيم دالتين إلا عند قيمة وحيدة c ، فإن نهايتيهما عندما تقترب x من c متساويتان ؛ لأن قيمة النهاية لا تعتمد على قيمة الدالة عند النقطة التي تُحسبُ النهاية عندها؛ لذا فإن $\lim_{x \to -4} \frac{x^2 - x - 20}{x + 4} = \lim_{x \to -4} (x - 5)$.

والطريقة الأخرى لإيجاد نهايات ناتجِ التعويضِ فيها صيغة غير محددة ، هي إنطاق البسط أو المقام أولًا، ثم اختصار العوامل المشتركة.





مثال ٤ : استعمال انطاق البسط أو المقام لحساب النهايات

احسب $\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$.

يَنتج عن التعويض المباشر $\frac{\sqrt{9}-3}{9-9}=\frac{0}{0}$ ؛ لذا أنطق البسط، ومن ثم اختصر العوامل المشتركة.

$$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}\cdot\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$$ اضرب كلًّا من البسط والمقام في $\sqrt{x}+3$ ، والذي يمثل مرافق $\sqrt{x}-3$

$$=\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}$$ بسّط

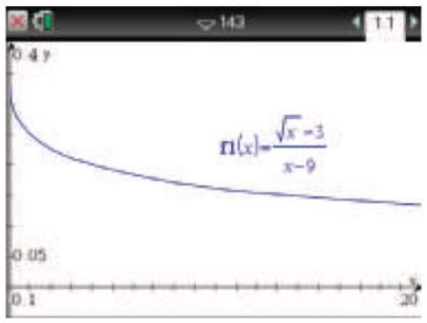
$$=\lim_{x\to 9}\frac{\cancel{x-9}}{\cancel{(x-9)}(\sqrt{x}+3)}$$ اختصر العامل المشترك

$$=\lim_{x\to 9}\frac{1}{\sqrt{x}+3}$$ بسّط

$$=\frac{1}{\sqrt{9}+3}$$ عوّض

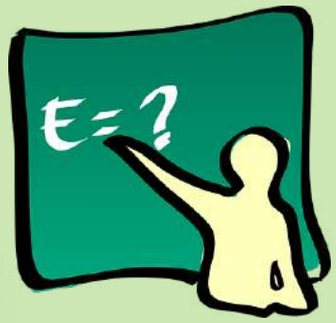
$$=\frac{1}{6}$$ بسّط

تحقق يعزِّز التمثيل البياني بالآلة البيانية للدالة $f(x)=\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$ في الشكل المجاور هذه النتيجة.



[−0.1, 20] scl: 1 by [−0.05, 0.4] scl: 0.05





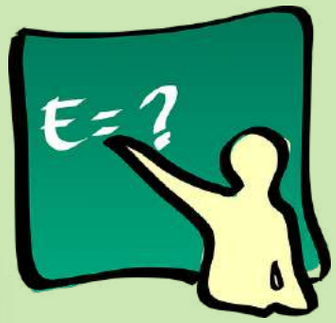
تحقق من فهمك

احسب كل نهاية مما يأتي:

(4A

$$\lim_{x \to 25} \frac{x - 25}{\sqrt{x} - 5}$$





تحقق من فهمك

احسب كل نهاية مما يأتي:

(4B $\lim_{x \to 0} \frac{2 - \sqrt{x+4}}{x}$



موضوع الدرس: حساب النهايات جبرياً



حساب النهايات عند المالانهاية : درست سابقًا أن لجميع الدوال الزوجية سلوك طرفي التمثيل البياني نفسه، وكذلك الدوال الفردية لها جميعًا سلوك طرفي التمثيل البياني نفسه.

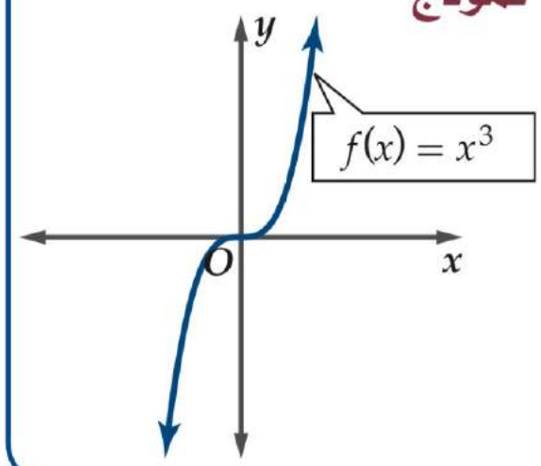
مفهوم أساسي

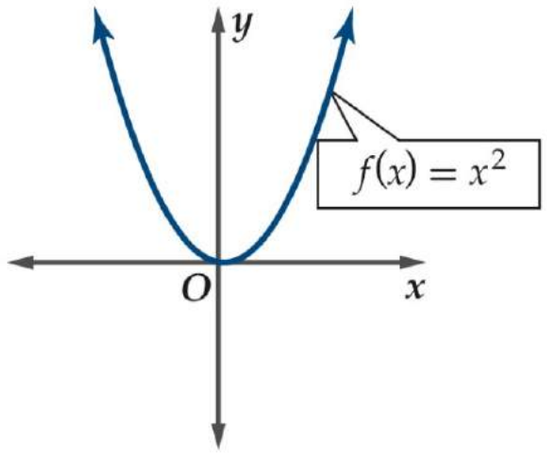
نهايات دوال القوى عند المالانهاية

لأي عدد صحيح موجب n،

- $\lim_{x\to\infty} x^n = \infty$
- $\lim_{x\to-\infty} x^n = \infty$ ، إذا كان n عددًا زوجيًّا.
- $\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ ، إذا كان n عددًا فرديًّا.

نموذج





إن سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود هو ذاته سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة القوة الناتجة عن الحد الرئيس في كثيرة الحدود، وهو الحد ذو القوة الكبرى، ويمكننا وصف ذلك أيضًا باستعمال النهايات.





مفهوم أساسي

نهايات دوال كثيرات الحدود عند المالانهاية

إذا كانت $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ دالة كثيرة حدود، فإن

$$\lim_{x\to\infty} p(x) = \lim_{x\to\infty} a_n x^n \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} p(x) = \lim_{x\to-\infty} a_n x^n$$

يمكنك استعمال هاتين الخاصيتين لحساب نهايات دوال كثيرات حدود عند المالانهاية. تذكَّر أن كون نهاية الدالة ∞ أو $-\infty$ لا يعني أنها موجودة، ولكنه وصف لسلوك منحناها؛ فإما أن يكون متزايدًا بلاحدود أو متناقصًا بلا حدود.





مثال ٥ : نهايات دوال كثيرات الحدود عند الما لانهاية

احسب كل نهاية مما يأتي:

(a $\lim_{x\to-\infty}(x^3-2x^2+5x-1)$

$\lim_{x\to-\infty}(x^3-2x^2+5x-1)=\lim_{x\to-\infty}x^3$ — نهاية دالة كثيرة الحدود عند المالانهاية

$=-\infty$ — نهاية دالة القوة عند المالانهاية

(b $\lim_{x\to\infty}(4+3x-x^2)$

$\lim_{x\to\infty}(4+3x-x^2)=\lim_{x\to\infty}-x^2$ — نهاية دالة كثيرة الحدود عند المالانهاية

$=-\lim_{x\to\infty}x^2$ — خاصية الضرب في ثابت

$=-\infty$ — نهاية دالة القوة عند المالانهاية

(c $\lim_{x\to-\infty}(5x^4-3x)$

$\lim_{x\to-\infty}(5x^4-3x)=\lim_{x\to-\infty}5x^4$ — نهاية دالة كثيرة الحدود عند المالانهاية

$=5\lim_{x\to-\infty}x^4$ — خاصية الضرب في ثابت

$=5\times\infty=\infty$ — نهاية دالة القوة عند المالانهاية





تحقق من فهمك

احسب كل نهاية مما يأتي:

(5A $\lim_{x \to \infty} (-x^3 - 4x^2 + 9)$

(5B $\lim_{x \to -\infty} (4x^6 + 3x^5 - x)$

(5C $\lim_{x \to -\infty} (2x - 6x^2 + 4x^5)$



shikhah_math اعداد: شيخة المرزوقي

موضوع الدرس: حساب النهايات جبرياً

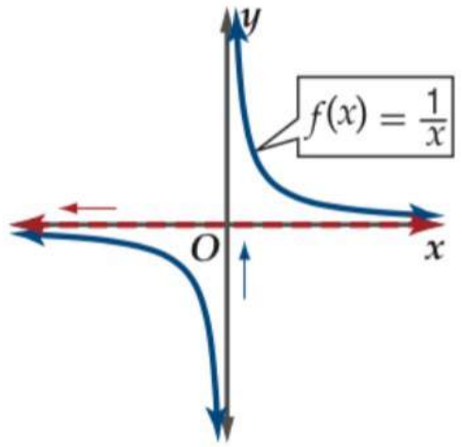


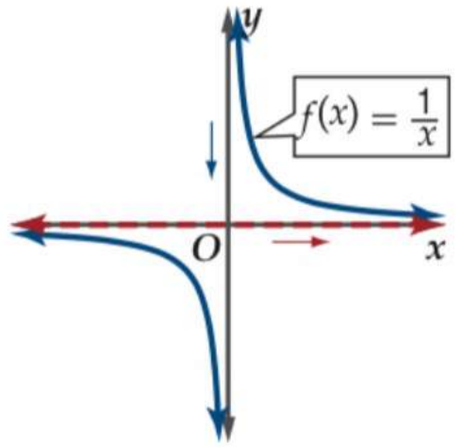
ولحساب نهاية دالة نسبية عند المالانهاية نحتاج إلى خصائص أخرى للنهايات.

مفهوم أساسي — نهايات دالة المقلوب عند المالانهاية

التعبير اللفظي: إن نهاية دالة المقلوب عند موجب أو سالب مالانهاية هي صفر.

الرموز: $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$





نتيجة: لأي عدد صحيح موجب n ، فإن $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$.





مثال ٦ : نهايات الدوال النسبية عند الما لانهاية

احسب كل نهاية مما يأتي إن أمكن:

(a $\lim_{x\to\infty} \frac{4x+5}{8x-3}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x+5}{8x-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4x}{x}+\frac{5}{x}}{\frac{8x}{x}-\frac{3}{x}}$$

اقسم كل حد على أعلى قوة، وهي x

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4+\frac{5}{x}}{8-\frac{3}{x}}$$

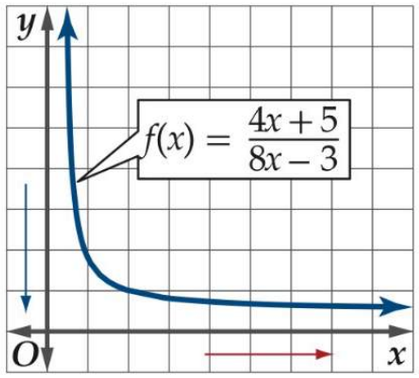
بسّط

$$= \frac{\lim_{x\to\infty} 4+5\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}}{\lim_{x\to\infty} 8-3\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}}$$

خصائص القسمة، والمجموع، والفرق، والضرب في ثابت

$$= \frac{4+5\cdot 0}{8-3\cdot 0} = \frac{1}{2}$$

نهايتا الدالة الثابتة ودالة المقلوب عند المالانهاية



تحقق يعزِّز التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{4x+5}{8x-3}$ المجاور هذه النتيجة. ✔





مثال ٦ : نهايات الدوال النسبية عند الما لانهاية

(b $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{6x^2-x}{3x^3+1}$

اقسم كل حد على أعلى قوة، وهي x^3

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{6x^2-x}{3x^3+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{6x^2}{x^3}-\frac{x}{x^3}}{\frac{3x^3}{x^3}+\frac{1}{x^3}}$$

بسّط

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{6}{x}-\frac{1}{x^2}}{3+\frac{1}{x^3}}$$

خصائص القسمة، والمجموع، والفرق، والضرب في ثابت

$$= \frac{6\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}-\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}}{\lim_{x\to-\infty}3+\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}}$$

نهايتا الدالة الثابتة ودالة المقلوب عند المالانهاية

$$= \frac{6\cdot 0-0}{3+0} = 0$$





مثال ٦ : نهايات الدوال النسبية عند الما لانهاية

(c $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^4}{9x^3+2x}$

اقسم كل حد على أعلى قوة، وهي x^4 $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^4}{9x^3+2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{5}{\frac{9}{x}+\frac{2}{x^3}}$

خصائص القسمة، والمجموع، والضرب في ثابت $= \frac{\lim_{x\to\infty} 5}{9\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} + 2\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^3}}$

نهايتا الدالة الثابتة ودالة المقلوب عند المالانهاية $= \frac{5}{9\cdot 0 + 2\cdot 0} = \frac{5}{0}$

وحيث إن نهاية المقام صفر، فإننا نكون قد طبقنا خطأً خاصية القسمة، إلا أننا نعلم أنه عند قسمة العدد 5 على قيم صغيرة موجبة تقترب من الصفر، فإن الناتج سيكون كبيرًا بشكلٍ غير محدود، أي أن النهاية هي ∞.





موضوع الدرس: حساب النهايات جبرياً

تحقق من فهمك

احسب كل نهاية مما يأتي:

(6A $\lim_{x \to -\infty} \frac{5}{x - 10}$

(6B $\lim_{x \to \infty} \frac{-3x^2 + 7}{5x + 1}$

(6C $\lim_{x \to \infty} \frac{7x^3 - 3x^2 + 1}{2x^3 + 4x}$

إرشادات للدراسة

نهاية الدوال النسبية

توجد ثلاث حالات عند حساب نهايات الدوال النسبية عندما تقترب x من المالانهاية.

1) إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام، فإن النهاية إما ∞ أو ∞−، بحسب إشارة الحد الرئيس في كل من البسط والمقام.

2) إذا كانت درجة البسط مساوية لدرجة المقام، فإن النهاية مساوية لناتج قسمة معاملي الحدين الرئيسين في البسط والمقام.

3) إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام، فإن النهاية صفر.



موضوع الدرس: حساب النهايات جبرياً



درست سابقًا أن المتتابعة هي دالة مجالها مجموعة من الأعداد الطبيعية، ومداها مجموعة من الأعداد الحقيقية؛ لذا فإن نهاية المتتابعة غير المنتهية هي نهاية دالة عندما $n \to \infty$. إذا كانت النهاية موجودة ، فإن قيمة هذه النهاية هي العدد الذي تقترب منه المتتابعة . فمثلًا يمكن وصف المتتابعة $a_n = 1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{3} , \frac{1}{4} , \ldots$ بـ $f(n) = \frac{1}{n}$ ، حيث n عدد صحيح موجب . وبما أن $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ، فإن المتتابعة تقترب من الصفر.





مثال ٧ : نهايات المتتابعات

احسب نهاية كل متتابعة مما يأتي إن وجدت:

(a $a_n = \dfrac{3n+1}{n+5}$

لحساب نهاية المتتابعة، أوجد $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+1}{n+5}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{5}{n}}$$

اقسم كل حد على أعلى قوة، وهي n

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + 5\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}$$

خصائص القسمة، والمجموع، والضرب في ثابت

$$= \frac{3+0}{1+5\cdot 0} = 3$$

نهايتا الدالة الثابتة ودالة المقلوب عند المالانهاية

أي أن نهاية المتتابعة هي 3 ، بمعنى أن حدود المتتابعة تقترب من 3 .

تحقق كوّن جدولًا، واختر قيمًا متعددة لـِ n .

n	1	20	40	60	80	90	100	1000	10000
an	0.6667	2.44	2.6889	2.7846	2.8353	2.8526	2.8667	2.9861	2.9986

نلاحظ أن حدود المتتابعة تقترب من العدد 3 كلما كبرت n .





مثال ٧ : نهايات المتتابعات

(b $b_n = \frac{5}{n^4}\left[\frac{n^2\,(n+1)^2}{4}\right]$

الحدود الخمسة الأولى بصورة تقريبية هي 1.8 ,1.953 ,2.222 ,2.813 ,5 . والآن أوجد نهاية المتتابعة

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^4}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^4}\left[\frac{n^2(n^2+2n+1)}{4}\right]$$ ربّع ثنائية الحد

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{5n^4+10n^3+5n^2}{4n^4}$$ اضرب

$$= \frac{\lim_{n\to\infty}5 + 10\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} + 5\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim_{n\to\infty}4}$$ اقسم كل حد على أعلى قوة، وهي n^4 ، ثم استعمل خصائص القسمة ، والمجموع، والضرب في ثابت

$$= \frac{5}{4} = 1.25$$ نهايتا الدالة الثابتة ودالة المقلوب عند المالانهاية

أي أن نهاية المتتابعة هي 1.25 ، بمعنى أن حدود المتتابعة تقترب من 1.25.

تحقَّق كوّن جدول قيم، واختر قيمًا كبيرة لـ n . قيم (b_n في الجدول أدناه مقربة إلى أقرب جزء من مئة)

n تقترب من ∞ ⟵

n	10	100	1000	10000	100000
b_n	1.51	1.28	1.25	1.25	1.25

⟶





تحقق من فهمك

احسب نهاية كل متتابعة مما يأتي إن وجدت:

$$a_n = \frac{4}{n^2+1} \quad \textbf{(7A}$$

$$b_n = \frac{2n^3}{3n+8} \quad \textbf{(7B}$$

$$c_n = \frac{9}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] \quad \textbf{(7C}$$



مسائل مهارات التفكير العليا

51) تبرير: إذا كانت $r(x)$ دالة نسبية، فهل العلاقة $\lim_{x \to c} r(x) = r(c)$ صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا، أو غير صحيحة أبدًا؟ برِّر إجابتك.



كُل نجاح تحققيه الآن هو ما سيبقى معك إلى وقت طويل

اغتنمي اللحظة ولا تهدري الوقت.



المماس والسرعة المتجهة



فيما سبق

درست إيجاد متوسط مُعدّل التغيّر باستعمال القاطع.
(مهارة سابقة)

والآن

- أجدُ مُعدل التغيّر اللحظي لدالة غير خطية عند نقطة بحساب ميل مماس منحنى الدالة عند تلك النقطة.
- أجدُ السرعة المتوسطة المتجهة والسرعة المتجهة اللحظية.

المفردات

المماس
tangent line

مُعدل التغيّر اللحظي
instantaneous rate of change

قسمة الفرق
difference quotient

السرعة المتجهة اللحظية
instantaneous velocity





لماذا:



عندما يقفز المظلي من ارتفاع 15000 ft، فإن سرعته في اتجاه الأرض تزداد مع مرور الزمن؛ بسبب تسارع الجاذبية الأرضية، وتستمر سرعته في الازدياد حتى يفتح مظلته عند ارتفاع 2500 ft ، أو عندما يصل إلى السرعة المتجهة الحدية، وهي السرعة المتجهة التي ينعدم عندها تسارع المظلي، ويحدث هذا عندما تصبح محصلة القوى عليه صفرًا.

المماسات: تعلمت سابقًا أن مُعدّل تغيّر منحنى دالة غير خطية يتغير من نقطة إلى أخرى عليه، ويمكن حساب متوسط مُعدّل تغيّر الدالة غير الخطية على فترة باستعمال ميل القاطع. ففي التمثيلات البيانية أدناه للدالة $y = x^2$ والقاطع الذي يقطعه مارًّا بالنقطة (1, 1) ، وبنقطة أخرى مثل (3, 9) ، أو (2, 4)، أو (1.1, 1.21) ، تجد أن القاطع يتخذ أوضاعًا مختلفة يتغير خلالها ميله.





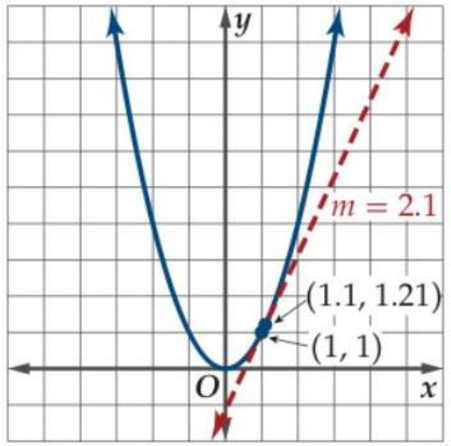
لماذا:



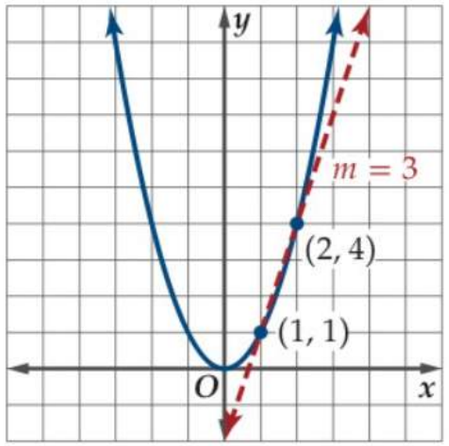
عندما يقفز المظلي من ارتفاع 15000 ft، فإن سرعته في اتجاه الأرض تزداد مع مرور الزمن؛ بسبب تسارع الجاذبية الأرضية، وتستمر سرعته في الازدياد حتى يفتح مظلته عند ارتفاع 2500 ft ، أو عندما يصل إلى السرعة المتجهة الحدية، وهي السرعة المتجهة التي ينعدم عندها تسارع المظلي، ويحدث هذا عندما تصبح محصلة القوى عليه صفرًا.

المماسات: تعلمت سابقًا أن مُعدّل تغيّر منحنى دالة غير خطية يتغير من نقطة إلى أخرى عليه، ويمكن حساب متوسط مُعدّل تغيّر الدالة غير الخطية على فترة باستعمال ميل القاطع. ففي التمثيلات البيانية أدناه للدالة $y = x^2$ والقاطع الذي يقطعه مارًّا بالنقطة (1, 1) ، وبنقطة أخرى مثل (3, 9) ، أو (2, 4)، أو (1.1, 1.21) ، تجد أن القاطع يتخذ أوضاعًا مختلفة يتغير خلالها ميله.

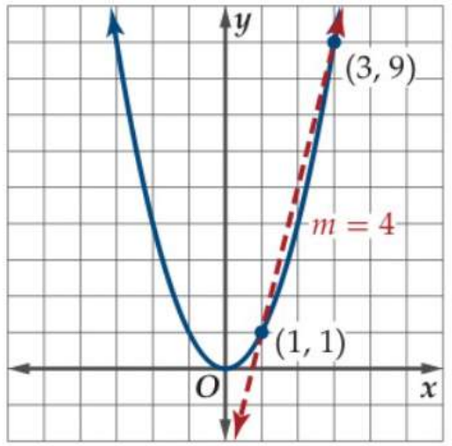




الشكل (3)

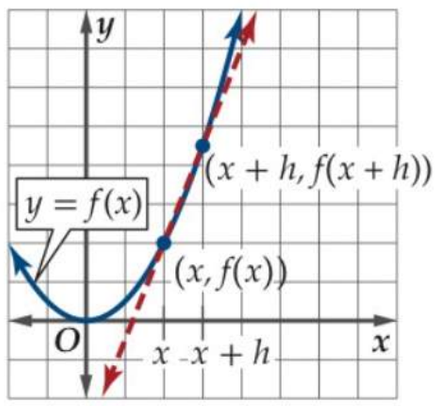


الشكل (2)



الشكل (1)

لاحظ أنه كلما قصُر طولُ الفترة بين نقطتي التقاطع ، زادت دِقَّةُ تقريب ميل القاطع لميل المنحنى في هذه الفترة. إذا واصلنا تقصير الفترة إلى درجة تكون فيها نقطتا التقاطع متطابقتين كما في الشكل (3) أعلاه، فإننا نحصل على **مماس** للمنحنى، وهو مستقيم يتقاطع مع المنحنى، ولكنه لا يعبره عند نقطة التماس. ويمثِّل ميل هذا المستقيم ميل المنحنى عند نقطة التماس.



ولتعريف ميل المماس لمنحنى عند النقطة $(x, f(x))$ فإنه يمكننا الرجوع إلى صيغة ميل القاطع المار بالنقطتين $(x, f(x))$ و $(x + h, f(x + h))$ كما في الشكل المجاور، ومنه يمكن كتابة ميل القاطع بالصيغة:

$$m = \frac{f(x + h) - f(x)}{(x + h) - x} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

وتُسَمَّى هذه الصيغة **قسمة الفرق**.

فكلما اقتربت النقطة $(x+h, f(x+h))$ من النقطة $(x, f(x))$ ؛ أي كلما اقتربت قيمة h من الصفر، فإن القاطع يقترب من مماس المنحنى عند النقطة $(x, f(x))$؛ لذا يمكننا حساب ميل المماس وهو **مُعدل التغيّر اللحظي** للدالة عند تلك النقطة على أنه نهاية ميل القاطع عندما $h \to 0$.

مفهوم أساسي

مُعدل التغيّر اللحظي

مُعدل التغيّر اللحظي للدالة f عند النقطة $(x, f(x))$ هو ميل المماس m عند النقطة $(x, f(x))$ ،

ويُعطى بالصيغة $m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ، بشرط أن تكون النهاية موجودة.

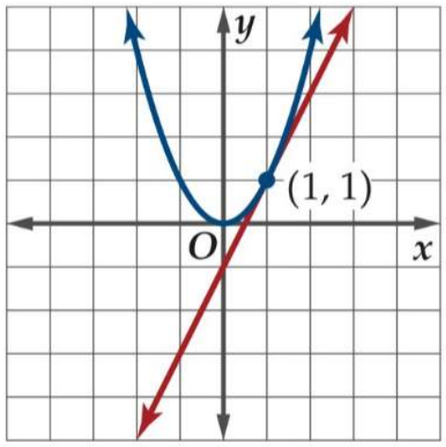
قراءة الرياضيات

اختصارات

يمكن اختصار الجملة ميل المماس لمنحنى الدالة بميل المنحنى.

مثال١ : ميل المماس للمنحنى عند نقطه عليه

أوجد ميل مماس منحنى الدالة $y = x^2$ الممثَّلة بالشكل أدناه عند النقطة(1, 1) .



صيغة مُعدّل التغيّر اللحظي $m = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$x = 1$ $= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$

$f(1+h) = (1+h)^2$, $f(1) = 1^2$ $= \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h}$

فك المقدار $(1+h)^2$ $= \lim_{h\to 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h}$

بسّط $= \lim_{h\to 0} \frac{h(2+h)}{h}$

اقسم على h $= \lim_{h\to 0} (2+h)$

عوّض وبسّط $= 2 + 0 = 2$

أي أن ميل منحنى $y = x^2$ عند النقطة (1, 1) هو 2.

تحقق: من خلال التمثيل البياني للمنحنى ومماسه عند النقطة (1, 1) نلاحظ أن ميل المستقيم الذي يمثِّل المماس يساوي 2 .



تحقق من فهمك :

(1A $y = x^2, (3, 9)$

(1B $y = x^2 + 4, (-2, 8)$





مثال٢ : ميل المنحنى عند أي نقطه عليه

أوجد معادلة ميل منحنى $y = \frac{4}{x}$ عند أي نقطة عليه.

صيغة مُعدل التغيّر اللحظي $\quad m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$f(x+h) = \frac{4}{x+h}$ ، $f(x) = \frac{4}{x}$ $\quad m = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{4}{x+h} - \frac{4}{x}}{h}$

اطرح الكسرين في البسط ، ثم التبسيط $\quad m = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{-4h}{x(x+h)}}{h}$

بسّط $\quad m = \lim_{h \to 0} \frac{-4h}{xh(x+h)}$

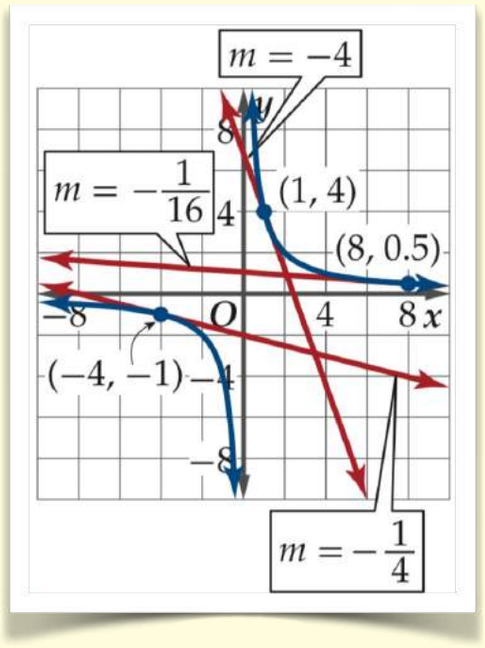
اقسم على h ، ثم اضرب $\quad m = \lim_{h \to 0} \frac{-4}{x^2 + xh}$

عوّض $\quad m = \frac{-4}{x^2 + x(0)}$

بسّط $\quad m = \frac{-4}{x^2}$

أي أن ميل المماس للمنحنى عند أي نقطة $(x, f(x))$ عليه هو $m = -\frac{4}{x^2}$ ،

والشكل المجاور يبين ميل المنحنى عند ثلاث نقط مختلفة.







تحقق من فهمك :

(2A $y = x^2 - 4x + 2$

(2B $y = x^3$





السرعة المتجهة اللحظية : تعلمت سابقًا طريقة حساب السرعة المتوسطة لجسم يقطع مسافة f(t) في زمن مقداره t، من خلال قسمة المسافة المقطوعة على الزمن الذي استغرقه الجسم لقطع تلك المسافة. والسرعة المتجهة هي سرعة لها اتجاه. ويمكنك إيجاد السرعة المتوسطة المتجهة بالطريقة نفسها التي أوجدت بها السرعة المتوسطة مع توضيح اتجاهها باستعمال الإشارة في الناتج، فالإشارة الموجبة للناتج تعني اتجاه الأمام أو الأعلى، أما الإشارة السالبة فتعني اتجاه الخلف أو الأسفل.

مفهوم أساسي **السرعة المتوسطة المتجهة**

إذا أُعطي موقع جسم متحرك بوصفه دالة في الزمن $f(t)$، فإن السرعة المتوسطة المتجهة للجسم v_{avg} في الفترة الزمنية من a إلى b تُعطى بالصيغة

$$v_{avg} = \frac{\text{التغيّر في المسافة}}{\text{التغيّر في الزمن}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

إرشادات للدراسة

موقع الجسم

موقع الجسم عادة يعطى بالعلاقة $y = f(x)$ وذلك لتحديد الموقع في المستوى بدلالة الإحداثيين x, y، أما إذا أُعطي بوصفه دالة في الزمن t، فهذا يعني الإزاحة (محصلة المركبة x والمركبة y) لموقع الجسم عند اللحظة t، وإذا كانت الحركة على خط مستقيم فإن دالة الموقع تكون نفسها دالة المسافة مع أخذ الاتجاه بعين الاعتبار.





مثال٣ من واقع الحياة :السرعة المتوسطة المتجهة

جري: تمثِّل المعادلة $f(t) = -1.3t^2 + 12t$ المسافة بالأميال، والتي قطعها عدّاء بعد t ساعة باتجاه خط النهاية. ما سرعته المتوسطة المتجهة بين الساعتين الثانية والثالثة من زمن السباق؟

أوجد أولًا المسافة الكلية التي قطعها العدَّاء عند الزمن $a = 2\ ,\ b = 3$.

$f(t) = -1.3t^2 + 12t$ المعادلة الأصلية $f(t) = -1.3t^2 + 12t$

$f(2) = -1.3(2)^2 + 12(2)$ $a = 2\ ,\ b = 3$ $f(3) = -1.3(3)^2 + 12(3)$

$f(2) = 18.8$ بسّط $f(3) = 24.3$

استعمل الآن صيغة السرعة المتوسطة المتجهة.

صيغة السرعة المتوسطة المتجهة $v_{\text{avg}} = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

$f(b) = 24.3\ ,\ f(a) = 18.8,\ b = 3\ ,\ a = 2$ $= \dfrac{24.3 - 18.8}{3 - 2}$

بسّط $= 5.5$

أي أن السرعة المتوسطة المتجهة للعدّاء بين الساعتين الثانية والثالثة هي 5.5 mi/h إلى الأمام.

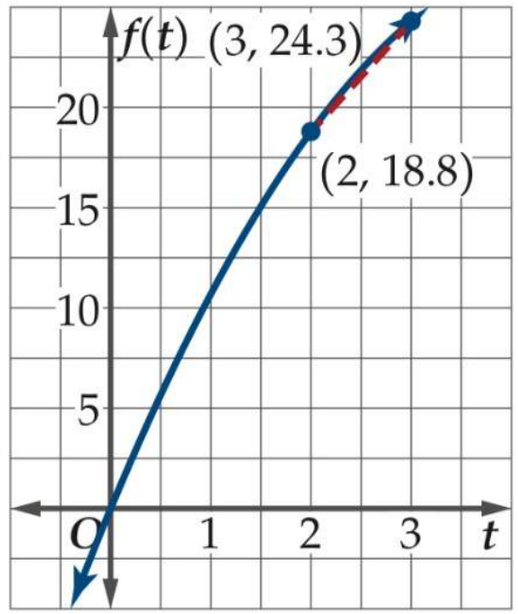




تحقق من فهمك :

3) بالون: تمثِّل $h(t) = 5 + 65t - 16t^2$ الارتفاع بالأقدام بعد t ثانية لبالون يصعد رأسيًّا، ما السرعة المتوسطة المتجهة للبالون بين $t = 1\text{s}$ ، $t = 2\text{s}$؟





إذا أمعنَّا النظر في إجابة المثال 3 ، نجد أنه تم حساب السرعة المتوسطة المتجهة من خلال إيجاد ميل القاطع الذي يمر بالنقطتين (2, 18.8) ، (3, 24.3) كما في الشكل المجاور.
والسرعة المتجهة التي تم حسابها هي السرعة المتوسطة المتجهة خلال فترة زمنية ، وليست **السرعة المتجهة اللحظية**، والتي تساوي سرعة الجسم المتجهة عند لحظةٍ زمنيةٍ محددة.

ولإيجاد سرعة العدّاء المتجهة عند لحظةٍ زمنيةٍ محددة t ، فإننا نجد مُعدّل التغيّر اللحظي لمنحنى $f(t)$ عند تلك اللحظة .

مفهوم أساسي — السرعة المتجهة اللحظية

إذا أُعطي موقع جسم متحرك بوصفه دالة في الزمن $f(t)$ ، فإن السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ لذلك الجسم عند الزمن t تعطى بالصيغة

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

بشرط أن تكون هذه النهاية موجودة.





مثال٤ : السرعة المتجهة اللحظية عند لحظة زمنية معينة

سقطت كرة من قمة بناية ارتفاعها 2000 ft ، وتمثِّل الدالة $f(t) = 2000 - 16t^2$ ارتفاع الكرة عن سطح الأرض بالأقدام بعد t ثانية من سقوطها. أوجد السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للكرة بعد 5 s.

لإيجاد السرعة المتجهة اللحظية، افترض أن $t = 5$ ، وطبق صيغة السرعة المتجهة اللحظية.

صيغة السرعة المتجهة اللحظية

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

$f(5+h) = 2000 - 16(5+h)^2$, $f(5) = 2000 - 16(5)^2$

$$v(5) = \lim_{h \to 0} \frac{2000 - 16(5+h)^2 - [2000 - 16(5)^2]}{h}$$

فك المقدار $(5+h)^2$ واضرب وبسّط

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-160h - 16h^2}{h}$$

حلّل

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(-160 - 16h)}{h}$$

اقسم على h

$$= \lim_{h \to 0} (-160 - 16h)$$

عوّض وبسّط

$$= -160 - 16(0) = -160$$

أي أن سرعة الكرة بعد 5 s هي 160 ft/s، أما الإشارة السالبة فتعني أن الكرة تهبط لأسفل.





تحقق من فهمك :

4) سقطت علبة مادة التنظيف من يد عامل في أثناء قيامه بتنظيف نافذة بناية على ارتفاع 1400 ft عن سطح الأرض، وتمثل الدالة $h(t) = 1400 - 16t^2$ ارتفاع العلبة بالأقدام بعد t ثانية من سقوطها. أوجد السرعة المتجهة اللحظية للعلبة $v(t)$ بعد 7 s .





مثال٥ : السرعة المتجهة اللحظية عند أي لحظة زمنية

تُعطى المسافة التي يقطعها جسم بالسنتمترات بعد t ثانية بالدالة $s(t) = 18t - 3t^3 - 1$. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للجسم عند أي زمن .

طبِّق صيغة السرعة المتجهة اللحظية.

صيغة السرعة المتجهة اللحظية

$$v(t) = \lim_{h\to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$$

$s(t+h) = 18(t+h) - 3(t+h)^3 - 1$
$s(t) = 18t - 3t^3 - 1$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{18(t+h) - 3(t+h)^3 - 1 - [18t - 3t^3 - 1]}{h}$$

فك المقدار $(t+h)^3$ واضرب وبسّط

$$= \lim_{h\to 0} \frac{18h - 9t^2h - 9th^2 - 3h^3}{h}$$

حلّل

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(18 - 9t^2 - 9th - 3h^2)}{h}$$

اقسم على h

$$= \lim_{h\to 0} (18 - 9t^2 - 9th - 3h^2)$$

عوّض وبسّط

$$= 18 - 9t^2 - 9t(0) - 3(0)^2$$

بسّط

$$= 18 - 9t^2$$

أي أنَّ معادلة سرعة الجسم المتجهة اللحظية عند أي زمن هي $v(t) = 18 - 9t^2$.





تحقق من فهمك :

5) تمثِّل الدالة $s(t) = 90t - 16t^2$ ارتفاع صاروخ بعد t ثانية من إطلاقه رأسيًّا من مستوى سطح البحر ، حيث الارتفاع بالأقدام. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للصاروخ عند أي زمن .





مسائل مهارات التفكير العليا

34) تحدٍّ : أوجد معادلة ميل مماس منحنى $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x$ عند أي نقطة عليه.





مسائل مهارات التفكير العليا

35) **تبرير:** هل العبارة الآتية صحيحة أو خاطئة " يقطع المماس منحنى الدالة عند نقطة التماس فقط"؟ برِّر إجابتك.



المجد لمن اختار طريق الأمل في حين أن اليأس يُخيم عليه ،

المجد لمن كان قادراً على الاستسلام ولم يفعل .!



موضوع الدرس: المشتقات

فيما سبق

درستُ حساب ميل المماسات لإيجاد مُعدّل التغيُّر اللحظي. (الدرس 3–4)

والآن

- أجدُ ميل منحنى دالة غير خطية باستعمال المشتقات.
- أستعملُ قواعد الاشتقاق لإيجاد المشتقات.

المفردات

المشتقة
derivative

الاشتقاق
differentiation

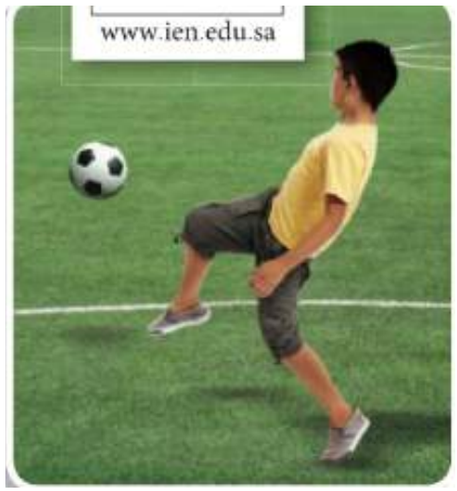
المعادلة التفاضلية
differential equation

المؤثر التفاضلي
differential operator

موضوع الدرس: المشتقات



ركل أحمد كرةً رأسيًّا إلى أعلى من ارتفاع 3 ft، فانطلقت بسرعة 65 ft/s .
يمكنك استعمال معادلات الحركة بتسارع ثابت، التي درستها في الفيزياء لكتابة دالة تصف ارتفاع الكرة بعد t ثانية، ومن ثم تحديد ما إذا كانت الكرة ستبلغ ارتفاع 68 ft أم لا.



قواعد أساسية للاشتقاق: استعملت النهايات في الدرس 3-4 لتحديد ميل مماس منحنى الدالة $f(x)$ عند أي نقطة عليه ، وتُسمى هذه النهاية **مشتقة الدالة** ويرمز لها بالرمز $f'(x)$، وتُعطى بالصيغة:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

بشرط وجود هذه النهاية، وتُسمَّى عملية إيجاد المشتقة **الاشتقاق**، وتُسمَّى النتيجة **معادلة تفاضلية**.

موضوع الدرس: المشتقات

مشتقة الدالة عند أي نقطة



أوجد مشتقة $f(x) = 4x^2 - 5x + 8$ باستعمال النهايات، ثم احسب قيمة المشتقة عندما $x = 1\ ,\ 5$.

صيغة المشتقة

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$f(x+h) = 4(x+h)^2 - 5(x+h) + 8$,
$f(x) = 4x^2 - 5x + 8$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4(x+h)^2 - 5(x+h) + 8 - (4x^2 - 5x + 8)}{h}$$

بسّط

$$= \lim_{h \to 0} \frac{8xh + 4h^2 - 5h}{h}$$

حلّل

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(8x + 4h - 5)}{h}$$

اقسم على h

$$= \lim_{h \to 0} (8x + 4h - 5)$$

عوّض

$$= [8x + 4(0) - 5] = 8x - 5$$

أي أن مشتقة $f(x)$ هي $f'(x) = 8x - 5$. احسب $f'(x)$ عندما $x = 1\ ,\ 5$.

	المعادلة الأصلية	
$f'(x) = 8x - 5$		$f'(x) = 8x - 5$
$f'(1) = 8(1) - 5$	$x = 1\ ,\ x = 5$	$f'(5) = 8(5) - 5$
$f'(1) = 3$	بسّط	$f'(5) = 35$

قراءة الرياضيات

المشتقات

يُقرأ الرمز $f'(x)$ مشتقة f بالنسبة للمتغير x، أو f prime of x.

تاريخ الرياضيات

شرف الدين الطوسي

العالم المسلم شرف الدين الطوسي (المتوفى عام 610هـ) من خلال دراسته المعادلات التي درجتها ≤3 استعمل في حل هذه المعادلات، القيمة العظمى للعبارات الجبرية، وأخذ" المشتق الأول "لهذه العبارات من دون أن يستعمل اسمه (المشتق الأول)، وبرهن على أن جذر المعادلة التي يحصل عليها إذا ما عُوِّض به في العبارة الجبرية، أعطى القيمة العظمى للعبارة.

موضوع الدرس: المشتقات



أوجد مشتقة $f(x)$ باستعمال النهايات، ثم احسب قيمة المشتقة عند قيم x المعطاة:

(1A $f(x) = 6x^2 + 7, x = 2, 5$

(1B $f(x) = -5x^2 + 2x - 12, x = 1, 4$

موضوع الدرس: المشتقات



يُرمز لمشتقة $y = f(x)$ أيضًا بالرموز $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$, y' ، وإذا سبق الدالة **المؤثر التفاضلي** $\frac{d}{dx}$ ، فإن ذلك يعني إيجاد مشتقة الدالة.

حتى هذه اللحظة استعملت النهاية؛ لإيجاد كلٍّ من المشتقة وميل المماس والسرعة المتجهة اللحظية. وتُعدَّ قاعدة مشتقة القوة من أكثر القواعد فعالية لإيجاد المشتقات من دون اللجوء إلى استعمال النهايات، مما يجعل عملية إيجاد المشتقات أكثر سهولةً ودقة.

مفهوم أساسي — قاعدة مشتقة القوة

التعبير اللفظي: قوة x في المشتقة أقل بواحد من قوة x في الدالة الأصلية، ومعامل x في المشتقة يساوي قوة x في الدالة الأصلية.

الرموز: إذا كان $f(x) = x^n$ ، حيث n عدد حقيقي، فإن: $f'(x) = n x^{n-1}$.

موضوع الدرس: المشتقات

قاعدة مشتقة القوة .

مثال ٢

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

(a $f(x) = x^9$

الدالة المعطاة	$f(x) = x^9$
قاعدة مشتقة القوة	$f'(x) = 9x^{9-1}$
بسِّط	$= 9x^8$

(b $g(x) = \sqrt[5]{x^7}$

الدالة المعطاة	$g(x) = \sqrt[5]{x^7}$
أعد كتابة الدالة كقوّة نسبية	$g(x) = x^{\frac{7}{5}}$
قاعدة مشتقة القوة	$g'(x) = \frac{7}{5} x^{\frac{7}{5}-1}$
بسِّط	$= \frac{7}{5} x^{\frac{2}{5}} = \frac{7}{5}\sqrt[5]{x^2}$

موضوع الدرس: المشتقات

قاعدة مشتقة القوة .



$$h(x) = \frac{1}{x^8} \quad \text{(c}$$

الدالة المعطاة $\qquad h(x) = \frac{1}{x^8}$

أعد كتابة الدالة كقوّة سالبة $\qquad h(x) = x^{-8}$

قاعدة مشتقة القوة $\qquad h'(x) = -8\,x^{-8-1}$

بسِّط $\qquad = -8\,x^{-9} = -\frac{8}{x^9}$

تنبيه!

مشتقات القوى السالبة

مشتقة $f(x) = x^{-4}$ ليست $f'(x) = -4x^{-3}$. تذكر بأننا يجب أن نطرح واحدًا من الأس؛ لنحصل على: $-4-1=-4+(-1)=-5$؛ لذا فإن $f'(x) = -4x^{-5}$.

موضوع الدرس: المشتقات



أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

(2A $j(x) = x^4$

(2B $k(x) = \sqrt{x^3}$

(2C $m(x) = \frac{1}{x^5}$



هناك العديد من قواعد الاشتقاق الأخرى المهمة التي تفيد في إيجاد مشتقات الدوال التي تحوي أكثر من حدٍّ.

مفهوم أساسي

قواعد أخرى للاشتقاق

مشتقة الثابت: مشتقة الدالة الثابتة تساوي صفرًا؛ أي أنه إذا كانت $f(x) = c$، حيث c عدد ثابت، فإن $f'(x) = 0$.

مشتقة مضاعفات القوّة: إذا كانت $f(x) = cx^n$ ، حيث c ثابت، و n عدد حقيقي، فإن: $f'(x) = cnx^{n-1}$.

مشتقة المجموع أو الفرق: إذا كانت: $f(x) = g(x) \pm h(x)$ ، فإن: $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$.

موضوع الدرس: المشتقات

مثال ٣

قواعد الاشتقاق .

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

(a $f(x) = 5x^3 + 4$

الدالة المعطاة	$f(x) = 5x^3 + 4$
قواعد مشتقات الثابت، ومضاعفات القوى، والمجموع	$f'(x) = 5 \cdot 3x^{3-1} + 0$
بسِّط	$= 15x^2$

(b $g(x) = x^5(2x^3 + 4)$

الدالة المعطاة	$g(x) = x^5(2x^3 + 4)$
خاصية التوزيع	$g(x) = 2x^8 + 4x^5$
قاعدتا مشتقتَي مضاعفات القوى، والمجموع	$g'(x) = 2 \cdot 8x^{8-1} + 4 \cdot 5x^{5-1}$
بسِّط	$= 16x^7 + 20x^4$

مثال ٣

قواعد الاشتقاق .

$$h(x) = \frac{5x^3 - 12x + 6\sqrt{x^5}}{x} \quad \text{(c}$$

الدالة المعطاة $h(x) = \dfrac{5x^3 - 12x + 6\sqrt{x^5}}{x}$

اقسم كل حدٍّ في البسط على x $h(x) = \dfrac{5x^3}{x} - \dfrac{12x}{x} + \dfrac{6\sqrt{x^5}}{x}$

$x^{\frac{5}{2}} \cdot x^{-1} = x^{\frac{3}{2}}$ $h(x) = 5x^2 - 12 + 6\,x^{\frac{3}{2}}$

قواعد مشتقات الثابت، ومضاعفات القوى، والمجموع والفرق $h'(x) = 5 \cdot 2\,x^{2-1} - 0 + 6 \cdot \dfrac{3}{2}\,x^{\frac{3}{2}-1}$

بسِّط $= 10x + 9x^{\frac{1}{2}} = 10x + 9\sqrt{x}$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

موضوع الدرس: المشتقات



أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

(3A $f(x) = 2x^5 - x^3 - 102$

(3B $g(x) = 3x^4(x + 2)$

(3C $h(x) = \dfrac{4x^4 - 3x^2 + 5x}{x}$

موضوع الدرس: المشتقات



الآن ، وبعد أن درست القواعد الأساسية للاشتقاق، يمكنك حل المسائل التي تتطلب حساب ميل مماس المنحنى، أو إيجاد السرعة المتجهة اللحظية بخطوات أقل، ففي مثال 5 من الدرس 3–4 ، أوجدنا معادلة السرعة المتجهة اللحظية لجسمٍ متحركٍ، وستلاحظ الآن سهولة حل المسألة نفسها بتطبيق قواعد الاشتقاق.

تنبيه!

للتسهيل يمكنك إيجاد كلٍّ من ميل المماس لمنحنى الدالة، والسرعة المتجهة اللحظية، ومشتقة الدالة، باستخدام القواعد ما لم يُطلب منك استخدام النهايات لإيجاد أيٍّ منها.

موضوع الدرس: المشتقات

مثال ٤

السرعة اللحظية المتجهة

تُعطى المسافة التي يقطعها جسم بالسنتمترات بعد t ثانية بالدالة: $s(t) = 18t - 3t^3 - 1$ ، أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للجسم.

السرعة المتجهة اللحظية للجسم هي $s'(t)$.

الدالة المعطاة	$s(t) = 18t - 3t^3 - 1$
قواعد مشتقات الثابت، ومضاعفات القوى، والفرق	$s'(t) = 18 \cdot 1t^{1-1} - 3 \cdot 3t^{3-1} - 0$
بسِّط	$= 18 - 9t^2$

أي أن سرعة الجسم المتجهة اللحظية هي: $v(t) = 18 - 9t^2$ ، لاحظ أن هذه الإجابة مكافئة لتلك التي حصلت عليها في المثال 5 من الدرس 3-4 .



4) الدالة: $h(t) = 55t - 16t^2$ تمثِّل الارتفاع بالأقدام بعد t ثانية لكرة قُذِفت رأسيًّا إلى أعلى. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية للكرة عند أي زمن .

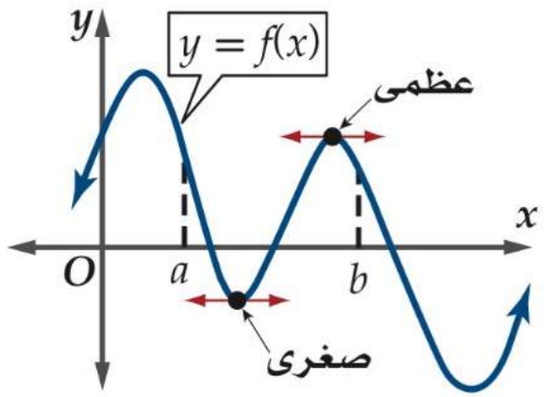
موضوع الدرس: المشتقات

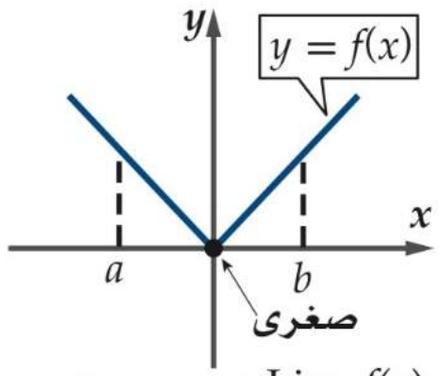
النقطة التي تكون عندها مشتقة الدالة صفرًا أو غير موجودة تُسمَّى نقطةً حرجةً للدالة، والنقطة الحرجة قد تشير إلى وجود نقطة قيمة عظمى أو صغرى للدالة ، وتحدثُ عندما يكون ميل مماس منحنى الدالة صفرًا أو غير موجود.

مفهوم أساسي

نظرية القيمة القصوى

إذا كانت $f(x)$ متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ ، فإن لها قيمة عظمى وصغرى على الفترة $[a, b]$ ، وذلك إما عند أحد طرفَي الفترة أو عند إحدَى النقاط الحرجة.





غير موجودة $\lim_{x \to 0} f(x)$

لتعيين نقاط القيم العظمى والصغرى للدالة على فترة مغلقة، لا بد من حساب قيم الدالة عند أطراف الفترة، وعند النقاط الحرجة في تلك الفترة.

القيمتان العظمى والصغرى للدالة .

مثال ٥
من واقع الحياة

أفعوانية : الدالة: $h(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + \frac{11}{3}$ تمثِّل ارتفاع إبراهيم بالأقدام في أثناء ركوبه أفعوانية، حيث t الزمن بالثواني في الفترة الزمنية $[1, 12]$ ، أوجد أقصى وأدنى ارتفاع يبلغه إبراهيم.

أوجد مشتقة $h(t)$.

$h(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + \frac{11}{3}$ — الدالة المعطاة

$h'(t) = -\frac{1}{3} \cdot 3t^{3-1} + 4 \cdot 2t^{2-1} + 0$ — قواعد اشتقاق الثابت، ومضاعفات القوى، والمجموع، والفرق

$= -t^2 + 8t$ — بسّط

أوجد النقاط الحرجة بحل المعادلة $h'(t) = 0$.

$h'(t) = 0$ — اكتب المعادلة

$-t^2 + 8t = 0$ — $h'(t) = -t^2 + 8t$

$-t(t - 8) = 0$ — حلّل

إذن: $t = 8$ أو $t = 0$ ، وحيث إن $t = 0$ لا تقع في الفترة $[1, 12]$ ، فإن للدالة نقطة حرجة واحدة عند $t = 8$ ؛ لذا نحسب قيم $h(t)$ عندما $t = 1, 8, 12$.

$h(1) = -\frac{1}{3}(1)^3 + 4(1)^2 + \frac{11}{3} \approx 7.33$

$h(8) = -\frac{1}{3}(8)^3 + 4(8)^2 + \frac{11}{3} = 89$ — قيمة عظمى

$h(12) = -\frac{1}{3}(12)^3 + 4(12)^2 + \frac{11}{3} \approx 3.67$ — قيمة صغرى

أي أن أقصى ارتفاع يبلغه إبراهيم هو 89 ft، وذلك بعد 8 s، في حين أن أدنى ارتفاع هو 3.67 ft تقريبًا بعد 12 s.



الربط مع الحياة

ازدادت سرعة الأفعوانيات حديثًا لتصل إلى 120 mi/h ، وكذلك ازدادت ارتفاعاتها لتبلغ 450 ft.



5) رياضة القفز: الدالة: $h(t) = 20t^2 - 160t + 330$ تمثِّل ارتفاع سعد بالأقدام في أثناء مشاركته في قفزة البنجي (القفز من أماكن مرتفعة، بحيث تكون القدمان موثقتين بحبلٍ مطاطيٍّ)، حيث t الزمن بالثواني في الفترة $[0, 6]$. أوجد أقصى وأدنى ارتفاع يبلغه سعد في هذه الفترة الزمنية.

موضوع الدرس: المشتقات



قاعدتا مشتقَّتَي الضرب والقسمة: تعلَّمت في هذا الدرس أن مشتقة مجموع دالَّتين تساوي مجموع مشتقَّتَي الدالَّتين، فهل تكون مشتقة ناتج ضرب دالتين مساويةً لناتج ضرب مشتقتَي الدالتين؟ افترض أن:
$f(x) = x, g(x) = 3x^3$.

مشتقة الضرب

$$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = \frac{d}{dx}[x \cdot 3x^3]$$
$$= \frac{d}{dx}(3x^4) = 12x^3$$

ضرب المشتقات

$$\frac{d}{dx}f(x) \cdot \frac{d}{dx}g(x) = \frac{d}{dx}(x) \cdot \frac{d}{dx}(3x^3)$$
$$= 1 \cdot 9x^2 = 9x^2$$

يتضح من هذا المثال أن مشتقة ناتج ضرب دالَّتين لا تساوي بالضرورة ناتج ضرب مشتقتَي الدالتين، ويمكننا استعمال القاعدة الآتية لإيجاد مشتقة ناتج ضرب دالَّتين.

مفهوم أساسي

قاعدة مشتقة الضرب

إذا كانت مشتقة كلٍّ من الدالتين f وَ g موجودة عند x ، فإن: $\frac{d}{dx}[f(x)\,g(x)] = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$.

ستبرهن قاعدة مشتقة الضرب في التمرين 48

قاعدة مشتقة الضرب .

مثال ٦

أوجد مشتقة كل دالةٍ مما يأتي:

(a $h(x) = (x^3 - 2x + 7)(3x^2 - 5)$

افترض أن: $f(x) = x^3 - 2x + 7, g(x) = 3x^2 - 5$، أي أن: $h(x) = f(x)g(x)$.

من الفرض	$f(x) = x^3 - 2x + 7$
قواعد مشتقات القوة، ومضاعفات القوى، والثابت، والمجموع والفرق	$f'(x) = 3x^2 - 2$
من الفرض	$g(x) = 3x^2 - 5$
قواعد مشتقات مضاعفات القوى، والثابت، والفرق	$g'(x) = 6x$

استعمل $f(x), f'(x), g(x), g'(x)$ لإيجاد مشتقة $h(x)$.

قاعدة مشتقة الضرب	$h'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$
عوّض	$= (3x^2 - 2)(3x^2 - 5) + (x^3 - 2x + 7)(6x)$
خاصية التوزيع	$= 9x^4 - 15x^2 - 6x^2 + 10 + 6x^4 - 12x^2 + 42x$
بسّط	$= 15x^4 - 33x^2 + 42x + 10$

إرشادات للدراسة

قاعدة مشتقة الضرب

يَنتج عن قاعدة مشتقة الضرب مقدار يمكن تبسيطه. ويمكنك أيضًا تركه على حاله من دون تبسيط، ما لم تكن في حاجة إلى تبسيطه.

(b $h(x) = (x^3 - 4x^2 + 48x - 64)(6x^2 - x - 2)$

افترض أن: $f(x) = x^3 - 4x^2 + 48x - 64$, $g(x) = 6x^2 - x - 2$.

$f(x) = x^3 - 4x^2 + 48x - 64$ من الفرض

$f'(x) = 3x^2 - 8x + 48$ قواعد مشتقات القوة، ومضاعفات القوى، والثابت، والمجموع والفرق

$g(x) = 6x^2 - x - 2$ من الفرض

$g'(x) = 12x - 1$ قواعد مشتقات ومضاعفات القوى، والقوة، والثابت، والفرق

استعمل $f(x), f'(x), g(x), g'(x)$ لإيجاد مشتقة $h(x)$.

$h'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$ قاعدة مشتقة الضرب

$= (3x^2 - 8x + 48)(6x^2 - x - 2) + (x^3 - 4x^2 + 48x - 64)(12x - 1)$ عوّض

موضوع الدرس: المشتقات



أوجد مشتقة كل دالةٍ مما يأتي:

(6A $h(x) = (x^5 + 13x^2)(7x^3 - 5x^2 + 18)$

(6B $h(x) = (x^2 + x^3 + x)(8x^2 + 3)$

بطريقة التبرير نفسها في مشتقة الضرب، يمكنك ملاحظة أن مشتقة ناتج قسمة دالتين لا تساوي ناتج قسمة مشتقتَي الدالتين، ويمكن استعمال القاعدة الآتية لحساب مشتقة قسمة دالتين.

مفهوم أساسي — **قاعدة مشتقة القسمة**

إذا كانت مشتقة كلٍّ من الدالتين f, g موجودة عند x ، وكان $g(x) \neq 0$ ، فإن:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{[g(x)]^2}$$

ستبرهن قاعدة مشتقة القسمة في التمرين 50

موضوع الدرس: المشتقات

قاعدة مشتقة القسمة .



أوجد مشتقة كل دالةٍ مما يأتي:

(a $h(x) = \dfrac{5x^2 - 3}{x^2 - 6}$

افترض أن: $f(x) = 5x^2 - 3, g(x) = x^2 - 6$ ؛ أي أن: $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

$f(x) = 5x^2 - 3$ من الفرض

$f'(x) = 10x$ قواعد مشتقات مضاعفات القوى ، والثابت، والفرق

$g(x) = x^2 - 6$ من الفرض

$g'(x) = 2x$ قواعد مشتقات القوة، والثابت ، والفرق

استعمل $f(x), f'(x), g(x), g'(x)$ لإيجاد مشتقة $h(x)$.

$h'(x) = \dfrac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2}$ قاعدة مشتقة القسمة

$= \dfrac{10x(x^2 - 6) - (5x^2 - 3)(2x)}{(x^2 - 6)^2}$ عوّض

$= \dfrac{10x^3 - 60x - 10x^3 + 6x}{(x^2 - 6)^2}$ خاصية التوزيع

$= \dfrac{-54x}{(x^2 - 6)^2}$ بسّط

إرشادات للدراسة

قاعدة مشتقة القسمة

يُعدّ تبسيط ناتج مشتقة القسمة مهمًّا في كثير من التمارين ، إلا أنه ليس من الضروري فك أقواس المقام، ما لم ينتج عن ذلك تبسيط أكثر.

مثال ٧

قاعدة مشتقة القسمة .

(b $h(x) = \dfrac{x^2 + 8}{x^3 - 2}$

افترض أن: $f(x) = x^2 + 8\ ,\ g(x) = x^3 - 2$.

$f(x) = x^2 + 8$ من الفرض

$f'(x) = 2x$ قواعد مشتقات القوة ، والثابت، والمجموع

$g(x) = x^3 - 2$ من الفرض

$g'(x) = 3x^2$ قواعد مشتقات القوة ، والثابت، والفرق

استعمل $f(x), f'(x), g(x), g'(x)$ لإيجاد مشتقة $h(x)$.

$h'(x) = \dfrac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2}$ قاعدة مشتقة القسمة

$= \dfrac{2x(x^3 - 2) - (x^2 + 8)3x^2}{(x^3 - 2)^2}$ عوّض

$= \dfrac{-x^4 - 24x^2 - 4x}{(x^3 - 2)^2}$ فك الأقواس، ثم بسّط

موضوع الدرس: المشتقات



أوجد مشتقة كل دالةٍ مما يأتي:

(7A $j(x) = \dfrac{7x - 10}{12x + 5}$

(7B $k(x) = \dfrac{6x}{2x^2 + 4}$

مسائل مهارات التفكير العليا

46) اكتشف الخطأ: قام كلٌّ من أحمد وعبدالله بإيجاد $[f'(x)]^2$ للدالة $f(x) = 6x^2 + 4x$ ، حيث كانت إجابة عبد الله: $144x^2 + 96x + 16$ ، في حين كانت إجابة أحمد: $144x^3 + 144x^2 + 32x$ ، فأيهما كانت إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك.

مسائل مهارات التفكير العليا

47) تحدٍّ: أوجد $f'(y)$ علمًا بأن:

$$f(y) = 10x^2y^3 + 5xz^2 - 6xy^2 + 8x^5 - 11x^8yz^7$$

مسائل مهارات التفكير العليا

49) تبرير: بيِّن ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أو خاطئة، وبرِّر إجابتك.

"إذا كانت: $f(x) = x^{5n+3}$ ، فإن $f'(x) = (5n+3)\,x^{5n+2}$"

طاب صباحكم ، ابتسموا لقد ابتدأ يوم جديد من أعماركم ،

تفاءلوا بما تحبون أن يكون ، فوضوا أمركم لله دائماً .



فيما سبق

درستُ حساب النهايات جبريًّا باستعمال خصائصها. (الدرس 2–4)

والآن

- أقرِّب المساحة تحت منحنى دالة باستعمال مستطيلات.
- أجد المساحة تحت منحنى دالة باستعمال التكامل المحدد.

المفردات

التجزيء المنتظم	regular partition
التكامل المحدد	definite integral
الحد الأدنى	lower limit
الحد الأعلى	upper limit
مجموع ريمان الأيمن	right Riemann sum
التكامل	integration





لماذا



التكلفة الحدية (الهامشية) هي التكلفة الإضافية المترتبة على إنتاج وحدة إضافية واحدة من منتج ما، ويمكن إيجاد معادلة التكلفة الحدية باشتقاق معادلة التكلفة الحقيقية للمنتج. تُمثل الدالة $f(x) = 10 - 0.002x$ التكلفة الحدية لطباعة x نسخة من كتاب ما بالريال .

المساحة تحت منحنى سبق أن درست في الهندسة طريقة حساب مساحات الأشكال الأساسية كالمثلث والمستطيل وشبه المنحرف، كما درست حساب مساحات بعض الأشكال المركبة التي تتكون من أشكال أساسية، إلا أن العديد من الأشكال المركبة لا تتكون من أشكال أساسية، مما يستدعي الحاجة إلى طريقة عامة لحساب مساحة أي شكل ثنائي الأبعاد.

يمكننا تقريب مساحة شكل غير منتظم من خلال استعمال شكل أساسي معلوم المساحة كالمستطيل. فمثلًا يمكننا تقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = -x^2 + 12x$ والمحور x على الفترة $[0, 12]$ باستعمال مستطيلات متساوية العرض.





مثال ١

المساحة تحت منحنى باستعمال مستطيلات

قرِّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = -x^2 + 12x$ والمحور x على الفترة $[0, 12]$ باستعمال 4، 6، 12 مستطيلًا على الترتيب. استعمل الطرف الأيمن لقاعدة كل مستطيل لتحديد ارتفاعه.

مثّل الدالة والمستطيلات كما في الأشكال التالية، باتباع الخطوات التالية:

1) أوجد طول الفترة $[0, 12]$ بطرح بدايتها من نهايتها.

2) أوجد عرض كل مستطيل بقسمة طول الفترة على عدد المستطيلات، فمثلًا إذا كان عدد المستطيلات 4 نقسم: $12 \div 4 = 3$

3) قسِّم الفترة $[0, 12]$ إلى 4 فترات (لأربعة مستطيلات) طول كل منها يساوي 3

4) ارسم على كل فترة جزئية مستطيلًا أحد بعديه يساوي طول هذه الفترة، والبعد الآخر يساوي قيمة الدالة عند الطرف الأيمن للفترة.

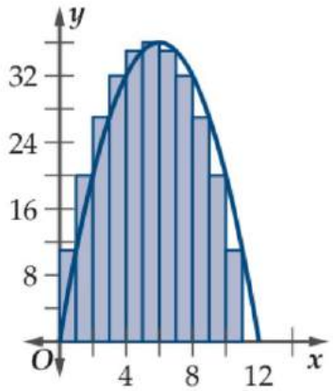
فمثلًا ارتفاعات المستطيلات في الشكل (1) هي $f(12), f(9), f(6), f(3)$. ويمكننا استعمال ارتفاعات المستطيلات وأطوال قواعدها لتقريب المساحة المطلوبة.





مثال ١

المساحة تحت منحنى باستعمال مستطيلات



الشكل (1)

المساحة باستعمال 4 مستطيلات

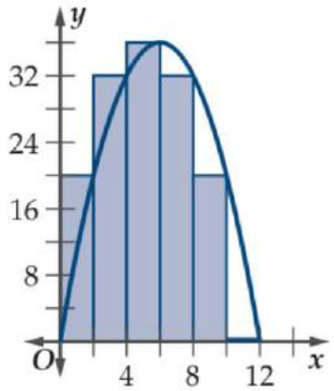
$R_1 = 3 \cdot f(3) = 81$

$R_2 = 3 \cdot f(6) = 108$

$R_3 = 3 \cdot f(9) = 81$

$R_4 = 3 \cdot f(12) = 0$

المساحة الكلية 270 وحدة مربعة.



الشكل (2)

المساحة باستعمال 6 مستطيلات

$R_1 = 2 \cdot f(2) = 40$

$R_2 = 2 \cdot f(4) = 64$

$R_3 = 2 \cdot f(6) = 72$

$R_4 = 2 \cdot f(8) = 64$

$R_5 = 2 \cdot f(10) = 40$

$R_6 = 2 \cdot f(12) = 0$

المساحة الكلية 280 وحدة مربعة.

الشكل (3)

المساحة باستعمال 12 مستطيلًا

$R_1 = 1 \cdot f(1) = 11$

$R_2 = 1 \cdot f(2) = 20$

$R_3 = 1 \cdot f(3) = 27$

$R_4 = 1 \cdot f(4) = 32$

$R_5 = 1 \cdot f(5) = 35$

$R_6 = 1 \cdot f(6) = 36$

$R_7 = 1 \cdot f(7) = 35$

$R_8 = 1 \cdot f(8) = 32$

$R_9 = 1 \cdot f(9) = 27$

$R_{10} = 1 \cdot f(10) = 20$

$R_{11} = 1 \cdot f(11) = 11$

$R_{12} = 1 \cdot f(12) = 0$

المساحة الكلية 286 وحدة مربعة

أي أن المساحة التقريبية باستعمال 4 ، 6 ، 12 مستطيلًا هي بالترتيب: 270 وحدة مربعة، 280 وحدة مربعة، 286 وحدة مربعة.







1) قرِّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = -x^2 + 24x$ والمحور x على الفترة $[0, 24]$ باستعمال 6، 8، 12 مستطيلًا على الترتيب. استعمل الطرف الأيمن لقاعدة كل مستطيل لتحديد ارتفاعه.







لاحظ أن المستطيلات الأقل عرضًا تمثِّل المساحة المطلوبة بصورة أفضل، وتعطي تقريبًا أدق للمساحة الكلية. وكما استعملنا الأطراف اليمنى لقاعدة مستطيل لتحديد ارتفاعاتها ، فإنه يمكننا أيضًا استعمال أطرافها اليسرى لتحديد ارتفاعاتها وهذا قد ينتج عنه تقريب مختلف للمساحة.

إن استعمال الأطراف اليمنى أو اليسرى لقواعد المستطيلات لتحديد ارتفاعاتها قد يؤدي إلى إضافة أجزاء لا تقع بين المنحنى والمحور x ، أو حذف أجزاء تقع بين المنحنى والمحور x . ومن الممكن الحصول على تقريب أفضل للمساحة في بعض الأحيان باستعمال كل من الأطراف اليمنى واليسرى لقواعد المستطيلات ، ثم أخذ الوسط للتقريبين.





مثال ٢

المساحة تحت منحنى باستعمال الأطراف اليمنى واليسرى للمستطيلات

قرِّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = x^2$ والمحور x في الفترة $[0, 4]$ باستعمال مستطيلات عرض كل واحدٍ منها وحدة واحدة . استعمل الأطراف اليمنى ثم اليسرى للمستطيلات لتحديد ارتفاعاتها ، ثم احسب الوسط للتقريبين.

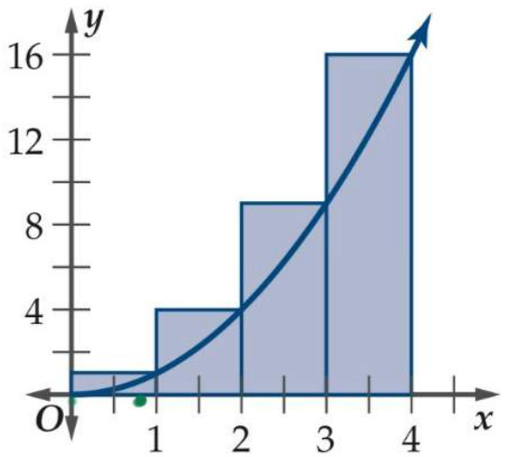
إن استعمال مستطيلات عرض كل منها وحدة واحدة ينتج عنه 4 مستطيلات سواء أكانت الأطراف اليمنى أو اليسرى للمستطيلات هي التي تحدد ارتفاعاتها. ويوضح الشكل (1) المستطيلات باستعمال الأطراف اليمنى، في حين يوضح الشكل (2) المستطيلات باستعمال الأطراف اليسرى.





مثال ٢

المساحة تحت منحنى باستعمال الأطراف اليمنى واليسرى للمستطيلات

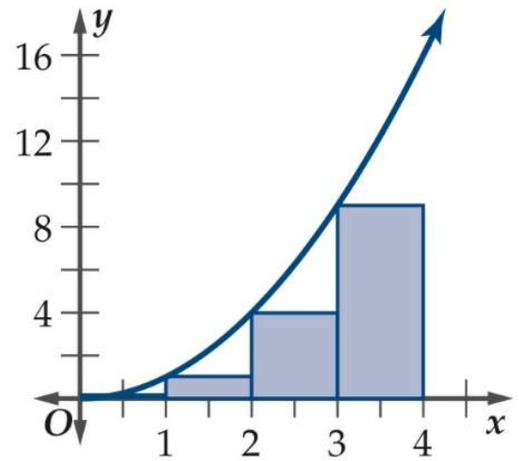


الشكل (1)

المساحة باستعمال الأطراف اليمنى

$$R_1 = 1 \cdot f(1) = 1$$
$$R_2 = 1 \cdot f(2) = 4$$
$$R_3 = 1 \cdot f(3) = 9$$
$$R_4 = 1 \cdot f(4) = 16$$

المساحة الكلية 30 وحدة مربعة



الشكل (2)

المساحة باستعمال الأطراف اليسرى

$$R_1 = 1 \cdot f(0) = 0$$
$$R_2 = 1 \cdot f(1) = 1$$
$$R_3 = 1 \cdot f(2) = 4$$
$$R_4 = 1 \cdot f(3) = 9$$

المساحة الكلية 14 وحدة مربعة

أي أن المساحة الناتجة عن استعمال الأطراف اليمنى هي 30 وحدة مربعة، بينما المساحة الناتجة عن استعمال الأطراف اليسرى هي 14 وحدة مربعة، وهذان تقديران تقع المساحة بينهما، وبحساب الوسط للقيمتين نحصل على تقريب أفضل للمساحة، وهو 22 وحدة مربعة.







2) قرِّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = \frac{12}{x}$ والمحور x في الفترة $[1, 5]$ باستعمال مستطيلات عرض كل واحد منها وحدة واحدة . استعمل الأطراف اليمنى ثم اليسرى لقواعد المستطيلات لتحديد ارتفاعاتها، ثم احسب الوسط للتقريبين.



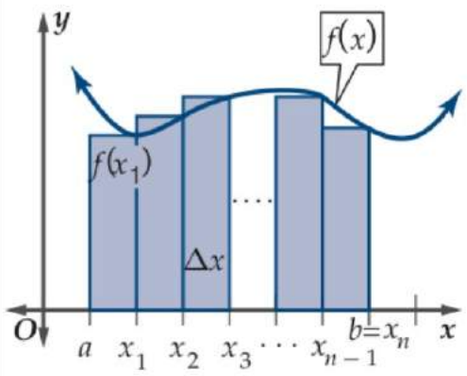


موضوع الدرس: المساحة تحت المنحنى والتكامل



عند تقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى دالة والمحور x، فإنه يمكننا استعمال أي نقطة على قاعدة المستطيل لتحديد ارتفاعه، إلا أن النقاط الأكثر شيوعًا هي نقطتا الطرفين الأيمن والأيسر، ونقطة المنتصف.

التكامل لاحظت في مثال 1 أنه كلما قل عرض المستطيلات، فإن مساحتها الكلية تقترب من المساحة الفعلية تحت المنحنى، ومن ذلك نستنتج أن المساحة المطلوبة هي نهاية مجموع مساحات المستطيلات عندما يقترب عرض كل مستطيل من الصفر.



في الشكل المجاور، قُسِّمت الفترة من a إلى b إلى n من الفترات الجزئية المتساوية الطول، وتُسمَّى هذه التجزئة **التجزيء المنتظم**. إن طول الفترة الكلية من a إلى b هو $b-a$، وبذلك يكون طول كل فترة جزئية (عرض كل مستطيل من المستطيلات التي عددها n) هو $\frac{b-a}{n}$، ويُرمز له بالرمز Δx. وبما أن ارتفاع كل مستطيل يساوي قيمة الدالة عند الطرف الأيمن لقاعدة المستطيل، فإن ارتفاع المستطيل الأول هو $f(x_1)$، وارتفاع المستطيل الثاني هو $f(x_2)$، وهكذا يكون ارتفاع المستطيل الأخير $f(x_n)$.

يمكن الآن حساب مساحة كل مستطيل من خلال ضرب Δx في ارتفاع ذلك المستطيل، أي أن مساحة المستطيل الأول هي $f(x_1)\,\Delta x$، ومساحة المستطيل الثاني هي $f(x_2)\,\Delta x$، وهكذا. وتُعطى المساحة الكلية A للمستطيلات بمجموع مساحاتها، ويمكن كتابتها باستعمال رمز المجموع.

اجمع المساحات
$$A = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$

أخرج العامل المشترك Δx
$$A = \Delta x[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)]$$

استعمل رمز المجموع
$$A = \Delta x \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

خواص رمز المجموع
$$A = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

قراءة الرياضيات

رمز المجموع

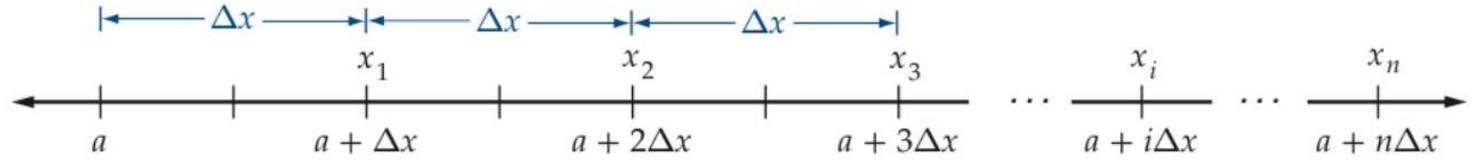
تُقرأ العبارة $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$ كالآتي مجموع حواصل ضرب $f(x_i)$ في Δx من $i=1$ إلى $i=n$.







ولتسهيل الحسابات مستقبلًا، فإنه يمكننا اشتقاق صيغة لإيجاد أي x_i. فبما أن عرض أيٍّ من المستطيلات هو Δx ، ويساوي الفرق بين أي قيمتين متتاليتين من قيم x_i . وبالنظر إلى خط الأعداد أدناه:



يمكننا ملاحظة أن $x_i = a + i\Delta x$. ولهذه العلاقة أهميتها عند إيجاد المساحة تحت منحنى أي دالة لاحقًا.

لاحظ أنه كلما اقترب عرض المستطيل من الصفر، فإن عدد المستطيلات يقترب من المالانهاية، وتُسمَّى هذه النهاية **التكامل المحدد**، ويعبَّر عنها برمزٍ خاص.

قراءة الرياضيات

رمز التكامل المحدد

$\int_a^b f(x)dx$ يقرأ الرمز

التكامل من a إلى b للدالة $f(x)$ بالنسبة لـ x

مفهوم أساسي **التكامل المحدد**

يُعبر عن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى دالة والمحور x في الفترة $[a, b]$ بالصيغة

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x\,,\ \Delta x = \frac{b-a}{n},\ x_i = a + i\Delta x$$

حيث a **الحد الأدنى**، و b **الحد الأعلى**، وتُسمَّى هذه الطريقة **مجموع ريمان الأيمن**.







تنبيه!

المجموع

إن مجموع عدد ثابت c

$\sum_{i=1}^{n} 5 = 5n$ هو cn، فمثلاً

سُمي مجموع ريمان بهذا الاسم نسبةً للعالم الألماني بيرنارد ريمان (1866 – 1826). والذي يُعزى إليهِ إيجاد صيغة لتقريب المساحة المحصورة باستعمال النهايات. ويمكننا تعديل الصيغة باستعمال الأطراف اليُسرى أو نقاط المنتصف لتحديد ارتفاعات المستطيلات.

وتسمى عملية حساب التكامل **تكاملًا**، وستُسهِّل صيغ المجاميع الآتية حساب التكامل المحدد.

$\sum_{i=1}^{n} c = cn$, c عدد ثابت

$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30}$

$\sum_{i=1}^{n} i^5 = \frac{2n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2}{12}$

تُستعمل خاصيتا المجموع الآتيتان لحساب بعض التكاملات:

$\sum_{i=1}^{n} ci = c\sum_{i=1}^{n} i$, c عدد ثابت , $\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$

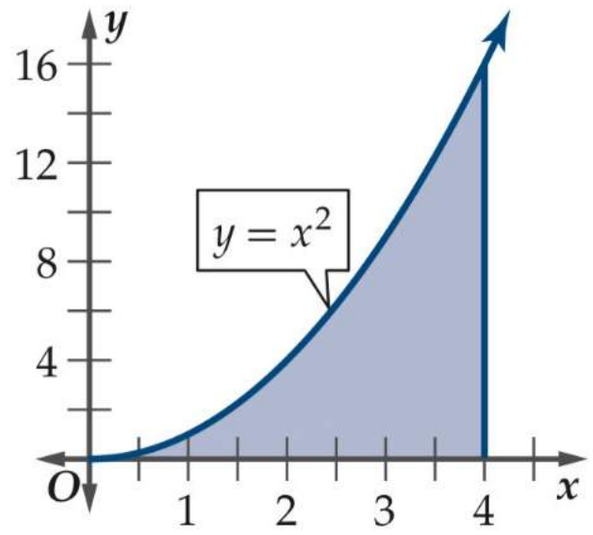




مثال ٣

المساحة تحت منحنى باستعمال التكامل

استعمل النهايات؛ لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y = x^2$ والمحور x في الفترة $[0, 4]$ ؛ أي $\int_0^4 x^2\,dx$.



ابدأ بإيجاد Δx ، x_i .

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$ صيغة Δx

$= \frac{4-0}{n} = \frac{4}{n}$ $b = 4\,,\ a = 0$

$x_i = a + i\,\Delta x$ صيغة x_i

$= 0 + i\frac{4}{n} = \frac{4i}{n}$ $a = 0\,,\ \Delta x = \frac{4}{n}$

احسب التكامل المحدد الذي يُعطي المساحة المطلوبة.





مثال ٣

المساحة تحت منحنى باستعمال التكامل

تعريف التكامل المحدد
$$\int_0^4 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$f(x_i) = x_i^{\,2}$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2\,\Delta x$$

$x_i = \frac{4i}{n}\,,\ \Delta x = \frac{4}{n}$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{4i}{n}\right)^2\left(\frac{4}{n}\right)$$

خصائص المجموع
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{4i}{n}\right)^2$$

وزّع القوة
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{16i^2}{n^2}$$

خصائص المجموع
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\left(\frac{16}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2\right)$$

$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\left(\frac{16}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

اضرب ووزّع
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\left(\frac{16n\,(2n^2+3n+1)}{6n^2}\right)$$

اضرب
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{64n(2n^2+3n+1)}{6n^3}$$

اقسم
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{64(2n^2+3n+1)}{6n^2}$$

حلّل
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{64}{6}\left(\frac{2n^2+3n+1}{n^2}\right)$$

اقسم على n^2
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{64}{6}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$$

خصائص النهايات
$$= \left(\lim_{n\to\infty}\frac{64}{6}\right)\left[\lim_{n\to\infty}2+\left(\lim_{n\to\infty}3\right)\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\right]$$

$$= \frac{64}{6}\,[2+3(0)+0] = \frac{64}{3} \approx 21.33$$

أي أن مساحة المنطقة المطلوبة هي 21.33 وحدة مربعة تقريبًا.







استعمل النهايات؛ لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x والمعطاة بالتكامل المحدد في كلٍّ مما يأتي:

(3A $\int_0^1 3x^2\,dx$

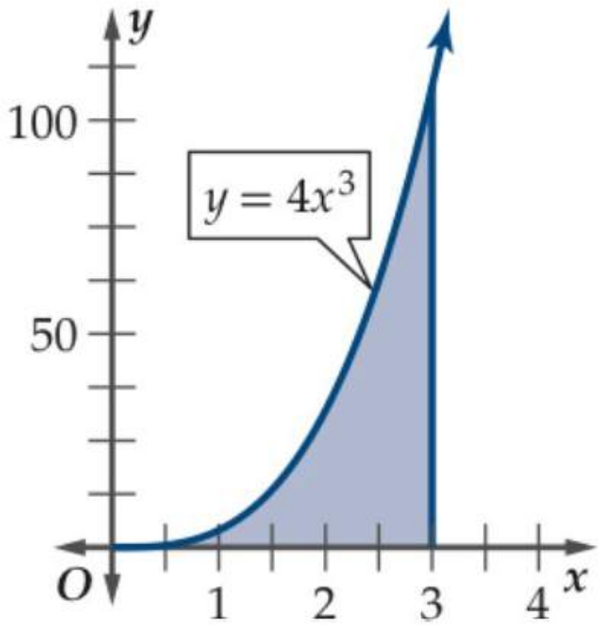
(3B $\int_0^3 x\,dx$





مثال ٤

المساحة تحت منحنى باستعمال التكامل



استعمل النهايات؛ لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y = 4x^3$ والمحور x، في الفترة $[1, 3]$ ؛ أي $\int_1^3 4x^3\,dx$.

ابدأ بإيجاد Δx ، x_i .

صيغة Δx $\quad \Delta x = \frac{b-a}{n}$

$b = 3 , a = 1$ $\quad = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$

صيغة x_i $\quad x_i = a + i\,\Delta x$

$a = 1 , \Delta x = \frac{2}{n}$ $\quad = 1 + i\,\frac{2}{n} = 1 + \frac{2i}{n}$

احسب التكامل المحدد والذي يُعطي المساحة المطلوبة.





مثال ٤

المساحة تحت منحنى باستعمال التكامل

$$\int_1^3 4x^3\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \qquad \text{تعريف التكامل المحدد}$$

$$f(x_i)=4(x_i)^3 \quad = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 4(x_i)^3\Delta x$$

$$x_i = 1+\frac{2i}{n},\ \Delta x=\frac{2}{n} \quad = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 4\left(1+\frac{2i}{n}\right)^3\left(\frac{2}{n}\right)$$

خصائص المجموع $$= \lim_{n\to\infty}\frac{8}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{2i}{n}\right)^3$$

مفكوك $\left(1+\frac{2i}{n}\right)^3$ $$= \lim_{n\to\infty}\frac{8}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[1+3\left(\frac{2i}{n}\right)+3\left(\frac{2i}{n}\right)^2+\left(\frac{2i}{n}\right)^3\right]$$

بسّط $$= \lim_{n\to\infty}\frac{8}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{6i}{n}+\frac{12i^2}{n^2}+\frac{8i^3}{n^3}\right)$$

خصائص المجموع $$= \lim_{n\to\infty}\frac{8}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}1+\sum_{i=1}^{n}\frac{6i}{n}+\sum_{i=1}^{n}\frac{12i^2}{n^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{8i^3}{n^3}\right)$$

خصائص المجموع $$= \lim_{n\to\infty}\frac{8}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}1+\frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n}i+\frac{12}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i^2+\frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^3\right)$$

صيغ المجموع $$= \lim_{n\to\infty}\frac{8}{n}\left(n+\frac{6}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\frac{12}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{8}{n^3}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right)$$

وزّع واضرب $$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8n}{n}+\frac{48n(n+1)}{2n^2}+\frac{96n(2n^2+3n+1)}{6n^3}+\frac{64n^2(n^2+2n+1)}{4n^4}\right)$$

بسّط $$= \lim_{n\to\infty}\left(8+\frac{24(n+1)}{n}+\frac{16(2n^2+3n+1)}{n^2}+\frac{16(n^2+2n+1)}{n^2}\right)$$

اقسم $$= \lim_{n\to\infty}\left[8+24\left(1+\frac{1}{n}\right)+16\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)+16\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

خصائص النهايات $$= \lim_{n\to\infty}8+24\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)+16\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)+16\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$$

بسّط $$= 8+24(1+0)+16(2+0+0)+16(1+0+0)=80$$

أي أن مساحة المنطقة المطلوبة هي 80 وحدة مربعة.

تنبيه!

النهايات

عند تقريب مساحة المنطقة تحت المنحنى باستعمال المجاميع، أوجد مجاميع قيم i قبل توزيع Δx أو أي ثوابت أخرى.





تحقق من فهمك

استعمل النهايات؛ لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x والمعطاة بالتكامل المحدد في كلٍّ مما يأتي:

(4A $\int_1^3 x^2\,dx$

(4B $\int_2^4 x^3\,dx$

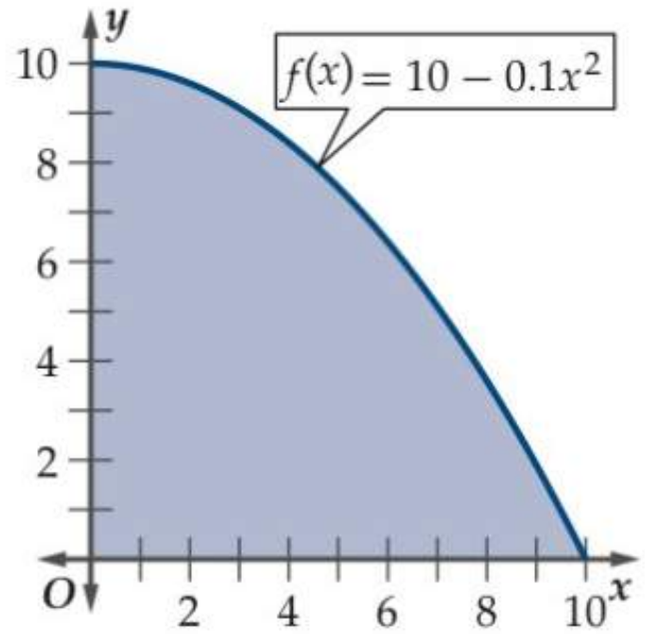




مثال ٥ من واقع الحياة

المساحة تحت منحنى

بلاط: يكلِّف تبليط القدم المربعة الواحدة من فناء منزل بالجرانيت 22.4 ريالًا. إذا تم تبليط ممرين متطابقين في فناء المنزل بالجرانيت، وكانت المساحة بالقدم المربعة لأيٍّ من الممرين تُعطى بالتكامل $\int_0^{10} (10 - 0.1x^2)\,dx$ ، فما تكلفة تبليط الممرين؟



ابدأ بإيجاد Δx ، x_i .

صيغة Δx $\quad \Delta x = \dfrac{b-a}{n}$

$a = 0\,,\ b = 10$ $\quad = \dfrac{10-0}{n} = \dfrac{10}{n}$

صيغة x_i $\quad x_i = a + i\,\Delta x$

$a = 0\,,\ \Delta x = \dfrac{10}{n}$ $\quad = 0 + i\dfrac{10}{n} = \dfrac{10i}{n}$





مثال ٥ من واقع الحياة

المساحة تحت منحنى

احسب التكامل المحدد والذي يُعطي المساحة المطلوبة.

تعريف التكامل المحدد
$$\int_0^{10}(10-0.1x^2)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$f(x_i) = 10 - 0.1x_i^2$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(10-0.1x_i^2)\Delta x$$

$x_i = \frac{10i}{n}$, $\Delta x = \frac{10}{n}$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[10-0.1\left(\frac{10i}{n}\right)^2\right]\cdot\frac{10}{n}$$

استعمل خصائص المجموع وبسّط
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{10}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(10-\frac{10i^2}{n^2}\right)$$

خصائص المجموع
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{10}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}10-\sum_{i=1}^{n}\frac{10i^2}{n^2}\right)$$

خصائص المجموع
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{10}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}10-\frac{10}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i^2\right)$$

صيغ المجموع
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{10}{n}\left(10n-\frac{10}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

خاصية التوزيع
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{100n}{n}-\frac{100n(2n^2+3n+1)}{6n^3}\right)$$

اقسم على n
$$= \lim_{n\to\infty}\left(100-\frac{50(2n^2+3n+1)}{3n^2}\right)$$

اقسم على n^2
$$= \lim_{n\to\infty}\left[100-\frac{50}{3}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

خصائص النهايات
$$= \lim_{n\to\infty}100-\frac{50}{3}\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$$

بسّط
$$= 100-\frac{50}{3}(2+0+0) = 66\frac{2}{3}\approx 66.67$$

أي أن مساحة أيٍّ من الممرين تساوي $66.67\ \text{ft}^2$ تقريبًا؛ لذا فإن تكلفة تبليط الممرين هي $(66.67\times 2)\times 22.4$ ريال أو 2986.8 ريالًا تقريبًا.



الربط مع الحياة

الجرانيت

الجرانيت هو صخر ناري يتميز بنسيج خشن يكسبه مظهرًا فريدًا، وهو مقاوم لعوامل الأكسدة، لذلك يستعمل في تبليط الأرضيات.





تحقق من فهمك

5) طلاء: لدى عبد الله كمية من الطلاء تكفي لطلاء $30\ \text{ft}^2$ ، هل تكفي هذه الكمية لطلاء جزأين من جدار مساحة كل منهما بالقدم المربعة تُعطَى بالتكامل $\int_0^5 (5 - 0.2x^2)dx$ ؟ برِّر إجابتك.





مسائل مهارات التفكير العليا

33) اكتب: اكتب ملخصًا للخطوات المتبعة لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى دالة والمحور x على فترة معطاة.





مسائل مهارات التفكير العليا

34) تحدٍّ: أوجد $\int_0^t (x^2 + 2)\, dx$.





حُلمك ليس له تاريخ انتهاء ، خُذ نفساً عميقاً

وحاول مرة أخرى ..



النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

فيما سبق

درستُ استعمال النهايات لتقريب المساحة تحت منحنى دالة. (الدرس 5–4)

والآن

- أجدُ دوال أصلية.
- أستعْمل النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل لأجد التكامل المحدد.

المفردات

الدالة الأصلية
antiderivative

التكامل غير المحدد
indefinite integral

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل
Fundamental Theorem of Calculus

لمـــازا



سقط قلم من جيب علي في أثناء ركوبه منطادًا ، فهوى نحو الأرض. إذا كانت سرعة سقوط القلم المتجهة بالقدم لكل ثانية تُعطى بـ $v(t) = -32t$ ، فمن الممكن إيجاد الارتفاع الذي سقط منه القلم.

الدوال الأصلية والتكامل غير المحدد تعلمت في الدرسين 3-4 و4-4، أنَّه إذا أُعطيْتَ موقع جسم بـ $f(x) = x^2 + 2x$ ، فإن العبارة التي تمثِّل سرعة الجسم هي مشتقة $f(x)$ أو $f'(x) = 2x + 2$، لكن إذا أُعطيت عبارة تمثِّل السرعة، وطُلِب إليك إيجاد صيغة المسافة التي تم إيجاد السرعة منها، فلا بد من وجود طريقة للعمل عكسيًّا والعودة إلى الدالة الأصلية وإلغاء الاشتقاق.

وبمعنى آخر، فإننا نبحث عن $F(x)$ ، بحيث إن $F'(x) = f(x)$. وتُسمَّى $F(x)$ **دالة أصلية** للدالة f .

مثال ١ : إيجاد الدوال الأصلية.

أوجد دالة أصلية لكل دالة مما يأتي:

(a $f(x) = 3x^2$

لنبحث عن دالة مشتقتها $3x^2$. تذكر أن قوة x في مشتقة دالة القوة أقل بواحد من قوة x في الدالة. وعليه فإن قوة المتغير x في $F(x)$ ستكون 3 ، وبما أن معامل x في مشتقة الدالة يساوي قوة x في الدالة، فإن $F(x) = x^3$ تحقق المطلوب. حيث إن مشتقة x^3 هي $3x^{3-1}$ أو $3x^2$.

إن x^3 ليست الدالة الوحيدة التي تحققُ المطلوب، فمثلًا $G(x) = x^3 + 10$ تحقق المطلوب أيضًا؛ لأن $G'(x) = 3x^{3-1} + 0 = 3x^2$ ، وكذلك $H(x) = x^3 - 37$ تحقق المطلوب.

(b $f(x) = -\frac{8}{x^9}$

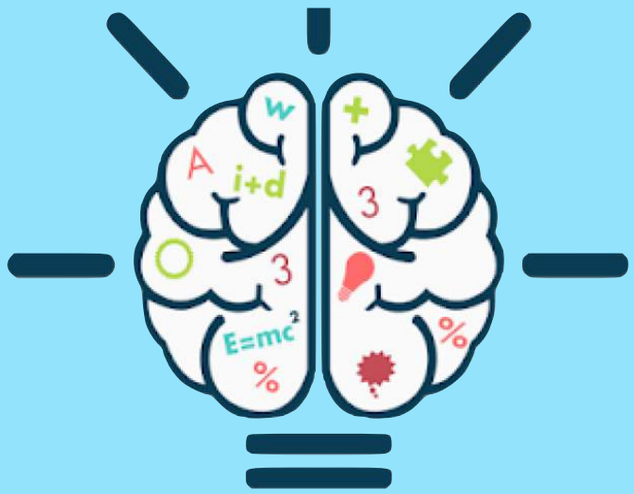
أعد كتابة $f(x)$ بقوى سالبة لتحصل على $f(x) = -8x^{-9}$ ، وبما أن قوة x في مشتقة الدالة أقل بواحد من قوة x في الدالة، فإن قوة x في $F(x)$ ستكون -8 ، وعليه تكون $F(x) = x^{-8}$ دالة أصلية للدالة f ، فمشتقة x^{-8} هي $-8x^{-8-1} = -8x^{-9}$. لاحظ أن كلًّا من $G(x) = x^{-8} + 3$ ، $H(x) = x^{-8} - 12$ تمثِّل دالة أصلية للدالة f.

تحقق من فهمك :

أوجد دالَّتين أصليتين مختلفتين لكل دالة مما يأتي:

(1A $2x$

(1B $-3x^{-4}$



كما في المشتقات، فإن هناك قواعد لإيجاد الدالة الأصلية.

مفهوم أساسي

قواعد الدالة الأصلية

قاعدة القوة

إذا كان $f(x) = x^n$، حيث n عدد نسبي لا يساوي -1، فإن: $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$.

قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت

إذا كان $f(x) = kx^n$، حيث n عدد نسبي لا يساوي -1، k عددًا ثابتًا، فإن:

$F(x) = \frac{k\,x^{n+1}}{n+1} + C$.

قاعدة المجموع والفرق

إذا كان لـ $f(x)$، $g(x)$ دالتان أصليتان هما $F(x)$، $G(x)$ على الترتيب،

فإن: $F(x) \pm G(x)$ دالة أصلية لـ $f(x) \pm g(x)$.

مثال ٢ : قواعد الدوال الأصلية.

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

(a $f(x) = 4x^7$

الدالة المعطاة $f(x) = 4\,x^7$

قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت $F(x) = \frac{4\,x^{7+1}}{7+1} + C$

بسّط $= \frac{1}{2}\,x^8 + C$

(b $f(x) = \frac{2}{x^4}$

الدالة المعطاة $f(x) = \frac{2}{x^4}$

أعد كتابة الدالة بقوة سالبة $= 2\,x^{-4}$

قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت $F(x) = \frac{2\,x^{-4+1}}{-4+1} + C$

بسّط $= -\frac{2}{3}\,x^{-3} + C = -\frac{2}{3x^3} + C$

(c $f(x) = x^2 - 8x + 5$

الدالة المعطاة $f(x) = x^2 - 8x + 5$

أعد كتابة الدالة بدلالة قوى x $= x^2 - 8x^1 + 5x^0$

قواعد الدالة الأصلية $F(x) = \frac{x^{2+1}}{2+1} - \frac{8x^{1+1}}{1+1} + \frac{5x^{0+1}}{0+1} + C$

بسّط $= \frac{1}{3}\,x^3 - 4x^2 + 5x + C$

ربط المفردات

التكامل غير المحدد

سبب تسمية التكامل غير المحدد بهذا الاسم أنه لا يُعبر عن دالة محددة، بل عن عدد لا نهائي من الدوال الأصلية.

إرشادات للدراسة

الدوال الأصلية

$F(x) = k\,x$ هي دالة أصلية لـ $f(x) = k$ ، فمثلًا ، إذا كان $f(x) = 3$ ، فإن $F(x) = 3x$.

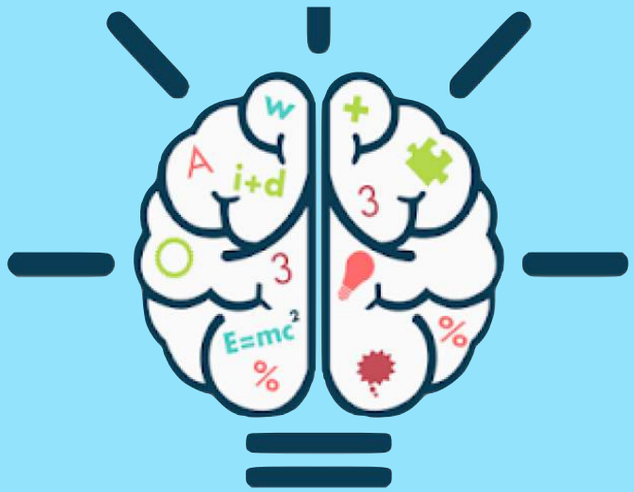
تحقق من فهمك :

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

2A $f(x) = 6x^4$

2B $f(x) = \frac{10}{x^3}$

2C $f(x) = 8x^7 + 6x + 2$



يُعطى الشكل العام للدَّالة الأصلية باسم ورمز خاصَّين.

مفهوم أساسي **التكامل غير المحدد**

يُعطى **التكامل غير المحدد** للدالة f بالصيغة $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ ، حيث $F(x)$ دالة أصلية لـ $f(x)$، و C ثابت.

مثال ٣ :التكامل الغير محدد.

فيزياء: أجرى طلاب الصف الثالث الثانوي في إحدى المدارس الثانوية تجربة فيزيائية تتضمن إسقاط كرة من نافذة الفصل التي ترتفع عن سطح الأرض بـ 30 ft، وتمثِّل $v(t) = -32t$ سرعةَ الكرة المتجهة اللحظية بالأقدام بعد t ثانية من سقوطها.

a) أوجد دالَّة موقع الكرة $s(t)$ بعد t ثانية من سقوطها .

لإيجاد دالة الموقع، أوجد الدالة الأصلية لـ $v(t)$.

$s(t) = \int v(t)\, dt$	العلاقة بين الموقع والسرعة المتجهة
$= \int -32t\, dt$	$v(t) = -32t$
$= -\frac{32t^{1+1}}{1+1} + C$	قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت
$= -16t^2 + C$	بسّط

أوجد C بتعويض 30 ft للارتفاع الابتدائي ، 0 s للزمن الابتدائي.

$s(t) = -16t^2 + C$	الدالة الأصلية لـ $v(t)$
$30 = -16(0)^2 + C$	$s(t) = 30\ ,\ t = 0$
$30 = C$	بسّط

أي أن دالة موقع الكرة هي $s(t) = -16t^2 + 30$.

مثال ٣ :التكامل الغير محدد.

b) أوجد الزمن الذي تستغرقه الكرة حتى تصل إلى سطح الأرض.

حُلّ المعادلة $s(t) = 0$.

$s(t) = -16t^2 + 30$	دالة موقع الكرة
$0 = -16t^2 + 30$	$s(t) = 0$
$-30 = -16t^2$	اطرح 30 من كلا الطرفين
$1.875 \approx t^2$	اقسم كلا الطرفين على -16
$1.369 \approx t$	خُذ الجذر التربيعي الموجب لكلا الطرفين

أي أن الكرة ستستغرق 1.369 s تقريبًا حتى تصل إلى سطح الأرض.

تحقق من فهمك :

3) سقوط حُر: عند قيام فنّي بإصلاح نافذة برج على ارتفاع 120 ft سقطت محفظتُه نحو الأرض، وتمثّل $v(t) = -32t$ سرعة المحفظة المتجهة اللحظية بالأقدام بعد t ثانية من سقوطها.

A) أوجد دالة موقع المحفظة $s(t)$ بعد t ثانية من سقوطها.

B) أوجد الزمن الذي تستغرقُهُ المحفظة حتى تصل إلى سطح الأرض.



الربط مع الحياة

السقوط الحر قبل أربعمائة عام تقريبًا، استنتج جاليليو جاليلي أن لجميع الأجسام التي تسقط سقوطًا حرًّا التسارع نفسه ، باهمال تأثير الهواء، وأن هذا التسارع لا يتأثر بأي من مادة الجسم الساقط أو وزنه أو الارتفاع الذي سقط منه.



النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل لاحظ أن الرمز المُستعمل للتكامل غير المحدد يبدو شبيهًا بالرمز الذي استُعمل للتكامل المحدد في الدرس 5-4 ، إذ إن الفرق الوحيد هو عدم ظهور حدَّي التكامل الأعلى والأدنى في رمز التكامل غير المحدد. إن إيجاد الدالة الأصلية لدالة ما: هو طريقة مختصرة لحساب التكامل المحدد للدالة نفسها باستعمال مجموع ريمان. وهذه العلاقة بين التكاملات المحددة والدوال الأصلية ذات أهمية كبيرة، وتُسمى **النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل**.

مفهوم أساسي

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

إذا كانت $F(x)$ دالةً أصلية للدالة المتصلة $f(x)$، فإن

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) .$$

ويمكن التعبير عن الطرف الأيمن من هذه العبارة بالرمز $F(x)\Big|_a^b$.

مثال ٤ :المساحة تحت المنحنى

استعمل النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل لحساب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى كل دالة مما يأتي والمحور x على الفترة المعطاة:

(a $y = 4x^3$ على الفترة $[1, 3]$؛ أي $\int_1^3 4x^3\,dx$.

أولًا: أوجد الدالة الأصلية.

$$\int 4x^3\,dx = \frac{4x^{3+1}}{3+1} + C$$ قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت

$$= x^4 + C$$ بسّط

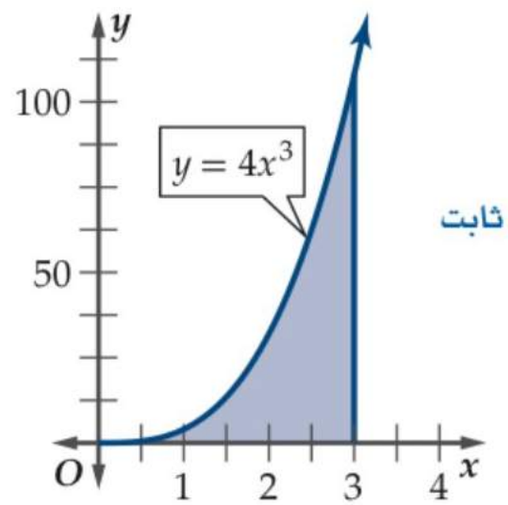
الآن: احسب قيمة الدالة الأصلية عند الحدين الأعلى والأدنى للتكامل ، ثم أوجد الفرق.

$$\int_1^3 4x^3\,dx = x^4 + C\Big|_1^3$$ النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

$$= ((3)^4 + C) - ((1)^4 + C)$$ $a = 1\,,\, b = 3$

$$= 81 - 1 = 80$$ بسّط

أي أن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y = 4\,x^3$ والمحور x على الفترة $[1, 3]$ هي 80 وحدة مربعة.





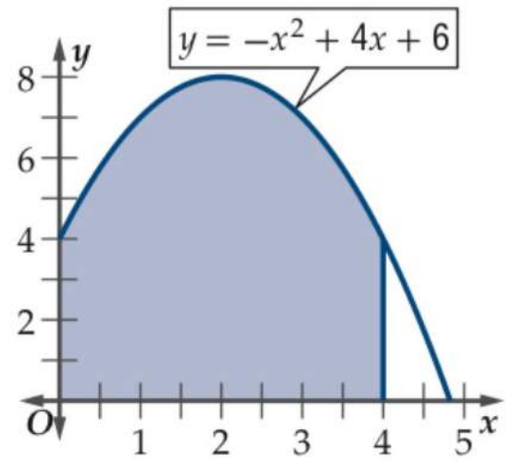
تاريخ الرياضيات

ماريا أجنسن (1718–1799)

عالمة إيطالية برعت في اللغات والفلسفة والرياضيات، ويُعدُّ كتابها *Analytical Institutions* أول كتاب ناقش حسابي التفاضل والتكامل معًا.

مثال ٤ :المساحة تحت المنحنى

(b $\int_0^4 (-x^2 + 4x + 6)\,dx$ على الفترة $y = -x^2 + 4x + 6$ [0, 4]؛ أي



أولًا: أوجد الدالة الأصلية.

$$\int (-x^2 + 4x + 6)\,dx$$

قواعده الدالة الأصلية
$$= -\frac{x^{2+1}}{2+1} + \frac{4x^{1+1}}{1+1} + \frac{6x^{0+1}}{0+1} + C$$

بسّط
$$= -\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 6x + C$$

الآن: احسب قيمة الدالة الأصلية عند الحدين الأعلى والأدنى للتكامل، ثم أوجد الفرق.

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل
$$\int_0^4 (-x^2 + 4x + 6)\,dx = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 6x + C\Big|_0^4$$

$a = 0\,,\ b = 4$
$$= \left(-\frac{(4)^3}{3} + 2(4)^2 + 6(4) + C\right) - \left(-\frac{(0)^3}{3} + 2(0)^2 + 6(0) + C\right)$$

بسّط
$$\approx 34.67 - 0 \approx 34.67$$

أي أن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y = -x^2 + 4x + 6$ والمحور x على الفترة [0 , 4] هي 34.67 وحدة مربعة تقريبًا.

تحقق من فهمك :

احسب كل تكامل محدد مما يأتي:

(4A $\int_2^5 3x^2\,dx$

(4B $\int_1^2 (16x^3 - 6x^2)\,dx$

مثال ٥: التكاملات المحددة والغير محددة

احسب كل تكامل مما يأتي:

(a $\int (9x - x^3)\, dx$

هذا تكامل غير محدد. استعمل قواعد الدالة الأصلية لحسابه.

$$\int (9x - x^3)\, dx = \frac{9x^{1+1}}{1+1} - \frac{x^{3+1}}{3+1} + C \qquad \text{قواعد الدالة الأصلية}$$

$$= \frac{9}{2}x^2 - \frac{x^4}{4} + C \qquad \text{بسّط}$$

(b $\int_2^3 (9x - x^3)\, dx$

هذا تكامل محدد. احسب قيمة التكامل باستعمال قيمة الدالة الأصلية عند الحدين الأعلى والأدنى.

$$\int_2^3 (9x - x^3)\, dx = \left(\frac{9}{2}x^2 - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_2^3 \qquad \text{النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل}$$

$$= \left(\frac{9}{2}(3)^2 - \frac{(3)^4}{4}\right) - \left[\frac{9}{2}(2)^2 - \frac{(2)^4}{4}\right] \qquad a = 2\,,\ b = 3$$

$$= 20.25 - 14 = 6.25 \qquad \text{بسّط}$$

تنبيه!

التكاملات

صحيح أنه يمكن تجاهل الثابت C عند حساب التكامل المحدد، إلا أنه يجب أخذه بعين الاعتبار عند حساب التكامل غير المحدد؛ لأنه جزء من الدالة الأصلية.

تحقق من فهمك :

احسب كل تكامل مما يأتي:

(5A $\int (6x^2 + 8x - 3)\, dx$

(5B $\int_1^3 (-x^4 + 8x^3 - 24x^2 + 30x - 4)\, dx$

مثال ٦: التكاملات المحددة

يُعطى الشغل اللازم لشد نابض ما مسافة $0.5\,\text{m}$ من موضعه الطبيعي بالتكامل $\int_0^{0.5} 360x\,dx$.
ما قيمة الشغل اللازم لشد النابض مقيسًا بوحدة الجول؟

احسب قيمة التكامل المحدد.

$$\int_0^{0.5} 360x\,dx = 180x^2 \Big|_0^{0.5}$$

قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت ، والنظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

$a = 0\,,\, b = 0.5$

$$= 180(0.5)^2 - 180(0)^2$$

بسّط

$$= 45 - 0 = 45$$

أي أن الشغل اللازم هو $45\,\text{J}$.

تحقق من فهمك :

أوجد الشغل اللازم لشد نابض مسافة ما والمعطى بالتكامل في كل مما يأتي:

(6A $\int_0^{0.7} 476x\,dx$

(6B $\int_0^{1.4} 512x\,dx$

مسائل مهارات التفكير العليا

تبرير: حَدِّد ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا. برِّر إجابتك:

32) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_b^a f(x)\,dx$

تدريب على اختبار

45) إذا كان $\int_0^2 k\,x\,dx = 6$ ، فما قيمة k ؟

1 **A**

2 **B**

3 **C**

4 **D**

تم بحمد الله وفضله

أتمنى من كل معلم / معلمة يستفيد من العروض بأن يذكرنا بدعوة في ظهر الغيب

عسى أن يجعلنا ربنا من المقبولين

كما أتمنى من زملائي وزميلاتي أن يلتمسوا لي العذر إن كنت قد أخطأت.

بارك الله لي ولكم وجعل عملنا هذا خالصاً لوجهه الكريم

وصلّ اللهم وسلم على سيدنا محمد وعلى آله وصحبه وسلم.