سلسلة حلول

تحقق من فهمك

رياضيات ٦

نسخة إلكترونية مجانية

المؤلفين

أ. عواطف ساير الشمري

أ. روان تيسير القضاة

المراجعين

أ. عواطف ساير الشمري

أ. روان تيسير القضاة

أ. عبير نازح الحربي

تصميم الكتاب :

أ. غادة الفضلي

ردمك

السادة / روان تيسير أحمد القضاة وعواطف ساير الشمري

نفيدكم علما بأنه قد تم تسجيل عملكم المرسوم بـ:

سلسلة رفعة الرياضيات حلول تحقق من فهمك رياضيات 4

تحت رقم الايداع 1443/4830

تاريخ 16/05/1443 هـ

رقم الردمك 978-603-04-0187-1

مقدمة

الحمدلله و الصلاة والسلام على نبينا محمد و على آله و صحبه أجمعين

أما بعد :

نبذة عن مجموعة رفعة

هي مجموعة تدار من قبل معلمين و معلمات الرياضيات من جميع انحاء المملكة

و هي قائمة على التطوير المهني للمعلمين والمعلمات و ابتكار الأفكار الإبداعية للتعليم العام

و بهدف التيسير و التسهيل لمادة الرياضيات و نشر العلم

نقدم لكم حلول لتحقق من فهمك لكتاب رياضيات

نسأل الله ان يجعله خالصا لوجهه و أن تجدوا فيه الفائدة

الفهرس

1 الفصل الأول
العلاقات والدوال النسبية

2 الفصل الثاني
المتتابعات والمتسلسلات

3 الفصل الثالث
الاحتمالات

4 الفصل الرابع
حساب المثلثات

مجموعة رياضيات
تطوير وانتاج - يوسف

1 الفصل الأول

(1-1) ضرب العبارات النسبيه وقسمتها

(1-2) جمع العبارات النسبيه وطرحها

(1-3) تمثيل دوال المقلوب بيانيا

(1-4) تمثيل الدوال النسبيه بيانيا

(1-5) دوال التغير

(1-6) حل المعادلات والمتباينات النسبيه

١-١ ضرب العبارات النسبية وقسمتها

1A $\dfrac{4y(y-3)(y+4)}{y(y^2-y-6)}$

$$\frac{4y(y-3)(y+4)}{y(y-3)(y+2)} = \frac{4(y+4)}{(y+2)}$$

العبارة تكون غير معرفة عندما $y = 0, y = -2, y = 3$

1B $\dfrac{2z(z+5)(z^2+2z-8)}{(z-1)(z+5)(z-2)}$

$$\frac{2Z(Z+5)(z+4)(z-2)}{(z-1)(z+5)(z-2)} = \frac{2z(z+4}{(z-1)}$$

العبارة تكون غير معرفة عندما $z = 1, z = 2, z = -5$

2 ما قيم x التي تجعل العبارة $\dfrac{x(x^2+8x+12)}{-6(x^2-3x-10)}$ غير معرَّفة؟

A $5, 0$ B $5, -2$ C $0, -2$ D $5, -6$

$$\frac{x(x^2+8x+12)}{-6(x^2-3x-10)} = \frac{x(x+2)(x+6)}{-6(x-5)(x+2)}$$

والاجابة هي (B)

العبارة تكون غير معرفة عندما $x = -2, x = 5$

3A

$$\frac{(xz-4z)}{z^2(4-x)}$$

$$\frac{z(x-4)}{-z^2(x-4)} = \frac{-z(4-x)}{z^2(4-x)} = \frac{1}{-z}$$

3B

$$\frac{8a^3-b^3}{b-2a}$$

$$\frac{(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)}{-(2a-b)} = -(4a^2+2ab+b^2)$$

4B

$$\frac{12c^3d^2}{21ab} \cdot \frac{14a^2b}{8c^2d}$$

$$\frac{2.2.3.c.c.c.d.d.2.7.a.a.b}{3.7.a.b.2..2.2.c.c.d} = acd$$

$$\frac{6xy}{15ab^2} \cdot \frac{21a^3}{18x^4y}$$

4B

$$\frac{2.3.x.y.3.7.a.a.a}{3.5.a.b.b.2.3.3.x.x.x.x.y} = \frac{7a^2}{15b^2x^3}$$

$$\frac{16mt^2}{21a^4b3} \div \frac{24m^3}{7a^2\ b^2}$$

4C

$$\frac{2.2.2.2.m.t.t.7.a.a.b.b}{3.7.a.a.a.a.b.b.b.2.2.2.3.m.m.m} = \frac{2t^2}{9a^2bm^2}$$

$$\frac{12x^4y^2}{40a^4b^4} \div \frac{6x^2y^4}{16a^2x}$$

4D

$$\frac{3x^4y^2}{10a^4b^4} \cdot \frac{8a^2}{3xy^4} = \frac{x^3}{5a^2b^4} \cdot \frac{4}{y^2} = \frac{4x^3}{5a^2b^4y^2}$$

١-١ ضرب العبارات النسبية وقسمتها

5A

$$\frac{8x-20}{x^2+2x-35}\cdot\frac{x^2-7x+10}{4x^2-16}$$

$$\frac{4(2x-5)}{(x+7)(x-5)}\cdot\frac{(x-2)(x-5)}{4(x^2-4)}=\frac{4(2x-5)}{(x+7)}\cdot\frac{(x-2)}{4(x^2-4)}$$

$$=\frac{4(2x-5)}{(x+7)(x-5)}\cdot\frac{(x-2)}{4(x-2)(x+2)}=\frac{2x-5}{(x+2)(x+7)}$$

5B

$$\frac{x^2-9x+20}{x^2+10x+21}\div\frac{x^2-x-12}{6x+42}$$

$$=\frac{x^2-9x+20}{x^2+10x+21}\cdot\frac{6x+42}{x^2-x-12}$$

$$=\frac{(x-4)(x-5)}{(x+7)(x+3)}\cdot\frac{6(x+7)}{(x+3)(x-4)}$$

$$=\frac{6(x-5)}{(x+3)(x+3)}=\frac{6x-30}{(x+3)^2}$$

1-2 جمع العبارات النسبيه وطرحها

أوجد LCM لكل مجموعة من كثيرات الحدود ممايأتي

1A

$$12a^2b, 15abc, 8b^3c^3$$
$$12a^2b = 2^2.3a^2.b$$
$$15abc = 3.5abc$$
$$8b^3c^4 = 2^3.b^3.c^4$$
$$LCM: 2^3.3.5a^2b^3c^4 = 120a^2b^3c^4$$

1B

$$4a^2 - 12a - 16 \quad | \quad a^3 - 9a^2 + 20a$$
$$4(a^2 - 3a - 4) \quad | \quad a(a^2 - 9a + 20)$$
$$4(a+1)(a-4) \quad | \quad a(a-4)(a-5)$$
$$LMC: 4a(a+1)(a-4)(a-5)$$

2A

$$\frac{4}{5a^3b^2} + \frac{9c}{10ab}$$
$$\frac{8 + 9a^2bc}{10a^3b^2}$$

2B

$$\frac{3a^2}{16b^2} - \frac{8x}{5a^3b}$$
$$\frac{15a^5 - 128xb}{80a^3b^2}$$

3A

$$\frac{x-1}{x^2-x-6}-\frac{4}{5x+10}$$

$$=\frac{\frac{x-1}{(x-3)(x+2)}-\frac{4}{5(x+2)}}{\frac{5(x-1)}{5(x-3)(x+2)}\quad\frac{4(x-3)}{5(x-3)(x+2)}}$$

$$=\frac{5x-5-4x+12}{5(x-3)(x+2)}=\frac{(x+7)}{5(x+2)(x+3)}$$

3B

$$\frac{x-8}{4x^2+21x+5}+\frac{6}{12x+3}=\frac{(x-8)}{(4x+1)(x+5)}+\frac{6}{3(4x+1)}$$

$$=\frac{(x-8)}{(4x+1)(x+5)}+\frac{2}{(4x+1)}=\frac{(x-8)+2(x+5)}{(4x+1)(x+5)}$$

$$=\frac{x-8+2x+10}{(4x+1)(x+5)}=\frac{(3x+2)}{(4x+1)(x+5)}$$

1-2 جمع العبارات النسبيه وطرحها

4A

$$\frac{1-\frac{y}{x}}{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}} = \frac{\frac{x-y}{x}}{\frac{x+y}{xy}} = \frac{x-y}{x} \div \frac{x+y}{xy} = \frac{x-y}{x} \cdot \frac{xy}{x+y} = \frac{y(x-y)}{x+y}$$

4B

بسط العبارة

$$\frac{\frac{c}{d}-\frac{d}{c}}{\frac{d}{c}+2}$$

$$\frac{\frac{c^2}{cd}-\frac{d^2}{cd}}{\frac{d}{c}+\frac{2c}{c}} = \frac{\frac{c^2-d^2}{cd}}{\frac{d+2c}{c}} = \frac{c^2-d^2}{cd} \div \frac{d+2c}{c}$$

$$= \frac{c^2-d^2}{cd} \cdot \frac{c}{d+2c} = \frac{c^3-cd^2}{cd^2+2c^2\,d}$$

$$= \frac{c(c^2-d^2)}{cd(d+2c)} = \frac{(c^2-d^2)}{d(d^2+2)}$$

1-2 جمع العبارات النسبيه وطرحها

5A

$$\frac{1+\frac{2}{x}}{\frac{3}{y}-\frac{4}{x}}=\frac{1+\frac{2}{x}}{\frac{3}{y}+\frac{4}{x}}\cdot\frac{xy}{xy}=\frac{xy+2y}{3x-4y}$$

5B

$$\frac{\frac{1}{d}-\frac{d}{c}}{\frac{1}{c}+6}=\frac{\frac{1}{d}-\frac{d}{c}}{\frac{1}{c}+6}\cdot\frac{dc}{dc}=\frac{c-d^2}{d+6cd}$$

5C

$$\frac{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}}{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}}=\frac{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}}{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}}\cdot\frac{xy}{xy}=\frac{x+y}{x-y}$$

5D

$$\frac{\frac{a}{b}+1}{1-\frac{b}{a}}=\frac{\frac{a}{b}+1}{1-\frac{b}{a}}\cdot\frac{ab}{ab}=\frac{a^2+ab}{ab-b^2}$$

1-3 تمثيل دوال المقلوب بيانيا

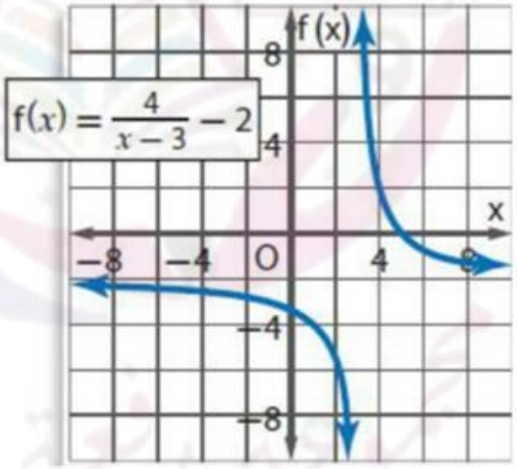
1A

$$f(x) = \frac{2}{x-1}$$
$$x = 1$$

1B

$$f(x) = \frac{7}{3x+2}$$
$$x = \frac{-2}{3}$$

2A



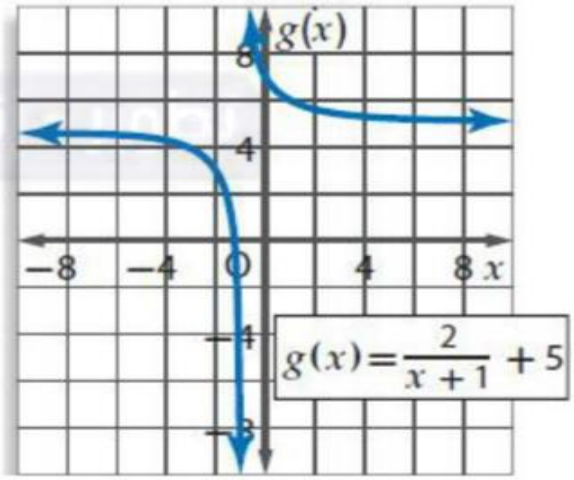
$y = -2$

$X=3$

المجال $\{x/x \neq 3\}$

المدى $\{f(x)f(x) \neq -2\}$

2B



$y = 5$

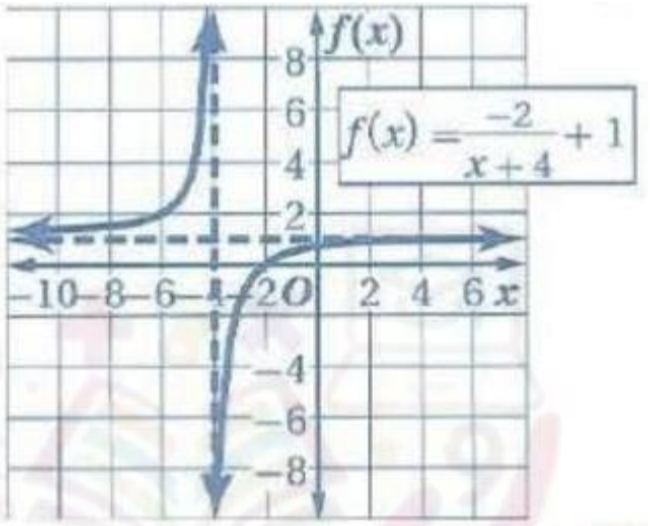
$X=-1$

المجال $\{x/x \neq -1\}$

المدى $\{f(x)f(x) \neq 5\}$

1-3 تمثيل دوال المقلوب بيانيا

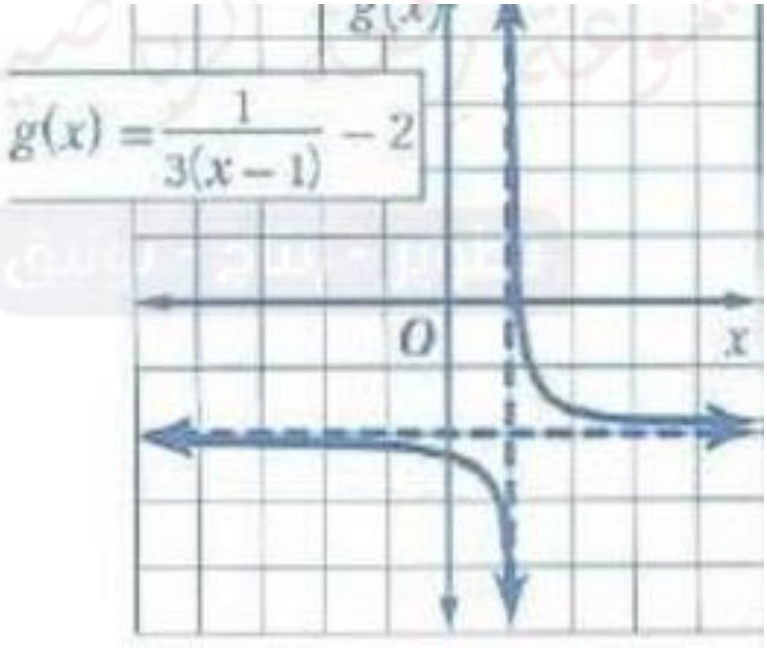
3A



المجال $\{x/x \neq -4\}$

المدى $\{f(x)/f(x) \neq 1\}$

3B



المجال $\{x/x \neq 1\}$

المدى $\{g(x)/g(x) \neq -2\}$

1-3 تمثيل دوال المقلوب بيانيا

1A

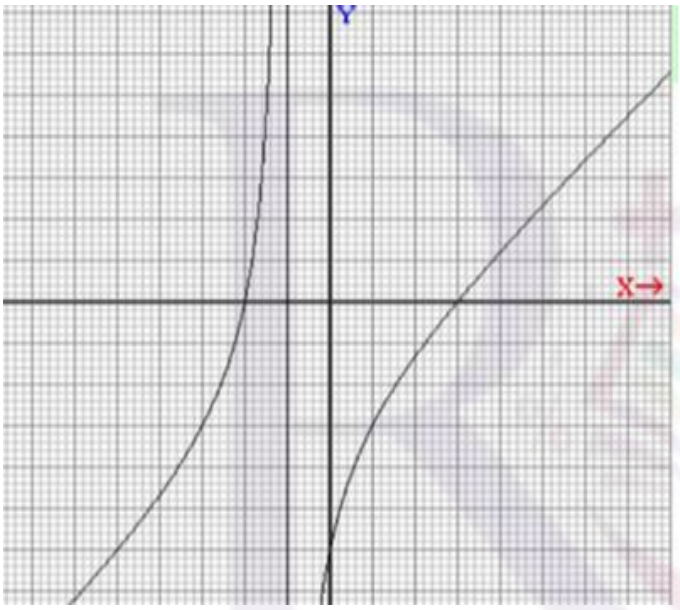
1/ نوجد اصفار الدالة بوضع $x^2 - x - 6 = 0$ أي ان
$(x+2)(x-3)$

إذن يوجد أصفار للدالة عندما $x = -2, x = 3$

2/ نوجد خط التقارب الرأسي بوضع المقام =صفر أي ان
$x + 1 = 0$, $x = -1$

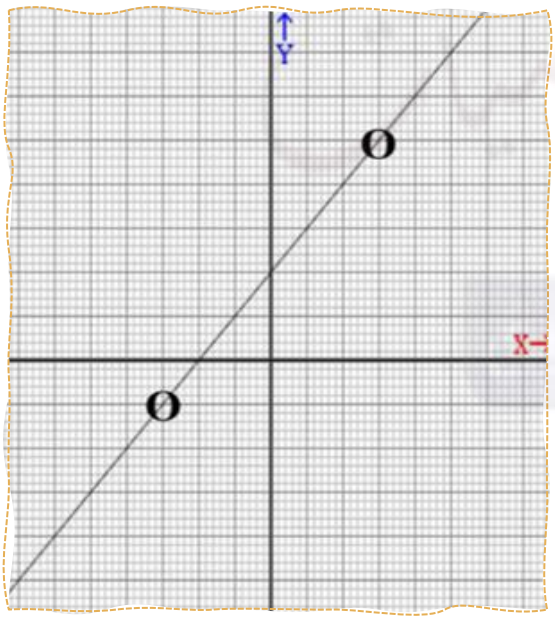
$x = -1$ إذن يوجد خط تقارب راسي

ولايوجد خط تقارب أفقي لان درجة البسط أكبر من درجة المقام

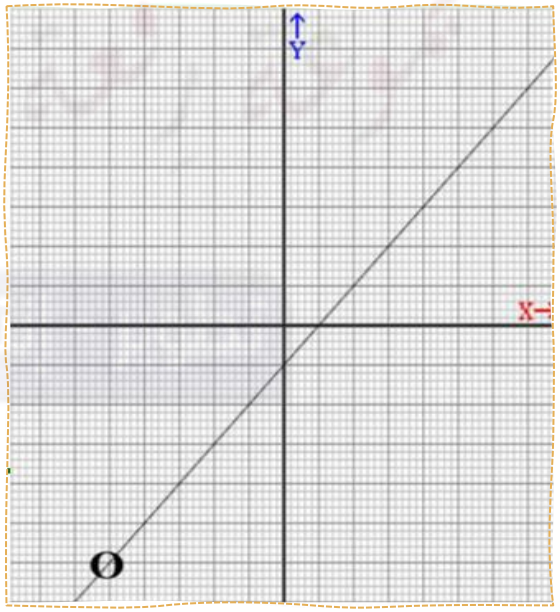


X	Y
1	-3
0	-6
-1	خط تقارب راسي
-2	0
-3	-6

3B



3A



1-5 دوال التغير

1 اذا كانت r تتغير طرديامع t وكانت فأوجد قيمة r=-20 عندما t=-6 فأوجدي قيمة r عندما

$$\frac{r_1}{t_1}=\frac{r_2}{t_2}\rightarrow\frac{-20}{4}=\frac{r_2}{-6}\rightarrow 4r_2=120\rightarrow r_2=30$$

2 اذا كانت r تتغير طرديامع t,v وكانت r= 70 عندما t=4 , v=10 فأوجد قيمة r عندما t=8 , v=2

$$\frac{r_1}{t_1v_1}=\frac{r2}{t_2v_2}\rightarrow\frac{70}{40}=\frac{r}{16}\qquad 40r=70x16\qquad r=28$$

3 إذا كانت X تتغير عكسيا مع y وكانت X=4 عندما y=4 فأوجدي قيمةX عندماy=12

$$\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}\qquad\frac{24}{12}=\frac{x}{4}\qquad\frac{x}{4}=2\rightarrow x=8$$

5 إذا كانت pتتغير طرديا مع r وعكسيا مع t وكانتt=20 عندما p=4 r=2 فأوجدي قيمة t عندما p= -5 , r=10

$$\frac{p_1t_1}{r_1}=\frac{p_2t_2}{r_2}\qquad\frac{4(20)}{2}=\frac{-5r}{10}\qquad\frac{-t}{2}=40\qquad t=-80$$

1-6 حل المعادلات والمتباينات النسبيه

1A

$$\frac{5}{y-2}+2=\frac{17}{6}$$

الضرب في $6(y-2)$

$30+12(y-2)=17(y-2)$

$30+12y-24=17y-34.$

$6+34=17y$

$40=5y \Longrightarrow y=8$

1B

$$\frac{2}{z+1}-\frac{1}{z-1}=\frac{-2}{z^2-1}$$

$$\frac{2(z+1)(z-1)}{z+1}-\frac{1(z+1)(z-1)}{z-1}=\frac{-2(z+1)(z-1)}{z^2-1}$$

$2z-2-z-1=-2$

$z-1=0$

قيمة مستثناه $z=1$

المعادله ليس لها حل

1C

$$\frac{7n}{3(n+1)}-\frac{5}{4(n-1)}=\frac{3n}{2(n+1)}$$

بالضرب في $12(n-1)(n+1)$ <=====

$28n(n-1)-15(n+1)=18n(n-1)$

$28n^2-28n-15n-15=18n^2-18n$

$28n^2-43n-15-18n^2+18n=0$

$10n^2-25n-15=0$

$(2n+1)(n-3)=0 \Longrightarrow n=\frac{-1}{2}, n=3$

1-6 حل المعادلات والمتباينات النسبيه

1D

$$\frac{1}{P-2}=\frac{2P+1}{P^2+2P-8}+\frac{2}{P+4}$$

$$\frac{1}{P-2}=\frac{2P+1}{(P-2)(P+4)}+\frac{2}{P+4}$$

(P-2)(P+4) بالضرب في

P+4=2P+1+2(P-2)

P+4=2P+1+2P-4

P+4=4P-3

3P=7 ====> $P=\frac{7}{3}$

2

	العصير المضاف	العصير الاصلي	العصير الناتج
كمية العصير	0.65(x)	0.1(150)	0.65(x)+0.1(150)
الحجم الكلي للعصير	X	١٥٠	X+150

$$\frac{35}{100}=\frac{0.65x+0.1(150)}{x+150}$$

35(x+150)=100(0.65x+15)

3750=30x

X=125

4

معدل عمل ناصر ومحمد	معدل عمل ناصر	معدل عمل محمد
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{x}$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{10}=\frac{1}{6}$$

30+3x=5x <==== الضرب في 30 x

30=2x ======> x=15

1-6 حل المعادلات والمتباينات النسبيه

5A

الخطوه (1): القيم المستثناة في هذه المتباينه هي صفر

الخطوه (2):حل المعادلة المرتبطة ... $\frac{5}{x}+\frac{6}{5x}=\frac{2}{3}$

الضرب في LCM : 15x $(15x)\frac{5}{x}+(15x)\frac{6}{5x}=(15x)\frac{2}{3}$

X=9.3 ====> 93=10x ====> 75+18=10x

الخطوه (3):ارسم خطا عند القيمة المستثناه ،وحل المعادله وذلك لتقسيم خط الاعداد الى فترات

الخطوه (4): اختبر قيمة كل فترة لتحديد الفترات التي تحتوي فيما تحقق المتباينه

اختبر عند x=-1

$-5-\frac{6}{5}>\frac{2}{3}$

$\frac{-25-6}{5}>\frac{2}{3}$

$\frac{-31}{5}\not>\frac{2}{3}$

الإجابة خاطئة

اختبر عند x=6

$\frac{5}{6}+\frac{1}{5}>\frac{2}{3}$

$\frac{25+6}{30}>\frac{2}{3}$

$\frac{31}{30}>\frac{20}{3}0$

الإجابة صحيحة

اختبر عند x=10

$\frac{1}{2}+\frac{3}{25}>\frac{2}{3}$

$\frac{6+25}{50}>\frac{2}{3}$

$\frac{31}{50}>\frac{2}{3}===>\frac{39}{150}\not>\frac{100}{150}$

الإجابة خاطئة

الحل هو 0< x<9.3

1-6 حل المعادلات والمتباينات النسبيه

4B

$$\frac{4}{3x}+\frac{7}{x}<\frac{5}{9}$$

الخطوه (1): القيم المستثناة فى هذه المتباينة هى الصفر

الخطوه (٢):حل المعادلة المرتبطة $\frac{4}{3x}+\frac{7}{x}=\frac{5}{9}$

$$(9x)\frac{4}{3x}+(9x)\frac{7}{x}=(9x)\frac{5}{9}$$ بالضرب في 9x :LCM

$$12+63=5x \rightarrow 75=5x \rightarrow x=15$$

الخطوة (٣): ارسم خطا عند القيمة المستثناه وحل المعادلة وذلك لتقسيم خط الاعداد الى فترات

الخطوة (٤): اختبر قيمة كل فترة لتحديد الفترات التي تحتوي فيما تحقق المتباينة

اختبر عند x= -1

$$\frac{4}{-3}+\frac{7}{-1}<\frac{5}{9}$$

$$\frac{-25}{3}<\frac{5}{9}$$

الإجابة صحيحة

اختبر عند x=1

$$\frac{4}{3}+\frac{7}{1}<\frac{5}{9}$$

$$\frac{25}{3}\not<\frac{5}{9}$$

الإجابة خاطئة

اختبر عند x=21

$$\frac{4}{3(21)}<\frac{5}{9}$$

$$\frac{25}{63}<\frac{5}{9}$$

الإجابة صحيحة

الحل هو $x<0$, $x>15$

2 الفصل الثاني

(2-1) المتتابعات بوصفها دوال

(2-2) المتتابعات والمتسلسلات الحسابية

(2-3) المتتابعات والمتسلسلات الهندسية

(2-4) المتسلسلات الهندسية غير المنتهية

(2-5) نظرية ذات الحدين

(2-6) البرهان بالاستقراء الرياضي

بين اذا كانت كل متتابعه فيمایاتي حسابية ام لا

1A $7,12,16,20$

$a_2 - a_1 = 12 - 7 = 5$

$a_3 - a_2 = 16 - 12 = 3$

المتتابعه ليس لها أساس ثابت اذن ليست حسابيه

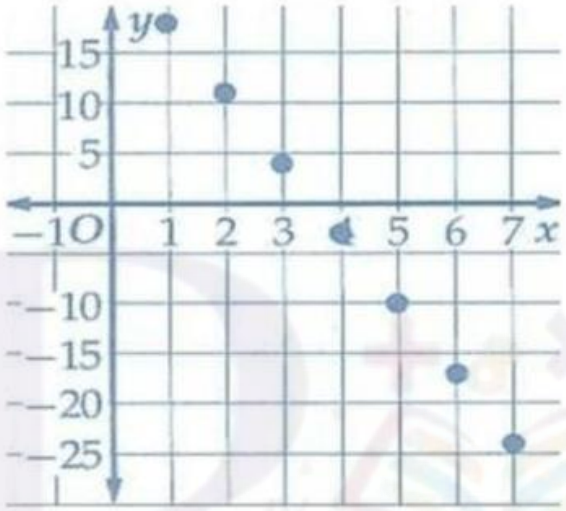
1B $-6,3,12,21, \ldots$

$a_2 - a_1 = 3 - (-6) = 9$

$a_3 - a_2 = 12 - 3 = 9$

المتتابعه لها أساس ثابت (9) اذن المتتابعه حسابيه

2 اوجد الحدود الاربعه التاليه في المتتابعة الحسابية 18,11,4,
ثم مثل الحدود السبعة الأولى بيانيا



1B نقود :
ادخر عامل في يوم ما **20** ريالا من اجره اليومي فاذا علمت انه يدخر في كل يوم **5** ريالات زيادة على اليوم السابق ,فكم ريالا يدخر في اليوم الثاني عشر ؟

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 20 = 5(x - 1)$$
$$y = 5x - 5 + 20$$
$$= 5x + 15$$
$$y = 5(12) + 15$$
$$y = 60 + 15$$
$$y = 75$$

بين اذا كانت كل من المتتابعتين الاتين هندسية ام لا ؟

4A -8,2,-0.5,0.125,.....

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{-8} = \frac{1}{-4}$$

$$r = \frac{a_3}{a_2} = \frac{-0.5}{2} = \frac{1}{-4}$$

اذن المتتابعة هندسية

4B 1,3,7,15.,.....

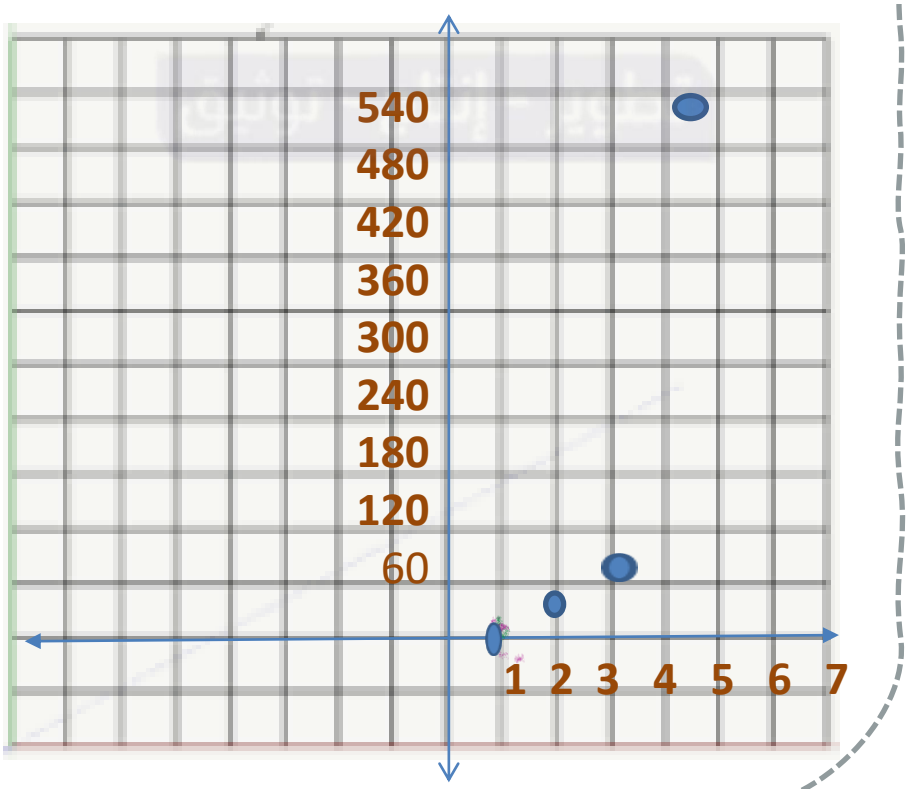
$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{1}$$

$$r = \frac{a_3}{a_2} = \frac{7}{3}$$

اذن المتتابعة غيرهندسية

5 اوجد الحدين التاليين ....,7,21,63ثم مثل الحدود الخمسه الأولى بيانيا في المتتابعه

63 x3 189 x3 567



حدد نوع المتتابعة اذا كانت حسابية ام هندسية ام غير ذلك
ووضح اجابتك

6A $\frac{5}{3}, 2, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, \ldots\ldots\ldots$

حسابية واساس المتتابعة $\frac{1}{3}$

6B $2, \frac{-3}{2}, \frac{9}{8}, \frac{27}{32}, \ldots\ldots\ldots$

هندسية واساس المتتابعة $\frac{3}{4}$

6C $-4, 4, 5, -5 \ldots\ldots\ldots$

غير ذلك لانة لا يوجد فرق عام ولا نسبة ثابتة

اوجدي قيمة الحد المطلوب في كل من المتتابعتين الحسابيتين الاتيتين :

1A

a_n علما بأن $a_1 = -4, d = 6,$ n=9

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$a_9 = a_1 + 8d$

$= -4 + 8(6)$

=44

1B

a_{20} علما بأن $a_1 = 15\ , d = -8$

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$a_{20} = a_1 + 19d$

$= 15 + 19(-8)$

=-137

اكتب صيغة للحد النوني للمتتابعه الحسابيه في كل مماياتي:

2A

12,3,-6,.....

$a_n = -9_n + 21$

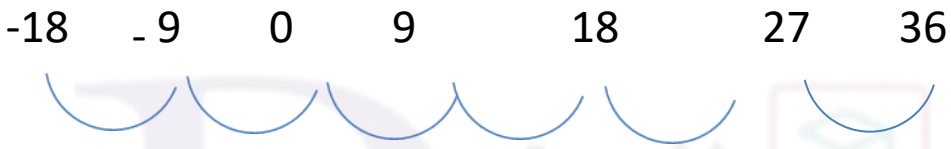
2B

$a_6 = 12, d = 8$

$a_n = -36 + 8_n$

3 اوجد خمسة اوساطا حسابية بين العددين $-18,36$

$$a_7 = d_1 + 6d$$
$$= -18 + 6d$$
$$54 = 6d$$
$$d = 9$$



اذن الأوساط الحسابيه هي $-9,0,9,18,27$

4A اوجد مجموع كل متسلسلة مماياتي

$$2 + 4 + 6 \ldots\ldots + 100$$

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d$$
$$100 = 2 + (n-1)(2)$$
$$100 = 2 + 2n - 2$$
$$100 = 2n$$
$$50 = n$$

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$
$$= \frac{50}{2}\,(2 + 100)$$
$$= 2550$$

4B

$a_n = 240, \quad d = 8, \quad n = 16$

$$a_n = a_1 + (n-1)$$
$$240 = a_1 + 15(8)$$
$$240 = a_1 + 120$$
$$120 = a_1$$

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$
$$s_{16} = 16\left(\frac{120+240}{2}\right)$$
$$= 2880$$

5 اوجد الحدودالثلاثة الأولى في المتتابعه الحسابية الاتية:

$s_n = 120, n = 8, a_n = 36$

الحدود الثلاثه هي

$-6, 0, 6$

$a_1 = -24, a_n = 288, s_n = 5280$

الحدود الثلاثه هي

$-24, -16, -8$

6 اوجد مجموع حدود المتسلسله : $\sum_{n=9}^{21} (5m + 6)$

A 972

B 1053

C 1281

D 1701

1 امطار:في اثناء هطول الامطار ونزلها من اعلى تلة الى احد الوديان ,صنعت الامطار مجرى لها في الوادي طوله 40 *in*,اذا كان هذا المجرى يتسع كل يوم ثلاثة أمثال اليوم السابق له ,فكم سيبلغ اتساع المجرى في اليوم الخامس في حالة استمرار هطول الامطار بهذا المنوال ؟

$$a_n = a_1\, r^{n-1}$$
$$a_5 = 40\,(3)^4$$
$$= 40(81)$$
$$= 3240$$

اكتب صيغة الحد النوني لكل من المتتابعتين الهندسيه الاتيتين

2A $-0.25\ ,\ 2\ ,\ -16,128\ ,\ \ldots\ \ldots$

$$a_n = -0.25(-8)^{n-1}$$

2B $a_3 = 16\ ,\quad r = 4$

$$a_n = 1(4)^{n-1}$$

3 اوجد أربعة أوساط .اكتب المعادلة هناهندسية بين العددين 0.5 ,512

$4 + 2 = 6$ لذلك يكون $n = 6$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$
$$512 = 0.5r^{n-1}$$
$$4 = r$$

0.5 — 2 — 8 — 32 — 128 — 512

x4 x4 x4 x4 x4

4

بكتيريا :ينمو احد أنواع البكتيريا في وسط غذائي , بحيث ينقسم الى جزاين ثم أربعة ثم الى ثمانية وهكذا اذا بدا مجتمع هذا البكتيريا بعدد 10 فمامجموع البكتيريا بعد 8 انقسامات ؟

$$s_n = \frac{a_{1-a_1}\ r^n}{1-r}$$

$$s_{10} = \frac{10(2-2^8)}{1-2} = \frac{10(1-256)}{-1}$$

$$s_{10} = 2550$$

اوجد مجموع حدود كل المتسلسلتين الاتيتين :

5A $\sum_{k=4}^{12} \frac{1}{4} . 3^{k-1}$

$n = 12 - 4 + 1 = 9$

$a_1 = 6.75$

$r = 3$

$$\frac{6.75 - 6.75(3)^9}{1-3} = 66426.75$$

5B $\sum_{k=2}^{9} \frac{2}{3} . 4^{k-1}$

$n = 9 - 2 + 1 = 8$

$a_1 = \frac{8}{3}$, $a_2 = \frac{32}{7}$

$r = 4$

$$\frac{\frac{32}{7} - \frac{8}{3}(4)^8}{1-4} = 58253.33$$

6

اوجد في المتسلسة الهندسيه التي فيها

$s_n = -26240 , n = 8, r = -3$

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1-r}$$

$$-26240 = \frac{a_1(1-(-3)^n)}{1-(-3)}$$

$$-26240 = \frac{a_1(1-(-3)^8)}{4}$$

$$\frac{-104960}{1-3^8} = \frac{a_1(1-(-3)^8)}{1-3^8}$$

$$a_1 = 16$$

حدد أي المتسلسلتين الاتيتين متقاربة , وايهما متباعدة :

1A

$2 + 3 + 4.5 + \ldots\ldots$

$$r = \frac{2}{3} = 0.667$$

بما $0.667 > 1$ فان المتسلسلة متقاربة

1B

ان

$100 + 50 + 25 + \ldots\ldots$

$$r = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

$-1 < \frac{1}{2} < 1$ فان المتسلسلة متقاربة

اوجد مجموع حدود كل المتسلسلتين الهندسيتين الاتيتين ان وجد :

2A

$2 + 3 + 4.5 + \ldots\ldots$

$$r = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$-1 < \frac{1}{2} < 1$ فان للمتسلسلة مجموع

$$\frac{a_1}{1-r} = \frac{4}{1-\frac{1}{2}} = \frac{8}{3}$$

2B

$4 - 2 + 1 - 0.5 + \ldots\ldots$

$$r = \frac{20}{16} = 1.25$$

بما ان $1.25 > 1$

فان المتسلسلة متباعدة وليس لها مجموع

3 اوجد قيمة: $\sum_{k=1}^{\infty} 12\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$

$$s = \frac{a_1}{1-r}$$

$$= \frac{12}{1-\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{12}{\frac{1}{4}} = 48$$

4 اكتب الكسر العشريالدوري $\overline{0,21}$

$$x = \overline{0.21}$$

$$x = 0.212121.....$$

$$100\,x = 21.212121$$

$$99x = 21$$

$$x = \frac{21}{99} = \frac{7}{33}$$

1 بالعوده الى فقرة (لماذا) اذا أراد مدير معمل التحاليل الطيبيه ان يستاجر **8** متخصصين ,فمااحتمالات ان يختار **6** متخصصين من المنطقة الأولى واثنين من المنطقة الثانيه ؟

$$c^9 + 9c^8d + 36c^7d^2 + 84c^6d^3 + 126c^5d^4 + 126c^4d^5 + 84c^3d^6 + 36c^2d^7 + 9cd^8 + d^9$$

2 اوجد مفكوك $(x-y)^{10}$

$$x^{10} - 10x^9y + 45x^8y^2 - 120x^7y^3 + 210x^6y^4 - 252x^5y^5 + 210x^4y^6 - 120x^3y^7 + 45x^2y^8 - 10xy^9 + y^{10}$$

3 اوجد مفكوك $(3x-2y)^5$

$$243x^5 - 810x^4y + 1080x^3y^2 - 720x^2y^3 + 240xy^4 - 32y^5$$

4 اوجد قيمة الحد السادس في مفكوك $(c-d)^{10}$

$$252c^5d^5$$

1 برهن ان $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots .. n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

الخطوة الأولى: عندما $n = 1$ فان الطرف الايسر من المعادله هو

والطرف الأيمن هو $\frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1$

$$1^2 = 1$$

اذن الجملة صحيحه عند $n = 1$

الخطوة الثانية: افرض ان $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

صحيحه حيث n عدد طبيعي

الخطوة الثالثه: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2$

بجمع $(k+1)^2$ الطرفين

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

بالجمع

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{6(k+1)^2}{6}$$

بإخراج العامل المشترك

$$= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6}$$

بالتبسيط

$$= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

بالتحليل

$$= \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}$$

2 برهن أن $7^n - 1$ يقبل القسمة على 6 لكل عدد طبيعي n

الخطوة الأولى: عندما $n = 1$ فان $7^1 - 1 = 6$
وهو عدد يقبل القسمة على 6

الخطوة االثانية: افرض $7^1 - 1$ وهو عدد على يقبل القسمة على 6
حيث n عدد طبيعي وهذا يعني انه يوجد عدد طبيعي بحيث ان $6r - 1$

الخطوة الثالثة: ابرهن صحة الجملة عند $n = k + 1$

$7^k - 1 = 6r$	فرضية الاستقراء
$7^k = 6r + 1$	بإضافة 1 الى الطرفين
$7^{k+1} = 7(6r + 1)$	بضرب كلا الطرفين في 7
$7^{k+1} - 1 = 42r + 6$	بالتبسيط وطرح 1 من كلا الطرفين
$7^{k+1} - 1 = 42r + 6$	بالتحليل

بما أن r عدد طبيعي ، فإن $7r+1$ عدد طبيعي ، وهذا يعني أن $7^{k+1} - 1$
يقبل القسمة علي ٦ أي ان الجملة صحيحة عندما $n = k + 1$
ولذا فإن $7^n - 1$ يقبل القسمة علي ٦ لكل عدد طبيعي n

3 اعط مثالا مضادا يبين خطا الجملة:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots \ldots + n^2 = \frac{n(3n-1)}{2}$$

عند $n = 1$

$$1^2 = \frac{1(3-1)}{2} = 1$$

صحيحة

$1 = 1$

عند $n = 2$

$$1^2 + 2^2 = \frac{2(6-1)}{2}$$

صحيحة

$5 = 5$

عند n=3

$$1^2 + 2^2 + 3^2 = \frac{3(9-1)}{2}$$

خاطئة

$14 \neq 12$

3 الفصل الثالث

(3-1) تمثيل فضاء العينة

(3-2) الاحتمال باستعمال التو افيق والتباديل

(3-3) الاحتمال الهندسي

(3-4) احتمالات الحوداث المستقلة والحوداث المركبة

(3-5) احتمالات الحوداث المتنافية

3-1 تمثيل فضاء العينة

1 أُلقيت قطعة نقد مرة واحدة ، ثم رمي مكعب مرقم مرة واحدة أيضاً . مثّل فضاء العيِّنة لهذه التجربة باستعمال القائمة المنظمة ، والجدول ، والرسم الشجري .

هنالك ناتجان ممكنان لكل رمية لقطعة النقد هما : الشعار (L) والكتابة (T) .

وهناك ستة نواتج ممكنة لكل رمية لمكعب مرقم هي : 1 , 2 ,3 , 4 ,5 ,6

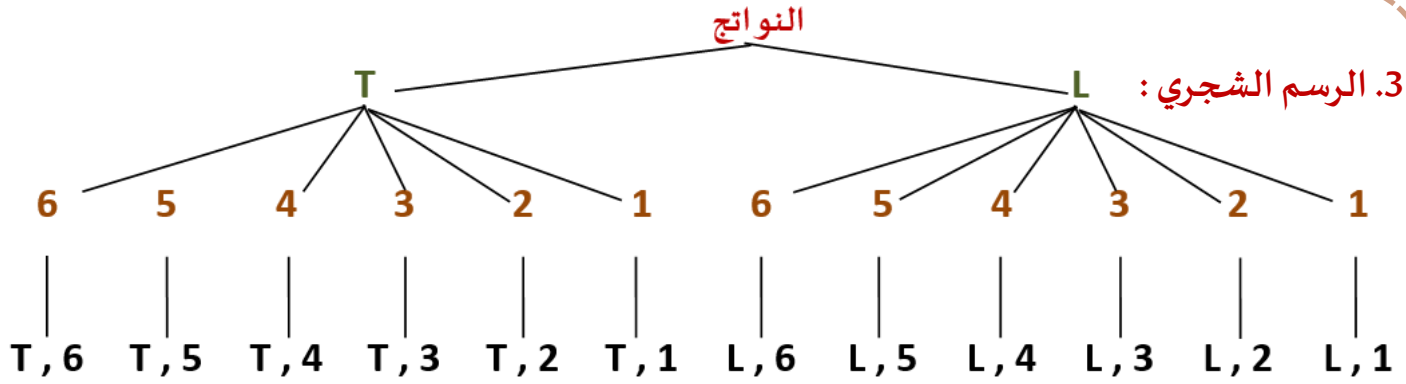
1. القائمة المنظمة :

L , 1
L , 2
L , 3
L , 4
L , 5
L , 6
T , 1
T , 2
T , 3
T , 4
T , 5
T , 6

2. الجدول : دوّنْ نواتج رمي قطعة النقود في العمود الأيمن ، ونواتج رمي المكعب المرقم في الصف العلوي .

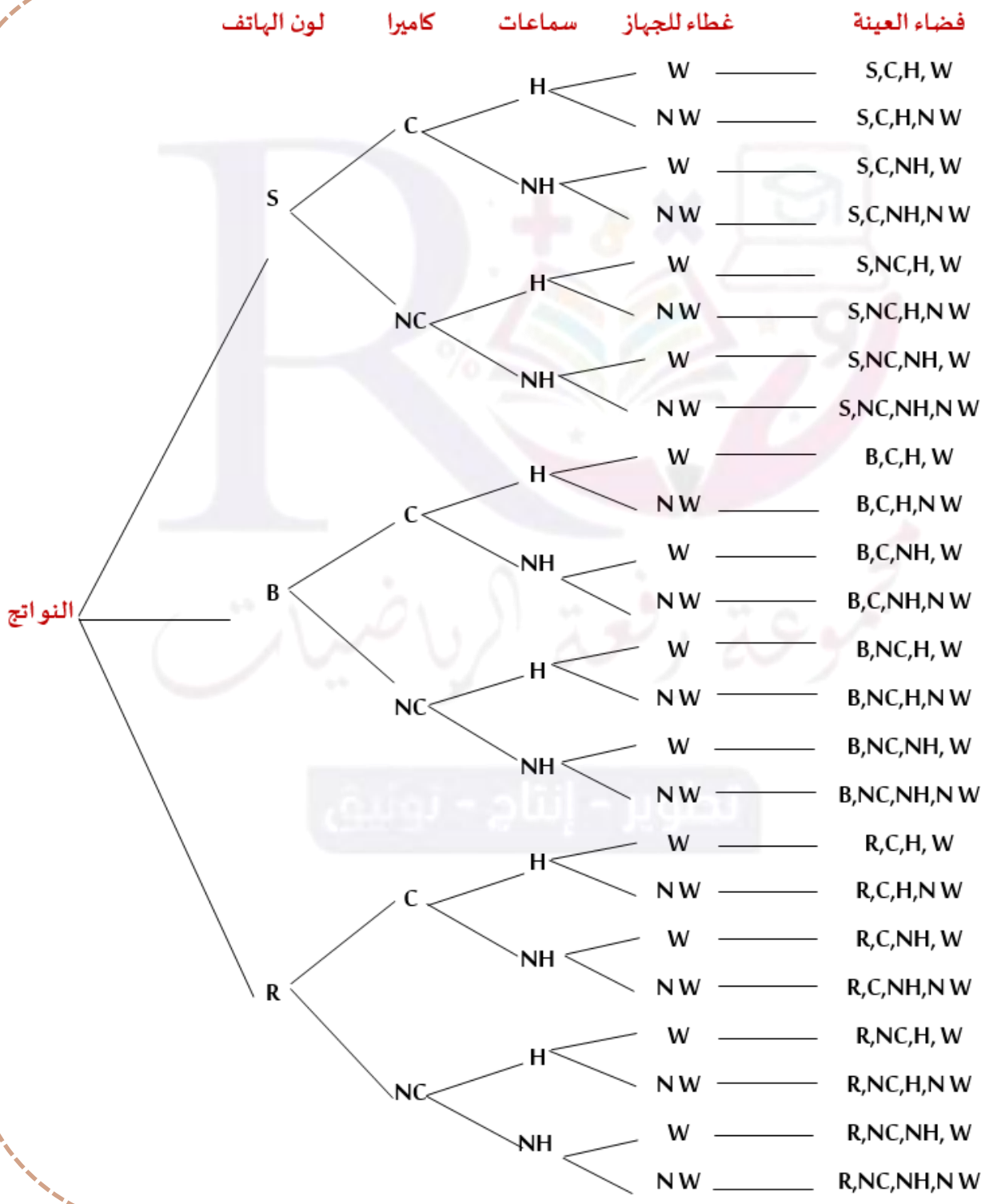
النواتج	1	2	3	4	5	6
شعار (L)	L , 1	L , 2	L , 3	L , 4	L , 5	L , 6
كتابة (T)	T , 1	T , 2	T , 3	T , 4	T , 5	T , 6

3. الرسم الشجري :



3-1 تمثيل فضاء العينة

2 هو اتف : يرغب مصطفى في شراء هاتف نقال ، ويمكنه أن يختاره بلون فضي (S) أو أسود (B) أو أحمر (R) ، وأن يكون بكاميرا (C) أو بدونها (NC) . ويمكنه أن يحصل على سماعات (H) و / أو غطاء للجهاز (W) . مثّل فضاء العيِّنة لهذا الموقف بالرسم الشجري .



3-1 تمثيل فضاء العينة

أوجد عدد النواتج الممكنة في الحالات الآتية :

3A اختيارإجابات لجميع الأسئلة المبينة في النموذج المجاور

	السؤال1	السؤال 2	السؤال 3	السؤال 4	السؤال 5	السؤال 6	السؤال 7	السؤال 8	السؤال 9	السؤال10
65536 =	4 ×	4 ×	4 ×	4 ×	4 ×	4 ×	2 ×	2 ×	2 ×	2

3B رمي مكعب مرقم أربع مرات .

	الرمية الأولى		الرمية الثانية		الرمية الثالثة		الرمية الرابعة
1296 =	6	×	6	×	6	×	6

3C أحذية : اختيارزوج من الأحذية من بين المقاسات : 39 , 40 , 41 , 42 , 43 , 44 , 45 ،
بلون أسود أو بني أورمادي أو أبيض ، ويمكن أن يكون من الجلد الطبيعي أو الصناعي ،
وهناك ثلاثة أشكال مختلفة للحذاء .

	المقاسات		اللون		الجلد		الشكل
168 =	7	×	4	×	2	×	3

3-2 الاحتمال باستعمال التوافيق والتباديل

1 تصوير: ارجع إلى فقرة "لماذا؟". ما احتمال أن يُختار علي ليقف في أقصى يسار الصورة ، وأن يقف فراس في أقصى يمينها ؟

الخطوة 1 : أوجد عدد نواتج فضاء العيِّنة. وهو عدد التباديل الممكنة ويساوي !4

الخطوة 2 : أوجد عدد النواتج التي يتكون منها الحدث. وهو عدد التباديل الممكنة ويساوي $(4-2)! = 2!$

الخطوة 3 : احسب الاحتمال.

$$P(\text{علي أقصى يمينها و فراس أقصى يسارها}) = \frac{2!}{4!}$$

$$= \frac{2!}{4 \cdot 3 \cdot 2!} \quad \text{بإيجاد مفكوك } 4! \text{ والقسمة على العوامل المشتركة}$$

$$= \frac{1}{12} \quad \text{بالتبسيط}$$

2 بطاقات جامعية :

تستعمل الأرقام 9 - 1 دون تكرار؛ لعمل بطاقات للطلاب مكونة من 8 منازل.

A) ما عدد البطاقات الجامعية الممكنة ؟

عدد النواتج الممكنة في فضاء العيِّنة يساوي عدد تباديل 9 أرقام أخذ منها 8 في كل مرة، أي ${}_9P_8$

$${}_9P_8 = \frac{9!}{(9-8)!} = \frac{9!}{1!} = \frac{9!}{1} = 9! = 362880$$

B) إذا اختيرت بطاقة جامعية عشوائيّاً ، ما احتمال أن تحمل أحد الرقمين 67953124 , 42135976 ؟

عدد نواتج الحدث يساوي 2.

لذا، فإن احتمال أن تحمل أحد الرقمين 67953124 , 42135976، يساوي

$$\frac{2}{362880} = \frac{1}{181440}$$

3-2 الاحتمال باستعمال التوافيق والتباديل

3 **أعداد:** تم تكوين عدد مكون من 6 أرقام عشوائيًّا باستعمال الأرقام 1 , 5 , 2 , 1 , 5 , 3،
ما احتمال أن يكون أول رقم في العدد هو 5 وآخر رقم هو 5 أيضًا؟

الخطوة 1 : هناك 6 أرقام يتكرر فيها الرقم 1 مرتين ، والرقم 5 مرتين. ولذا؛ فإن عدد التباديل المتمايزة لهذه الأرقام هو:

$$\frac{6!}{2!\cdot 2!}=\frac{720}{2\cdot 2}=\frac{720}{4}=180$$

الخطوة 2 : عدد نواتج الحدث، أن يكون أول رقم في العدد هو 5 وآخر رقم هو 5 أيضًا.
هناك 4 أرقام يتكرر فيها الرقم 1 مرتين. ولذا؛ فإن عدد التباديل المتمايزة لهذه الأرقام هو:

$$\frac{4!}{2!}=\frac{24}{2}=12$$

الخطوة 3 : احسب الاحتمال .

$$P(\text{أن يكون أول رقم في العدد هو 5 وآخر رقم هو 5 أيضًا})=\frac{12}{180}=\frac{1}{15}$$

4A **بطاقات:** إذا رتبت 5 بطاقات مُسجل عليها الأسماء:(حسن، محمد، أحمد، سالم، سعود) على منضدة دائرية عشوائيًّا، فما احتمال ظهورها كما في الشكل المجاور؟

الخطوة 1 : بما أنه لا توجد نقطة مرجع ثابتة ، فإن هذا تبديل دائري . لذا يوجد ! (1 – 5) أو ! 4

الخطوة 2 : عدد النواتج التي يتكون منها الحدث المطلوب يساوي 1.

الخطوة 3 : احسب الاحتمال .

$$P(\text{ظهور البطاقات كما في الشكل المجاور})=\frac{1}{4!}=\frac{1}{24}$$

3-2 الاحتمال باستعمال التوافيق والتباديل

4B

كرة قدم: تجمَّع فريق كرة قدم مكوَّن من 11 لاعباً على شكل حلقة يتشاورون قبل بداية المباراة ، إذا وقف حكم المباراة تماماً خلف أحدهم ، فما احتمال وقوف الحكم خلف حارس المرمى ؟ وضّح تبريرك.

الخطوة 1 : بما أن اللاعبين يقفون حسب نقطة مرجع ثابتة فإن هذا تبديل خطي . لذا يوجد 11! طريقة يقف بها اللاعبين.

الخطوة 2 : عدد النواتج التي يتكون منها الحدث المطلوب يساوي عدد تباديل اللاعبين العشرة الآخرين في التجمع وهذا يساوي 10! .

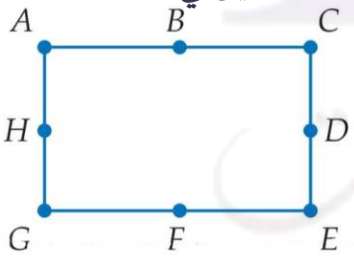
الخطوة 3 : احسب الاحتمال .

$$P(\text{أن يقف الحكم خلف حارس المرمى}) = \frac{10!}{11!} = \frac{10!}{11 \cdot 10!} = \frac{1}{11}$$

5

هندسة : إذا تم اختيار ثلاث نقاط عشوائياً من النقاط المسماة على المستطيل في الشكل المجاور،

فما احتمال أن تقع النقاط الثلاث على قطعة مستقيمة واحدة ؟



الخطوة 1 : بما أن ترتيب اختيار النقاط ليس مهمّاً ، فإن عدد النواتج الممكنة في فضاء العيّنة يساوي عدد توافيق 8 مأخوذة 3 في كل مرة أي ${}_8C_3$.

$${}_8C_3 = \frac{8!}{(8-3)!\,3!} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{56}{1} = 56$$

الخطوة 2 : عدد النواتج التي يتكون فيها الحدث ، وفي هذه الحالة يساوي 4 .

الخطوة 3 : احسب الاحتمال .

$$P(\text{أن تقع النقاط الثلاث على قطعة مستقيمة واحدة}) = \frac{4}{56} = \frac{1}{14}$$

3-3 الاحتمال الهندسي

إذا اختيرت النقطة X عشوائيّاً على $\overline{JM}$ ، فأوجد قيمة كل مما يأتي :

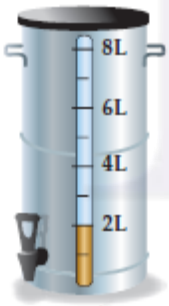
1A $P(\text{تقع X على } \overline{LM})$

$$P(\text{تقع X على } \overline{LM}) = \frac{LM}{JM} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7} \approx 0.286 \approx 28.6\ \%$$

1B $P(\text{تقع X على } \overline{KM})$

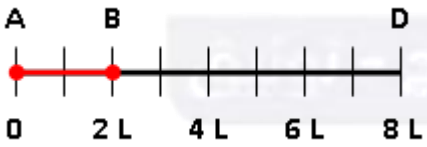
$$P(\text{تقع X على } \overline{KM}) = \frac{KM}{JM} = \frac{11}{14} \approx 0.786 \approx 78.6\ \%$$

2 **شاي:** يحّضر مطعم الشاي في وعاء سعته 8 L ، وعندما ينخفض مستوى الشاي في الوعاء عن 2 L يصبح تركيز الشاي كبيراً ويختلف طعمه.



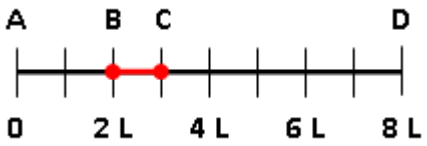
A) إذا حاول شخص ملء كأس من الشاي ، فما احتمال أن يكون مستوى الشاي في الوعاء تحت مستوى 2 L ؟

$$P(\text{مستوى الشاي في الوعاء تحت مستوى } 2\text{ L}) = \frac{AB}{AD} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\ \%$$



B) ما احتمال أن يكون مستوى الشاي في الوعاء في أي وقت بين 2 L و 3 L ؟

$$P(\text{مستوى الشاي في الوعاء بين } 2\text{ L و } 3\text{ L}) = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{8} = 0.125 = 12.5\ \%$$



3-3 الاحتمال الهندسي

الهبوط بالمظلات : أوجد كلاً مما يأتي بالاعتماد على المثال السابق .

3A (أن يهبط المظلي في المنطقة الزرقاء) **P**

$$P(\text{أن يهبط المظلي في المنطقة الزرقاء}) = \frac{\text{مساحة الدائرة الزرقاء}}{\text{مساحة الهدف}}$$

$$= \frac{\pi\,(3)^2 - \pi\,(2)^2}{\pi\,(3)^2} = \frac{5\,\pi}{9\,\pi} = \frac{5}{9} \approx 0.555 \approx 55.5\ \%$$

3B (أن يهبط المظلي في المنطقة البيضاء) **P**

$$P(\text{أن يهبط المظلي في المنطقة البيضاء}) = \frac{\text{مساحة الدائرة البيضاء}}{\text{مساحة الهدف}}$$

$$= \frac{\pi\,(2)^2 - \pi\,(1)^2}{\pi\,(3)^2} = \frac{3\,\pi}{9\,\pi} = \frac{1}{3} \approx 0.333 \approx 33.3\ \%$$

استعمل القرص ذا المؤشر الدوّار في الشكل المجاور لإيجاد كل مما يأتي :

3A (عدم استقرار المؤشر على اللون الأخضر) **P**

$$= \frac{360 - 90}{360} = \frac{270}{360} = \frac{3}{4} = 75\ \%$$

3B (استقرار المؤشر على اللون الأزرق) **P**

$$= \frac{70}{360} = \frac{7}{36} \approx 19\ \%$$

3-4 احتمالات الحوداث المستقلة والحوداث المركبة

حدّد إذا كانت الحادثتان مستقلتين أم غير مستقلتين في كل مما يأتي ، ووضّح إجابتكِ :

1A سُحبت بطاقة من مجموعة بطاقات ، ثم أعيدت إلى المجموعة ، ثم سحبت بطاقة ثانية .

بما أنه تم إعادة البطاقة التي تم سحبها في المرة الأولى إلى المجموعة مما يحافظ على عدد عناصر فضاء العيّنة كما هو ، فإن الحادثتين مستقلتان .

1B إلقاء قطعة نقد مرة واحدة ، ثم رمي مكعب مرقم مرة واحدة أيضاً .

إن احتمال ناتج تجربة إلقاء قطعة نقد مرة واحدة لا يؤثر بأي حال من الأحوال في احتمال ناتج تجربة إلقاء مكعب مرقم مرة واحدة ، لذا ؛ تكون الحادثتان مستقلتين .

2A إذا أُلقيت قطعة نقد ورُمي مكعب مرقم مرة واحدة . فما احتمال ظهور الشعار والعدد 6 ؟

هاتان حادثتان مستقلتان .

نفرض أن A يمثّل ظهور الشعار وأن B يمثّل ظهور العدد 6 ، فيكون المطلوب هو: $P(A \cap B)$

$$P(A \cap B) = P(A) . P(B)$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2} . \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \approx 8\,\%$$

2B إذا أُلقيت قطعة نقد أربع مرات متتالية . فما احتمال الحصول على كتابة أربع مرات ؟

هذه حوادث مستقلة .

نفرض أن A يمثّل ظهور الكتابة و أن B يمثّل ظهور الشعار ، فيكون المطلوب هو:

$$P(A \cap A \cap A \cap A)$$

$$P(A \cap A \cap A \cap A) = P(A) . P(A) . P(A) . P(A)$$

$$P(A \cap A \cap A \cap A) = \frac{1}{2} . \frac{1}{2} . \frac{1}{2} . \frac{1}{2} = \frac{1}{16} = 0.0625 = 6.25\,\%$$

3-4 احتمالات الحوداث المستقلة والحوداث المركبة

3 يحتوي صندوق على 24 بطاقة ، منها 6 بطاقات زرقاء مرقمة من 1 إلى 6 وبالمثل 6 بطاقات حمراء و6 صفراء و6 خضراء . ما احتمال سحب 3 بطاقات حمراء الواحدة تلو الأخرى إذا كان السحب دون إرجاع ؟

هذه الحوادث غير مستقلة ؛ لأن السحب دون إرجاع .

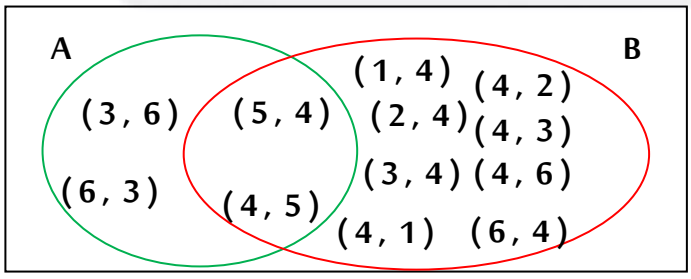
$$P(A \cap A \cap A) = P(A) \cdot P(A|A) \cdot P(A|A|A)$$

$$= \frac{6}{24} \cdot \frac{5}{23} \cdot \frac{4}{22} = \frac{120}{12144} = \frac{5}{506} \approx 0.0099 \approx 0.99\,\%$$

4 عند رمي مكعبين متمايزين مرة واحدة ، ما احتمال أن يظهر العدد 4 على أحدهما إذا كان مجموع العددين على الوجهين الظاهرين يساوي 9 ؟

$\frac{1}{2}$	D	$\frac{1}{3}$	C	$\frac{1}{4}$	B	$\frac{1}{6}$	A

نفرض أن A حادثة كون مجموع العددين على الوجهين الظاهرين يساوي 9 .
وأن B حادثة ظهور العدد 4 على أحد المكعبين .
نرسم شكل فن لتمثيل هذا الموقف . يوجد أربعة أزواج مرتبة في فضاء العيّنة ، واثنان منها يظهر العدد 4 على أحدهما وفي نفس الوقت مجموع العددين يساوي 9



$$P(B|A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

والإجابة الصحيحة هي D

3-5 احتمالات الحوداث المتنافية

حدِّد إذا كانت الحادثتان متنافيتين أم غير متنافيتين في كل مما يأتي ، وبرري إجابتكِ :

1A اختيار عدد عشوائيّاً من الأعداد من 1 إلى 100 والحصول على عدد يقبل القسمة على 5 أو عدد يقبل القسمة على 10 .

هاتان الحادثتان غير متنافيتين ؛ لأن بينهما نواتج مشتركة ، إذا يمكن الحصول على عدد يقبل القسمة على 5 ويقبل القسمة على 10 في الوقت نفسه ، فالعدد 50 مثلاً يقبل القسمة على 5 ويقبل القسمة على 10 في الوقت نفسه .

1B الحصول على المجموع 6 أو المجموع 7 ، عند رمي مكعبين مرقمين متمايزين مرة واحدة .

هاتان الحادثتان متنافيتين ؛ لأنه ليس بينهما نواتج مشتركة ، إذا لا يمكن الحصول على المجموع 6 أو المجموع 7 في آن واحد .

2A رُمي مكعبان مرقمان متمايزان مرة واحدة . ما احتمال أن يظهر العدد نفسه على كل من وجهي المكعبين أو أن يكون مجموع العددين 9 ؟

هاتان الحادثتان متنافيتين ؛ لأنه ليس بينهما نواتج مشتركة ، إذا لا يمكن أن يظهر العدد نفسه على كل من وجهي المكعبين أو أن يكون مجموع العددين 9 في آن واحد .

نفرض أن الحادثة A تمثل أن يظهر العدد نفسه على كل من وجهي المكعبين ، ونفرض أن الحادثة B تمثل أن يكون مجموع العددين 9 .

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{6}{36} + \frac{4}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18} \approx 28\,\%$$

3-5 احتمالات الحوداث المتنافية

2B ألعاب : إذا ربح طالب في مسابقة إلقاء الشعرفي احتفال المدرسة باليوم الوطني للمملكة فسيُمنح جائزة . إذا اختيرت الجائزة عشوائيّاً من بين 15 محفظة و16 ساعة و 14 نظارة و25 قلماً و10 كرات ، فما احتمال أن يُمنح الفائزمحفظة أوساعة أوكرة ؟

هذه الحوادث متنافية ؛ لأنه ليس بينهم نواتج مشتركة ، إذا لا يمكن أن يُمنح الفائز محفظة أوساعة أوكرة في آن واحد .

نفرض أن الحادثة A تمثل أن يُمنح الفائزمحفظة ، ونفرض أن الحادثة Bتمثل أن يُمنح الفائزساعة ، ونفرض أن الحادثة C تمثل أن يُمنح الفائز كرة.

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

$$= \frac{15}{80} + \frac{16}{80} + \frac{10}{80} = \frac{41}{80} \approx 51\,\%$$

3 فن: في المثال أعلاه، ما احتمال أن تكون اللوحة التي اختارها إبراهيم مائية أو شكلًا هندسيًّا؟

لوحات إبراهيم			
الوسيلة	طبيعة صامتة	مناظر طبيعية	أشكال هندسية
ألوان مائية	4	5	3
ألوان زيتية	1	3	2
ألوان أكريل	3	2	1
ألوان باستيل	1	0	5

هاتان الحادثتان غير متنافيتين ؛ لأنه بينهما نواتج مشتركة.

نفرض أن الحادثة A تمثل اختيارلوحة مائية ، ونفرض أن الحادثة B تمثل اختيارلوحة شكلًا هندسيًّا.

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$= \frac{12}{30} + \frac{11}{30} - \frac{3}{30} = \frac{23}{30} - \frac{3}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3} \approx 67\,\%$$

4 إذا كان احتمال هطول المطر 70 % فما احتمال عدم هطوله ؟

نفرض أن A تمثّل حادثة هطول المطر، ونوجد احتمال متممة A .

$$P(A') = 1 - P(A)$$

$$= 1 - \frac{70}{100} = \frac{30}{100} = \frac{3}{10} = 0.3 = 30\,\%$$

1 الفصل الرابع

(4-1) الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية

(4-2) الزاوية وقياساتها

(4-3) الدوال المثلثية للزاويا

(4-4) قانون الجيوب

(4-5) قانون جيب التمام

(4-6) الدوال الدائرية

(4-7) تمثيل الدوال المثلثية

(4-8) الدوال المثلثية العكسية

٤-١ الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية

1 إذا كانت θ تمثِّل زاوية حادة في المثلَّث القائم الزاوية في C، فأوجد قيم الدوالّ المثلَّثية الستِّ للزاوية B

إذا كان طول الضلع المقابل للزاوية θ: BC = 8، طول الضلع المجاور للزاوية θ: AC = 15، طول الوتر: AB = 17

طول الضلع المقابل للزاوية B: AC = 15، طول الضلع المجاور للزاوية B: BC = 8.

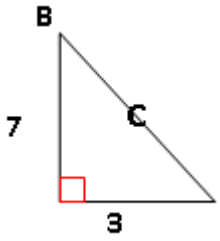
$\tan B = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{15}{8}$	$\cos B = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{8}{17}$	$\sin B = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{15}{17}$
$\cot B = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{8}{15}$	$\sec B = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{17}{8}$	$\csc B = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{17}{15}$

2 $\angle B$ زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية. إذا كان $\tan B = \frac{3}{7}$ ، فأوجد قيمة $\sin B$.

الخطوة 1: نرسم مثلثاً قائم الزاوية ونسمِّي إحدى زاويتاه الحادة B.

بما أن $\tan B = \frac{3}{7} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

نحدد على الرسم طول الضلع المقابل بـ 3، والمجاور بـ 7.



الخطوة 2: نستعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد طول الوتر c.

$$c^2 = a^2 + b^2 = 7^2 + 3^2 = 49 + 9 = 58$$

$$c = \sqrt{58}$$

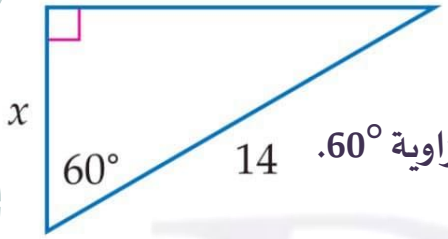
الخطوة 3 : نوجد قيمة $\sin B$.

$$\sin B = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{58}} = \frac{3\sqrt{58}}{58}$$

استعمل دالة مثلثية لإيجاد قيمة x. قرب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم.

3A



طول الوتر يساوي 14. الطول المجهول هو الضلع المجاور للزاوية 60°.

نستعمل دالة جيب التمام لإيجاد قيمة x.

$$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{x}{14}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{14}$$

$$2x = 14$$

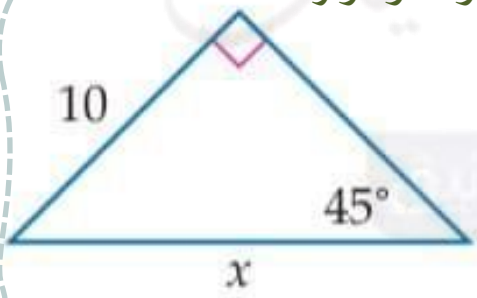
$$x = 7$$

ويمكن استخدام خصائص المثلث الثلاثيني - الستيني

3B

طول الضلع المقابل للزاوية 45° يساوي 10. الطول المجهول هو الوتر.

نستعمل دالة الجيب لإيجاد قيمة x.



$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\sin 45^\circ = \frac{10}{x}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{10}{x}$$

$$\sqrt{2}\,x = 20$$

$$x = \frac{20}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{20\sqrt{2}}{2}$$

$$x = 10\sqrt{2}$$

$$x \approx 14.1$$

ويمكن استخدام خصائص المثلث $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$

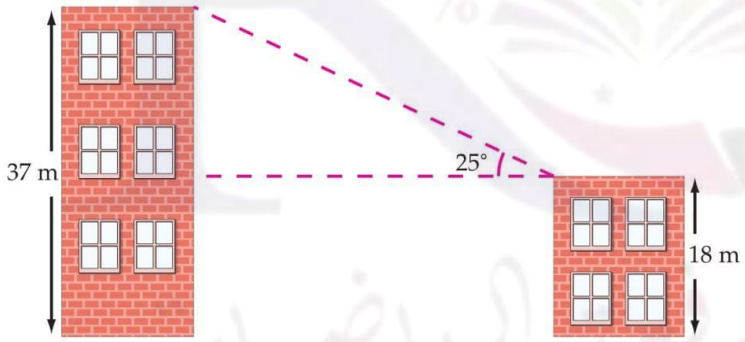
٤-١ الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية

4 **بنايات :** في الشكل المجاور بنايتان ، ارتفاع إحدهما وارتفاع الاخرى ولقياس المسافة الافقية بينهما وضع سعد أداة مقياس زاوية الميل على قمة البناية الصغرى فوجد أن قياس الزاوية المحصورة بين الخط الافقي بين البنايتين والخط المار من الاداة الى قمة البناية الكبرى هو فما المسافة الافقية بين البنايتين ؟

طول الضلع المقابل للزاوية 25° يساوي $37 - 18 = 19$

المسافة الافقية بين البنايتين تساوي طول الضلع المجاور للزاوية ونفرض أنها x

نستعمل دالة الظل لإيجاد قيمة x.



$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\tan 25^\circ = \frac{19}{x}$$

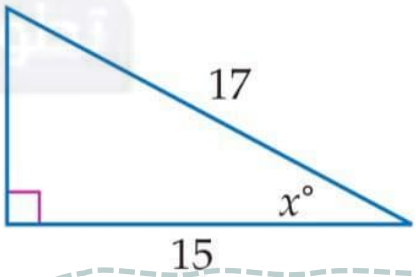
$$x \tan 25^\circ = 19$$

$$x = \frac{19}{\tan 25^\circ}$$

$$x \approx 40.75$$

أوجد قيمة x. مقرّبةً إلى أقرب جزء من عشرة.

5A



نستعمل دالة جيب التمام.

$$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

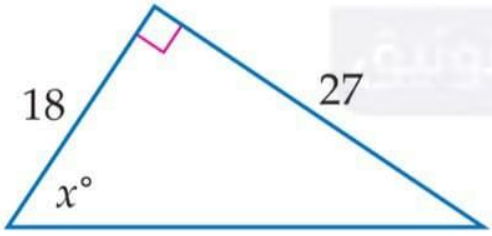
$$\cos\theta = \frac{15}{17}$$

$$\frac{15}{17} = m \cos^{-1}\angle\theta$$

$$\frac{15}{17} = x \cos^{-1}\angle\theta$$

$$x \approx 28.1^\circ$$

5B



نستعمل دالة الظل.

$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\tan\theta = \frac{27}{18}$$

$$\tan\theta = \frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2} = m \tan^{-1}\angle\theta$$

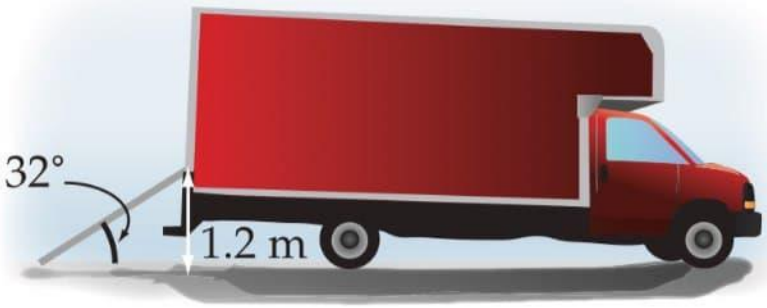
$$\frac{3}{2} = x \tan^{-1}$$

$$x \approx 56.3^\circ$$

6A

تفريغ حمولة: استعمل سطح مائل لتفريغ شاحنة بزاوية ارتفاع قياسها 32°. إذا كان ارتفاع السطح عند باب الشاحنة عن الأرض 1.2 m، فأوجد طول السطح المائل.

نكتب معادلة باستعمال دالة مثلثية تتضمن نسبة الارتفاع الرأسي (الضلع المقابل للزاوية 32°) إلى طول السطح المائل (الوتر).



$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\sin 32^\circ = \frac{1.2}{x}$$

$$x \sin 32^\circ = 1.2$$

$$x = \frac{1.2}{\sin 32^\circ}$$

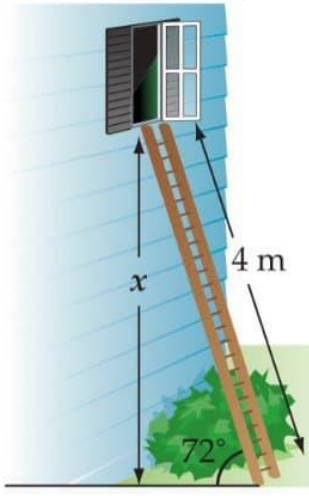
$$x \approx 2.3$$

أي أن طول السطح المائل يساوي 2.3 m تقريبًا.

6B

سلالم: سلم طوله 4 m يستند إلى جدار منزل بزاوية ارتفاع قياسها 72°. ما ارتفاع قمة السلم عن الأرض؟

نكتب معادلة باستعمال دالة مثلثية تتضمن نسبة الارتفاع الرأسي (الضلع المقابل للزاوية 72° ويمثل ارتفاع قمة السلم عن الأرض) إلى طول السلم (الوتر).



$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\sin 72^\circ = \frac{x}{4}$$

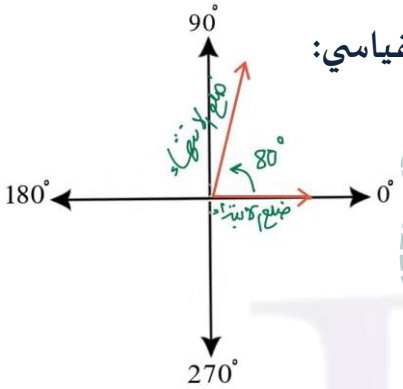
$$x = 4 \sin 72^\circ$$

$$x \approx 3.8$$

أي أن ارتفاع قمة السلم عن الأرض يساوي 3.8 m تقريبًا.

1A ارسم كلاً من الزاويتين المعطى قياسهما فيما يأتي في الوضع القياسي:

80°

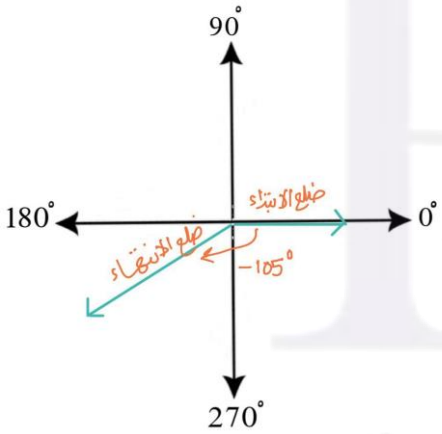


نرسم ضلع الانتهاء بدوران معاكس لحركة عقارب الساعة بدءاً من الجزء الموجب من المحور x.

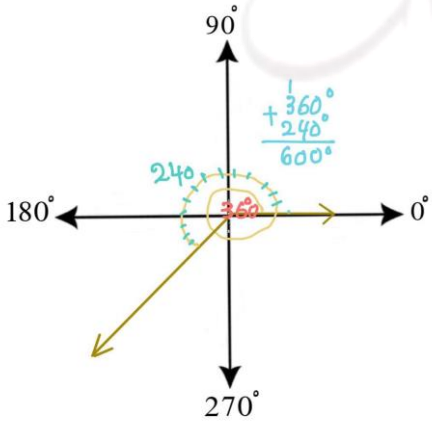
1B -105°

قياس الزاوية سالب.

نرسم ضلع الانتهاء للزاوية 105° بدوران مع حركة عقارب الساعة بدءاً من الجزء الموجب من المحور x.



2 ارسم زاوية قياسها 600° في الوضع القياسي.



$600^\circ = 360^\circ + 240^\circ = 360^\circ + 180^\circ + 60^\circ$

نرسم ضلع الانتهاء للزاوية 60° بدوران معاكس لحركة عقارب الساعة بدءاً من الجزء السالب من المحور x.

3A في كل مما يأتي أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب، والأخرى بقياس سالب مشتركتين في ضلع الانتهاء مع كل زاوية معطاة:

15°

زاوية بقياس موجب: $15^\circ + 360^\circ = 375^\circ$ (بإضافة 360°)

زاوية بقياس سالب: $15^\circ - 360^\circ = -345^\circ$ (بطرح 360°)

3B -45°

زاوية بقياس موجب: $-45^\circ + 360^\circ = 315^\circ$ (بإضافة 360°)

زاوية بقياس سالب: $-45^\circ - 360^\circ = -405^\circ$ (بطرح 360°)

حول قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى درجات:

4A 120°

$$120^\circ = 120^\circ \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{2\pi \text{ rad}}{3} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

4B $-\frac{3\pi}{8}$

$$-\frac{3\pi}{8} = -\frac{3\pi}{8} \text{ rad} \cdot \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = -\frac{540^\circ}{8} = -\frac{270^\circ}{4} = -67.5^\circ$$

5

الدورة الكاملة = 90 دقيقة.

360° = 90 دقيقة.

4° = 1 دقيقة.

جلس الشخص في المطعم 78 دقيقة وبالتالي كانت الزاوية تساوي: $78\,(4^\circ) = 312^\circ$

الخطوة 1: نوجد قياس الزاوية المركزية بالراديان.

$$312^\circ = 312^\circ \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{78\pi \text{ rad}}{45} = \frac{26\pi}{15} \text{ rad}$$

الخطوة 2: نستعمل طول نصف القطر وقياس الزاوية المركزية لإيجاد طول القوس.

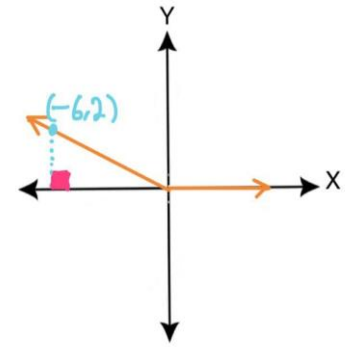
$$s = r\theta$$

$$= 90 \cdot \frac{26\pi}{15} = 156\pi \approx 490 \text{ ft}$$

أي أن المسافة التي دارها الشخص تساوي تقريبًا 490 ft.

4-3 الدوال المثلثية للزاويا

1 إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بالنقطة $(2, -6)$.
فأوجد القيم الدقيقة للدوال المثلثية الست للزاوية θ.



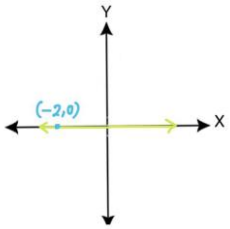
الخطوة 1 : نرسم الزاوية ونوجد قيمة r .

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$r = \sqrt{(-6)^2 + 2^2}$$
$$r = \sqrt{36 + 4}$$
$$r = \sqrt{40}$$

الخطوة 2 : نستعمل $r = \sqrt{40}$ $x = -6, y = 2$ لكتابة النسب المثلثية الست.

$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}$	$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-6}{\sqrt{40}} = \frac{-6\sqrt{40}}{40} = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$	$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{2}{\sqrt{40}} = \frac{2\sqrt{40}}{40} = \frac{\sqrt{10}}{10}$
$\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{-6}{2} = -3$	$\sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{40}}{-6} = -\frac{\sqrt{10}}{3}$	$\csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{40}}{2} = \sqrt{10}$

2 إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بالنقطة $(0, -2)$.
فأوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ.



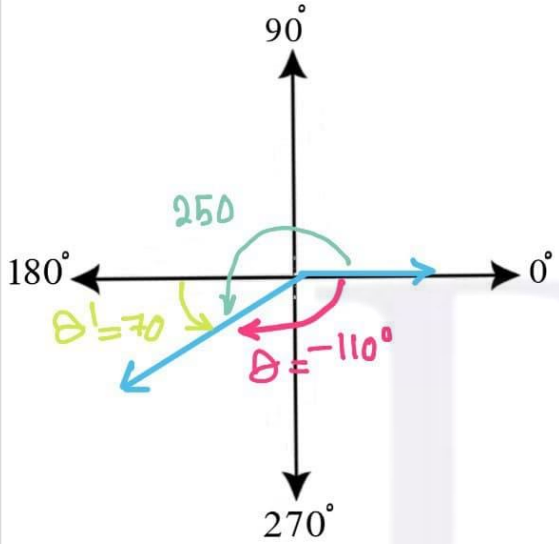
تقع النقطة $(0, -2)$ على الجزء السالب من المحور x،
لذلك فإن قياس الزاوية الربعية يساوي 180°.
نستعمل $r = 2$ $x = -2, y = 0$ لكتابة النسب المثلثية الست.

$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{0}{-2} = 0$	$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-2}{2} = -1$	$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{0}{2} = 0$
$\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{-2}{0}$ (غير معرفة)	$\sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{2}{-2} = -1$	$\csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{2}{0}$ (غير معرفة)

4-3 الدوال المثلثية للزاويا

ارسم كلاً من الزاويتين الآتيتين في الوضع القياسي، ثم أوجد الزاوية المرجعية لها:

3A -110°



الزاوية المشتركة مع الزاوية -110° في ضلع الانتهاء هي: $-110^\circ + 360^\circ = 250^\circ$

ضلع الانتهاء للزاوية 250° يقع في الربع الثالث.

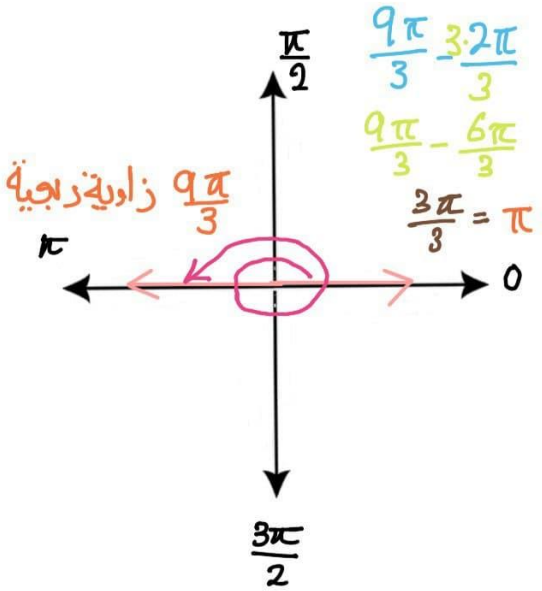
$\theta` = \theta - 180^\circ$

$\theta` = 250^\circ - 180^\circ = 70^\circ$

3B $\frac{9\pi}{3}$

ضلع الانتهاء للزاوية $\frac{9\pi}{3}$ يقع على الجزء السالب من محور x،

لذا فإن الزاوية $\frac{9\pi}{3}$ تُسمّى زاوية ربعية.



4-3 الدوال المثلثية للزاوية

أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية فيما يأتي :

4A $\cos 135^\circ$

ضلع الانتهاء للزاوية 135° يقع في الربع الثاني.

$\theta` = 180^\circ - 135^\circ = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$

$\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

4B $\tan \frac{5\pi}{6}$

ضلع الانتهاء للزاوية $\frac{5\pi}{6}$ يقع في الربع الثاني.

$\theta` = \pi - \theta = \pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$

$\tan \frac{5\pi}{6} = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

5 **أراجيح :** أوجد الارتفاع الكلي لنهاية الذراع الأصفر اللون في المثال 5إذا كان طول هذا الذراع 72 ft، وارتفاع محور الدوران 88 ft وقياس زاوية الدوران -195°

الزاوية المشتركة مع الزاوية -195° في ضلع الانتهاء هي: $-195^\circ + 360^\circ = 165^\circ$

ضلع الانتهاء للزاوية 165° يقع في الربع الثاني.

$\theta` = 180^\circ - \theta$

$\theta` = 180^\circ - 165^\circ = 15^\circ$

$\sin \theta = \frac{y}{r}$

$\sin 15^\circ = \frac{y}{72}$

$y = 72 \sin 15^\circ$

$y \approx 18.6$

بما أن y تساوي 18.6 ft تقريباً، فإن الارتفاع الكلي لنهاية الذراع الأصفر اللون هو 88 + 18.6 ويساوي 106.6 ft تقريباً.

قانون الجيوب

1 أوجد مساحة ΔABC الذي فيه: $A = 31^\circ$, $c = 22\ m$, $b = 18\ m$ مقربة إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ.

$$\text{المساحة} = \frac{1}{2}\ bc \sin A$$

$$\text{المساحة} = \frac{1}{2}\ (18)\ (22)\ \sin 31^\circ$$

$$\text{المساحة} = 198 \sin 31^\circ$$

$$\text{المساحة} \approx 102.0$$

إذن المساحة تساوي $102.0\ m^2$ تقريباً.

2 حُلّ ΔNPQ الذي فيه: $P = 42^\circ$, $n = 5$, $Q = 65^\circ$ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم.

الخطوة 1 : نوجد قياس الزاوية الثالثة.

$$m\angle N = 180^\circ - (\ 42^\circ + 65^\circ\ ) = 180^\circ - 107^\circ = 73^\circ$$

الخطوة 2 : نستعمل قانون الجيوب لإيجاد كل من الطولين : p , q .

نكتب معادلة لإيجاد قيمة كل منهما.

$$\frac{\sin P}{p} = \frac{\sin N}{n}$$

$$\frac{\sin 42^\circ}{p} = \frac{\sin 73^\circ}{5}$$

$$p = \frac{5 \sin 42^\circ}{\sin 73^\circ}$$

$$p \approx 3.5$$

$$\frac{\sin Q}{q} = \frac{\sin N}{n}$$

$$\frac{\sin 65^\circ}{q} = \frac{\sin 73^\circ}{5}$$

$$q = \frac{5 \sin 65^\circ}{\sin 73^\circ}$$

$$q \approx 4.7$$

حدد إن كان لكل مثلث مما يأتي حل واحد، أم حلاَّن، أم ليس له حل. أوجد الحلول، مقربةً أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

3A ΔRST الذي فيه: $R = 95^\circ, r = 10, s = 12$

بما أن $\angle R$ منفرجة، و $12 > 10$ ، إذن لا يوجد حل للمثلث.

3B ΔMNP الذي فيه: $N = 32^\circ, n = 7, p = 4$

بما أن $\angle N$ حادة، و $4 < 7$ ، إذن يوجد حل واحد للمثلث.

الخطوة 1: نوجد $m\angle P$

$$\frac{\sin P}{p} = \frac{\sin N}{n}$$

$$\frac{\sin P}{4} = \frac{\sin 32^\circ}{7}$$

$$\sin P = \frac{4 \sin 32^\circ}{7}$$

$$p = \sin^{-1} \frac{4 \sin 32^\circ}{7}$$

$$p \approx 18^\circ$$

الخطوة 2 : نوجد $m\angle M$

$$m\angle M \approx 180^\circ - (32^\circ + 18^\circ) \approx 180^\circ - 50^\circ \approx 130^\circ$$

الخطوة 3 : نوجد m

$$\frac{\sin M}{m} \approx \frac{\sin N}{n}$$

$$\frac{\sin 130^\circ}{m} \approx \frac{\sin 32^\circ}{7}$$

$$m \approx \frac{7 \sin 130^\circ}{\sin 32^\circ}$$

$$m \approx 10.1$$

3C ΔABC الذي فيه: $A = 47^\circ \ , a = 15 , b = 18$

بما أن $\angle A$ حادة، و $18 > 15$ ، نوجد قيمة h ونقارنها مع قيمة a.

$$h = b \sin A$$

$$h = 18 \sin 47^\circ$$

$$h \approx 13.2$$

بما أن: $18 > 15 > 13.2$ أو $b > a > h$.

فإن للمثلث حلين وبالتالي هناك مثلثان يطلب حلهما.

الحالة 1 : $\angle B$ حادة.

الخطوة 1 : نوجد $m\angle B$

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a}$$

$$\frac{\sin B}{18} = \frac{\sin 47^\circ}{15}$$

$$\sin B = \frac{18 \sin 47^\circ}{15}$$

$$B = \sin^{-1} \frac{18 \sin 47^\circ}{15}$$

$$B \approx 61^\circ$$

الخطوة 2 : نوجد $m\angle C$

$$m\angle C \approx 180^\circ - (47^\circ + 61^\circ) \approx 180^\circ - 108^\circ \approx 72^\circ$$

الخطوة 3 : نوجد c

$$\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a}$$

$$\frac{\sin 72^\circ}{c} \approx \frac{\sin 47^\circ}{15}$$

$$c \approx \frac{15 \sin 72^\circ}{\sin 47^\circ}$$

$$c \approx 19.5$$

الحالة 2 : ∠B منفرجة.

الخطوة 1 : نوجد $m\angle B$

قيمة دالة الجيب موجبة في الربع الثاني، لذا نوجد زاوية منفرجة B بحيث: $\sin B \approx 0.88$

$$m\angle B \approx 180^\circ - 61^\circ \approx 119^\circ$$

الخطوة 2 : نوجد $m\angle C$

$$m\angle C \approx 180^\circ - (47^\circ + 119^\circ) \approx 180^\circ - 166^\circ \approx 14^\circ$$

الخطوة 3 : نوجد c

$$\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a}$$

$$\frac{\sin 14^\circ}{c} \approx \frac{\sin 47^\circ}{15}$$

$$c \approx \frac{15 \sin 14^\circ}{\sin 47^\circ}$$

$$c \approx 5.0$$

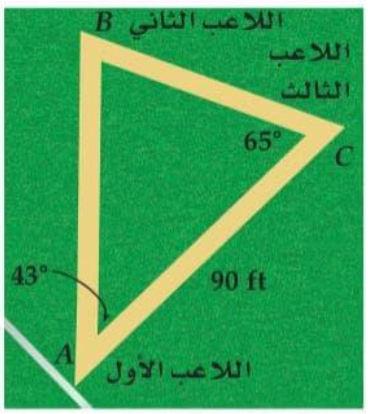
لذا فإن أحد الحلين هو: $B \approx 61^\circ, C \approx 72^\circ, c \approx 19.5$،

والحل الثاني هو: $B \approx 119^\circ, C \approx 14^\circ, c \approx 5.0$

4 أوجد المسافة بين اللاعب الأول واللاعب الثاني.

الخطوة 1 : نوجد قياس الزاوية الثالثة.

$$m\angle B = 180^\circ - (65^\circ + 43^\circ) = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$$



الخطوة 2 : نستعمل قانون الجيوب.

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$\frac{\sin 72^\circ}{90} = \frac{\sin 65^\circ}{c}$$

$$c = \frac{90 \sin 65^\circ}{\sin 72^\circ}$$

$$c \approx 85.8$$

إذن المسافة بين اللاعب الأول واللاعب الثاني تساوي 85.8 ft تقريباً.

قانون جيب التمام

1 حُلّ ΔFGH الذي فيه : $G = 82^\circ$, $h = 4$, $f = 6$ ، مقرباً طول الضلع إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ ، وقياسي الزاويتين إلى أقرب درجة .

الخطوة 1 : نستعمل قانون جيوب التمام لإيجاد طول الضلع الثالث.

$$g^2 = f^2 + h^2 - 2\,f\,h\cos G$$

$$g^2 = 6^2 + 4^2 - 2\,(6)\,(4)\cos 82^\circ$$

$$g^2 = 36 + 16 - 48\cos 82^\circ$$

$$g^2 = 52 - 48\cos 82^\circ$$

$$g^2 \approx 45.32$$

$$g \approx 6.7$$

الخطوة 2 : نستعمل قانون الجيوب لإيجاد القياس المجهول لإحدى الزاويتين.

$$\frac{\sin F}{f} = \frac{\sin G}{g}$$

$$\frac{\sin F}{6} \approx \frac{\sin 82^\circ}{6.7}$$

$$\sin F \approx \frac{6\sin 82^\circ}{6.7}$$

$$F \approx \sin^{-1}\frac{6\sin 82^\circ}{6.7}$$

$$F \approx 62^\circ$$

الخطوة 3 : نوجد قياس الزاوية الثالثة.

$$m\angle H \approx 180^\circ - (\,82^\circ + 62^\circ\,) \approx 180^\circ - 144^\circ \approx 36^\circ$$

قانون جيب التمام

2 حُلّ ΔABC الذي فيه: $a = 5$, $b = 11$, $c = 8$ ، مقرباً قياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

الخطوة 1 : نستعمل قانون جيوب التمام لإيجاد قياس الزاوية الكبرى في ΔABC وهي $\angle B$.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c\cos B$$

$$11^2 = 5^2 + 8^2 - 2\,(5)\,(8)\cos B$$

$$121 = 25 + 64 - 80\cos B$$

$$121 = 89 - 80\cos B$$

$$32 = -80\cos B$$

$$\cos B = -\frac{32}{80}$$

$$B = \cos^{-1} -\frac{32}{80}$$

$$B \approx 114^\circ$$

الخطوة 2 : نستعمل قانون الجيوب لإيجاد $\angle A$.

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

$$\frac{\sin A}{5} \approx \frac{\sin 114^\circ}{11}$$

$$\sin A \approx \frac{5 \sin 114^\circ}{11}$$

$$A \approx \sin^{-1} \frac{5 \sin 114^\circ}{11}$$

$$A \approx 25^\circ$$

الخطوة 3 : نوجد قياس الزاوية الثالثة.

$$m\angle C \approx 180^\circ - (\,114^\circ + 25^\circ\,) \approx 180^\circ - 139^\circ \approx 41^\circ$$

3 **ماراثون:** ركض سعيد مسافة 6 km في اتجاه معين. ثم انعطف بزاوية قياسها 79°، وركض مسافة 7 km. ما المسافة بين النقطة التي بدأ منها سعيد الركض والنقطة التي وصل إليها؟

نستعمل قانون جيوب التمام لإيجاد طول الضلع الثالث.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos C$$

$$c^2 = 6^2 + 7^2 - 2\,(6)\,(7)\cos 79^\circ$$

$$c^2 = 36 + 49 - 84\cos 79^\circ$$

$$c^2 = 85 - 84\cos 79^\circ$$

$$c^2 \approx 68.97$$

$$c \approx 8.3$$

إذن المسافة بين النقطة التي بدأ منها سعيد الركض والنقطة التي وصل إليها هي 8.3 km تقريباً.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توزيع

4-6 الدوال الدائرية

1 إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $P\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$. فأوجد كلاً من:

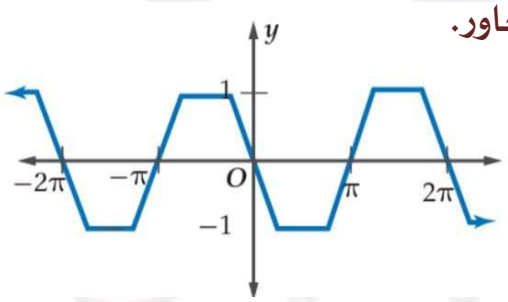
$\cos\theta$, $\sin\theta$.

$$P\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) = P(\cos\theta, \sin\theta)$$

$$\cos\theta = \frac{3}{5}$$

$$\sin\theta = -\frac{4}{5}$$

2 أوجد طول الدورة للدالّة الممثّلة بيانيًّا في الشكل المجاور.



طول الدورة هو 2π .

3A دراجات هوائية: افرض أن البدال للدرجة الهوائية المحددة في فقرة "لماذا ؟" الواردة في بداية الدرس يدور بمعدل دورة واحدة لكل ثانية.

أنشىء جدولاً يوضح ارتفاع البدال عند القيم الآتية: 0 , 0.5 , 1.0 , 1.5 , 2.0 , 2.5 , 3.0 sec

الزمن (sec)	الارتفاع (in)
0	18
0.5	4
1.0	18
1.5	4
2.0	18
2.5	4
3.0	18

3B أوجد طول دورة الدالة و مثليها بيانيّاً.

طول الدورة هو الزمن لإكمال دورة كاملة، لذلك طول الدورة 1 ثانية.

أوجد القيم الدقيقة لكل دالة ممّا يأتي:

4A $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$

$$\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

4B $\sin 420^\circ$

$$\sin 420^\circ = \sin\left(60^\circ + 360^\circ\right) = \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

أوجد السعة وطول الدورة لكل دالة فيما يأتي:

1A $y = \cos \frac{1}{2}\theta$

السعة:	طول الدورة:
$\|a\| = \|1\| = 1$	$\frac{360^\circ}{\|b\|} = \frac{360^\circ}{\|\frac{1}{2}\|} = \frac{360^\circ}{\frac{1}{2}} = 360^\circ \cdot \frac{2}{1} = 720^\circ$

1B $y = 3 \sin 5\theta$

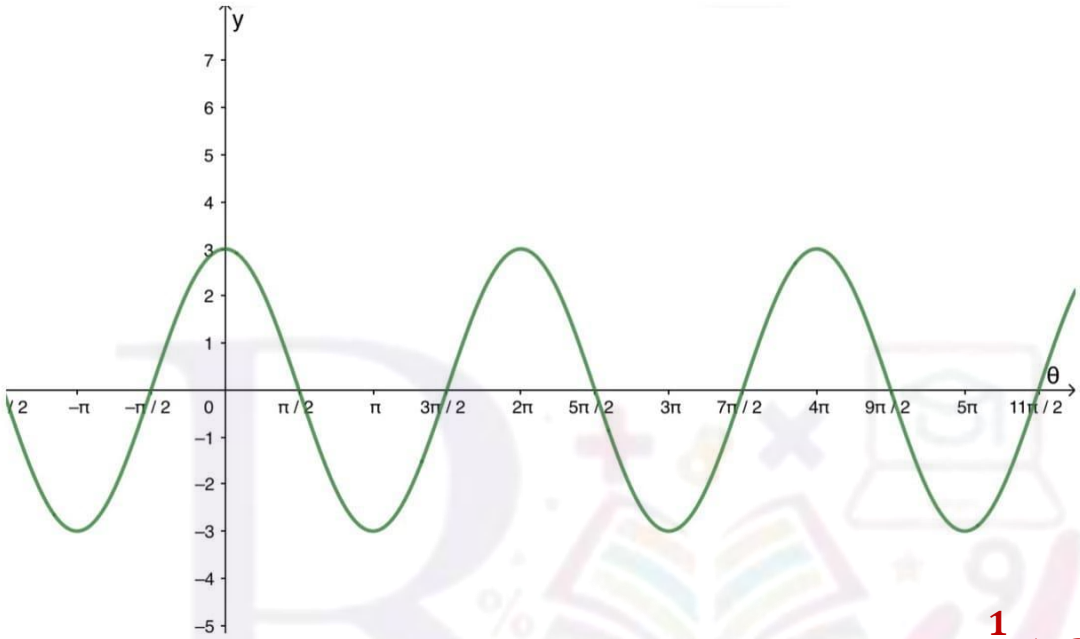
السعة:	طول الدورة:
$\|a\| = \|3\| = 3$	$\frac{360^\circ}{\|b\|} = \frac{360^\circ}{\|5\|} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$

2A مثّل كلاً من الدالتين الآتيتين بيانيّاً:

$y = 3 \cos \theta$

نوجد السعة، وطول الدورة ونقاط التقاطع مع المحور θ حيث: $a = 3 , b = 1$

السعة:	$\|a\| = \|3\| = 3$	
طول الدورة:	$\frac{360^\circ}{\|b\|} = \frac{360^\circ}{\|1\|} = \frac{360^\circ}{1} = 360^\circ$	
نقاط التقاطع مع المحور θ	$(\frac{1}{4} \cdot \frac{360^\circ}{b} , 0)$	$(\frac{3}{4} \cdot \frac{360^\circ}{b} , 0)$
	$(\frac{1}{4} \cdot \frac{360^\circ}{1} , 0) = (90^\circ , 0)$	$(\frac{3}{4} \cdot \frac{360^\circ}{1} , 0) = (270^\circ , 0)$

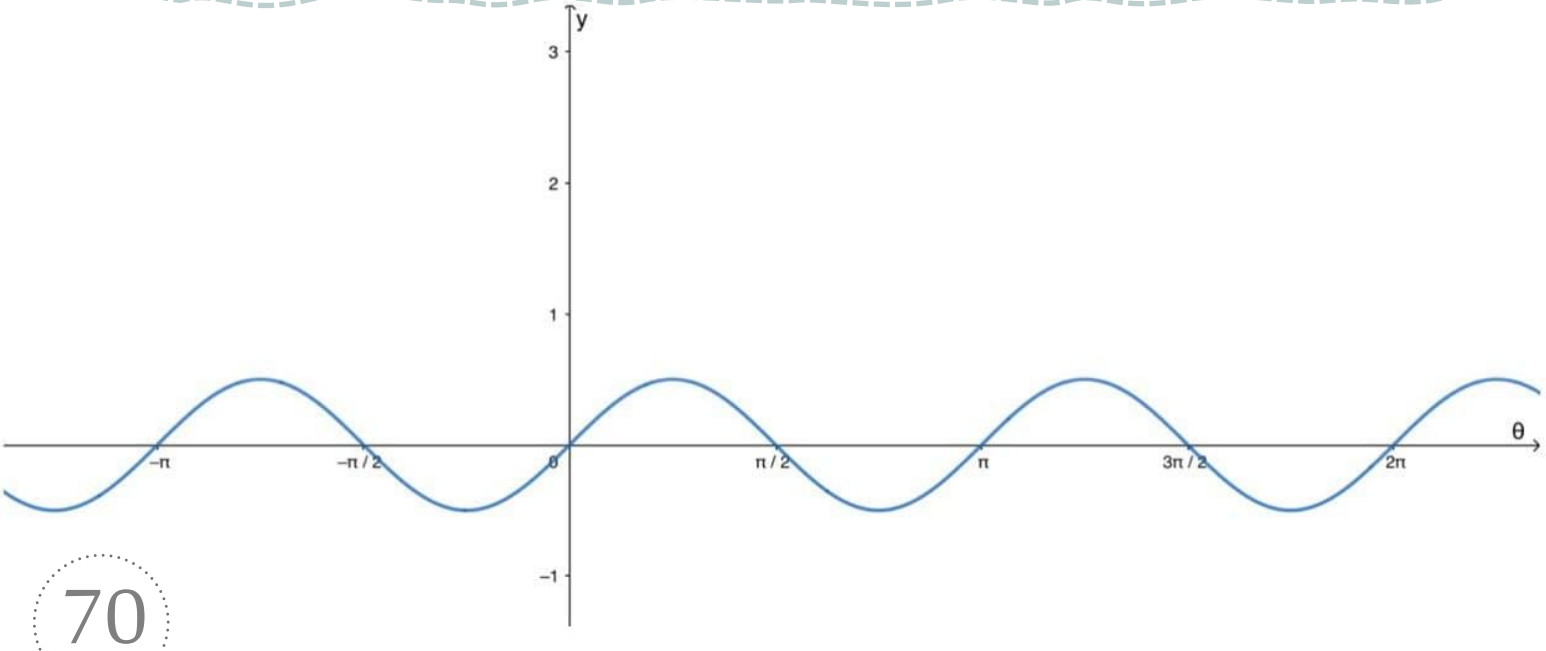


2B

$y = \frac{1}{2} \sin 2\theta$

نوجد السعة، وطول الدورة ونقاط التقاطع مع المحور θ حيث: $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$

السعة:	$\|a\| = \left\|\frac{1}{2}\right\| = \frac{1}{2}$		
طول الدورة:	$\frac{360°}{\|b\|} = \frac{360°}{\|2\|} = \frac{360°}{2} = 180$		
نقاط التقاطع مع المحور θ	$(\frac{360°}{b}, 0)$	$(\frac{1}{2}.\frac{360°}{b}, 0)$	$(0, 0)$
	$(\frac{360°}{2}, 0) = (180°, 0)$	$(\frac{1}{2}.\frac{360°}{2}, 0) = (90°, 0)$	$(0, 0)$



أصوات: يمكن للإنسان سماع أصوات ترددها يصل إلى 20 هيرتز.

3A أوجد طول دورة الدالة.

يوجد 20 دورة في الثانية، وطول الدورة هو مقلوب التردد ويساوي الزمن الذي تستغرقه دورة واحدة لذلك فإن طول الدورة هو:

$$\frac{1}{20} = 0.05 \text{ sec}$$

3B افترض أن السعة تساوي وحدة واحدة.

اكتب دالة جيب التمام التي تعبر عن موجات الصوت، ثم مثِّلها بيانيّاً.

طول الدورة $= \frac{2\pi}{|b|}$ بكتابة العلاقة بين طول الدورة و b

$$\frac{2\pi}{|b|} = 0.05$$

$$|b| = 2\pi\, 0.05 = 40\pi$$

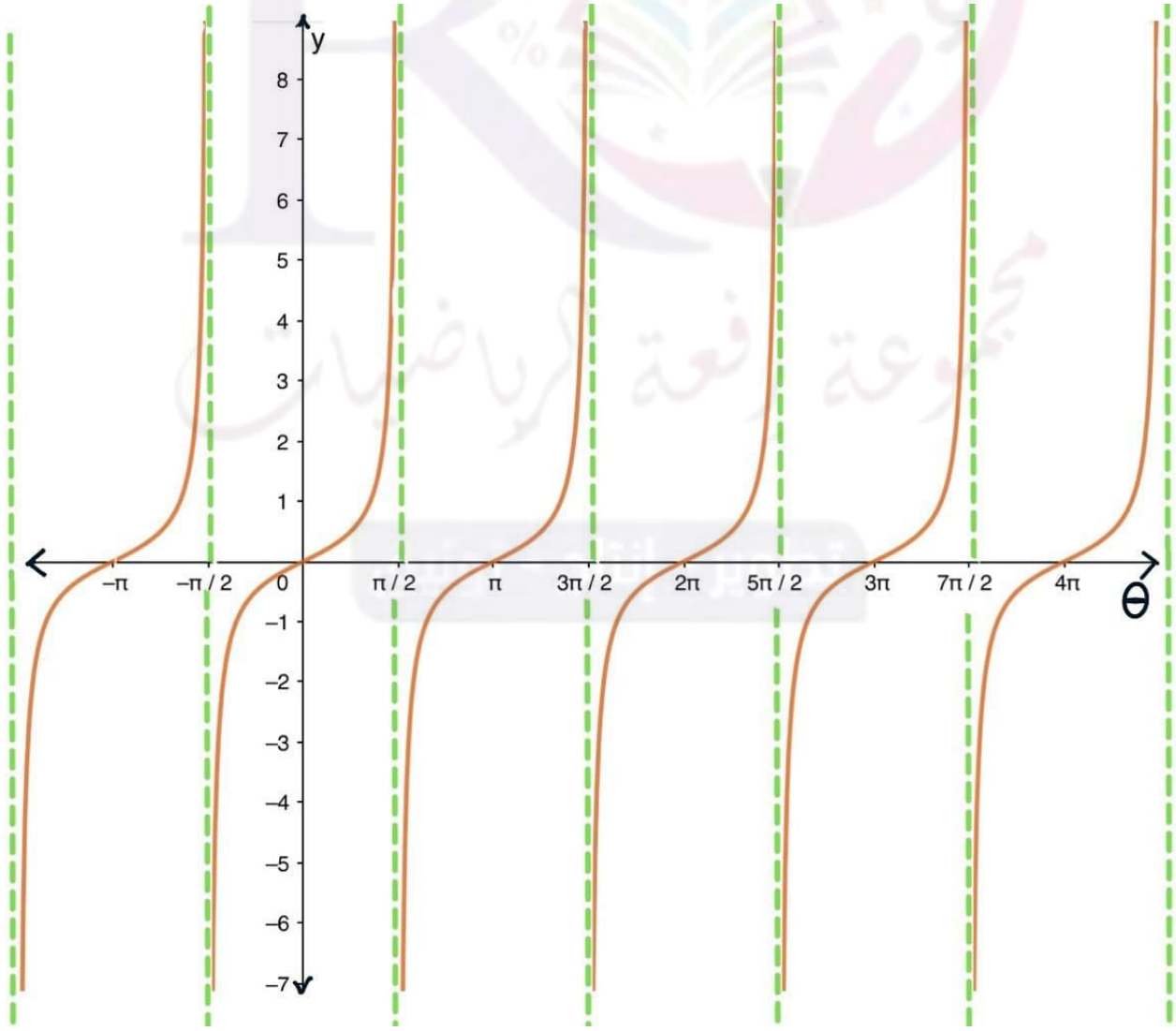
الصورة العامة لدالة جيب التمام $y = a \cos b\, c$

$$y = 1 \cos 40\pi\, t$$

$$y = \cos 40\pi\, t$$

4 أوجد طول دورة الدالة $y = \frac{1}{2}\tan\theta$. ثم مثّل هذه الدالة بيانيّاً.

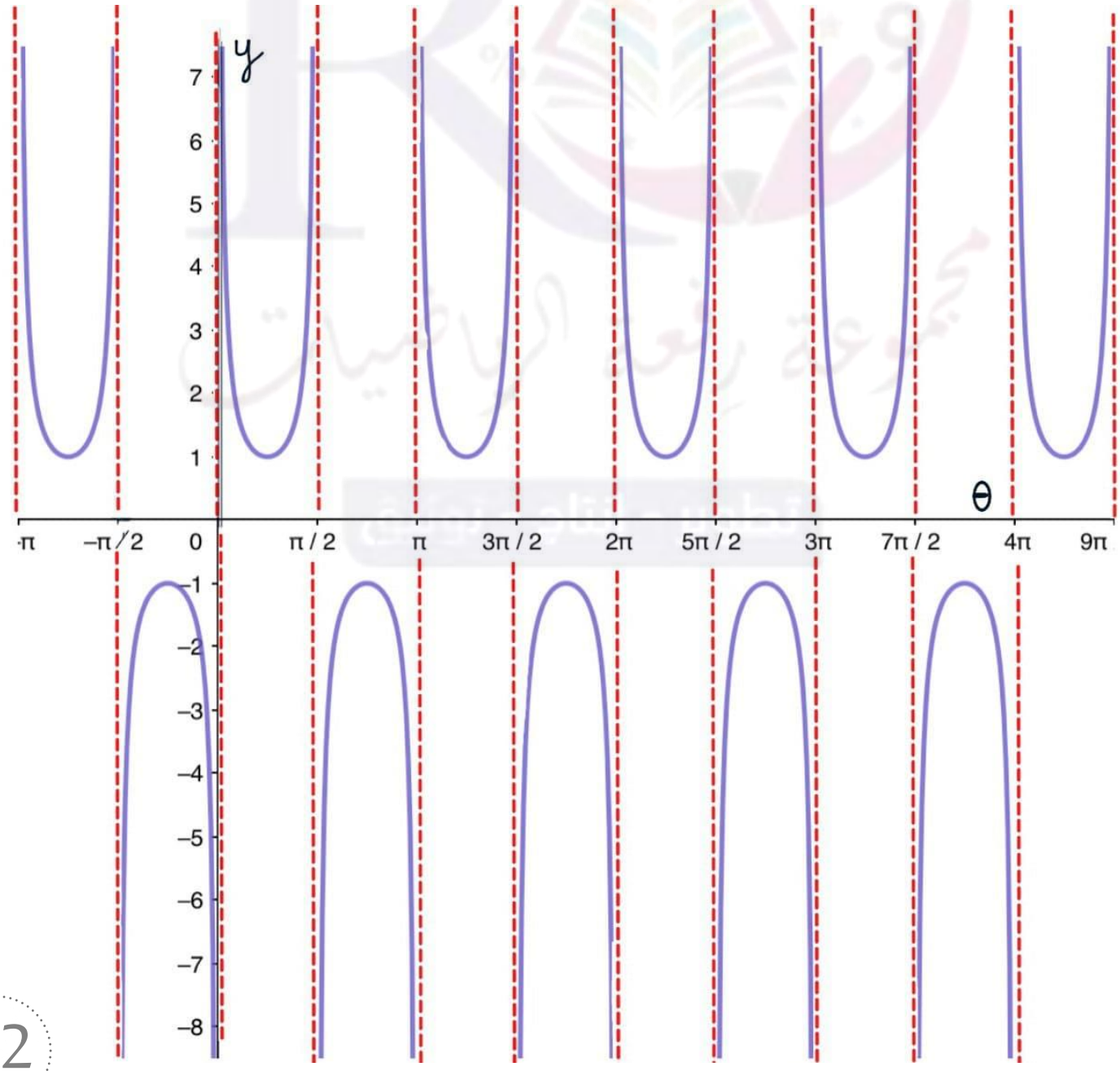
طول الدورة:	$\frac{180^\circ}{\lvert b\rvert} = \frac{180^\circ}{\lvert 1\rvert} = \frac{180^\circ}{1} = 180^\circ$			
خطوط التقارب	$\frac{180^\circ}{2\lvert b\rvert} = \frac{180^\circ}{2\lvert 1\rvert} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$ نرسم خطوط التقارب عند المضاعفات الفردية للزاوية نستعمل $y = \tan\theta$، ولكن نرسم دورة كاملة كل 180°			
	$-1 \cdot 90^\circ = -90^\circ$	$1 \cdot 90^\circ = 90^\circ$	$3 \cdot 90^\circ = 270^\circ$	$-3 \cdot 90^\circ = -270^\circ$



5 أوجد طول دورة الدالة $y = \csc 2\theta$. ثم مثّل الدالة بيانيّاً.

بما أن $\csc 2\theta$ هو مقلوب $\sin 2\theta$، فإن لكل من تمثيليهما البيانيين طول الدورة نفسه والذي يساوي:

طول الدورة:	$\frac{360^\circ}{|b|} = \frac{360^\circ}{|2|} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$
خطوط التقارب	نرسم خطوط التقارب الرأسية تكون عند $\sin 2\theta = 0$ أي توجد خطوط التقارب عند: $-360^\circ, -270^\circ, -180^\circ, -90^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$



أوجد قياس الزاوية بالدرجات وبالراديان في كل مما يأتي:

1A $\text{Cos}^{-1} 0$

نوجد الزاوية θ، حيث $0° \leq \theta \leq 180°$ والتي قيمة جيب التمام لها 0

الطريقة 1 : نستعمل دائرة الوحدة

نوجد نقطة على دائرة الوحدة إحداثيّها x هو 0

نلاحظ أن : $\cos \theta = 0$ ، عندما $\theta = 90°$

إذن : $\text{Cos}^{-1} 0 = \frac{\pi}{2} = 90°$

الطريقة 2 : نستعمل الآلة الحاسبة

المفاتيح : SHIFT + cos + 0

$\text{Cos}^{-1} 0 = \frac{\pi}{2} = 90°$

1B $\text{Sin}^{-1} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

نوجد الزاوية θ، حيث $-90° \leq \theta \leq 90°$ والتي قيمة الجيب لها $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

الطريقة 1 : نستعمل دائرة الوحدة

نوجد نقطة على دائرة الوحدة إحداثيّها y هو $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

نلاحظ أن: $\sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$، عندما $\theta = -45°$

إذن: $\text{Sin}^{-1} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4} = -45°$

الطريقة 2 : نستعمل الآلة الحاسبة

المفاتيح: SHIFT + sin (- √2 ÷ 2)

$\text{Sin}^{-1} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4} = -45°$

أوجد قيمة كل ممّا يأتي، إلى أقرب جزء من مئة:

2A $\sin\left(\text{Tan}^{-1}\frac{3}{8}\right)$

نستعمل الآلة الحاسبة.

المفاتيح : sin + SHIFT + tan (3 ÷ 8)

إذن : $\sin\left(\text{Tan}^{-1}\frac{3}{8}\right) \approx 0.35$

2B $\cos\left(\text{Cos}^{-1} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

نستعمل الآلة الحاسبة.

المفاتيح: cos + SHIFT + cos (- $\sqrt{2}$ ÷ 2)

إذن: $\cos\left(\text{Cos}^{-1} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx -0.71$

3 إذا كان Tan θ = 1.8 ، فإن قياس الزاوية θ بالدرجات يساوي :

A	0.03°	B	29.1°	C	60.9°	D	لا يوجد حل.

ظل الزاوية θ هو 1.8. ويمكن كتابة هذا على الصورة: $\theta = \tan^{-1} 1.8$

نستعمل الآلة الحاسبة.

المفاتيح: SHIFT + tan + 1.8 + =

إذن: $\theta \approx 60.9°$. الإجابة الصحيحة هي C.

4 **تزلج:** يظهر الشكل المجاور منحدراً للتزلج. اكتب دالة مثلثية عكسية يمكن استعمالها لإيجاد الزاوية (θ) التي يصنعها المنحدر مع سطح الأرض. ثم أوجد قياس هذه الزاوية بالدرجات إلى أقرب جزء من عشرة.

الحل:

بما أن طول الضلع المقابل وطول الضلع المجاور للزاوية θ معلومان، فيمكن استعمال دالة الظل.

$$\tan\theta = \frac{6}{10}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{6}{10}$$

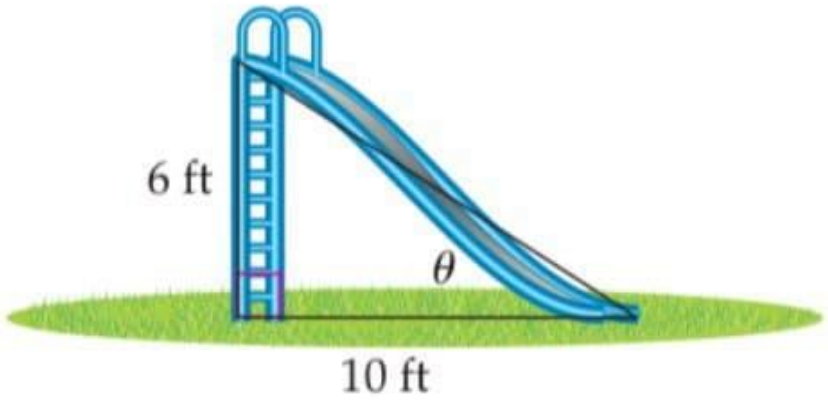
$$\theta = \tan^{-1}\frac{3}{5}$$

$$\theta \approx 31.0^\circ$$

إذن قياس الزاوية يساوي 31.0° تقريباً.

تحقق: باستعمال الآلة الحاسبة

$\frac{3}{5} \approx 0.600860619 \approx \tan 31.0^\circ$ أي أن الإجابة صحيحة.



المراجع

- دليل المعلم - رياضيات ٦
- كتاب الطالب - رياضيات ٦

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق