سلسلة حلول

تحقق من فهمك

رياضيات ٦

المؤلفين

أ . غادة الفضلي

أ . بندر بوقري

أ . حميدة الجدعاني

أ . هند العديني

ردمك

السادة / غادة محمد الفضلي ، بندر رأفت بوقري

نفيدكم علماً بأنه قد تم تسجيل عملكم الموسوم بـ :

سلسلة رفعة حلول تحقق من فهمك رياضيات 6

تحت رقم إيداع 1443/4832 و تاريخ 16/05/ 1443 هـ

و رقم ردمك 978-603-04-0189-5

السادة / غادة محمد الفضلي ، هند علي العديني ، حميدة صالح صويلح الجدعاني

نفيدكم علماً بأنه قد تم تسجيل عملكم الموسوم بـ :

سلسلة رفعة الرياضيات حلول تحقق من فهمك رياضيات 6

تحت رقم إيداع 1443/4831 و تاريخ 16/05/ 1443 هـ

و رقم ردمك 978-603-04-0188-8

مقدمة

الحمدلله و الصلاة والسلام على نبينا محمد و على آله و صحبه أجمعين

أما بعد :

نبذة عن مجموعة رفعة

هي مجموعة تدار من قبل معلمين و معلمات الرياضيات من جميع انحاء المملكة

و هي قائمة على التطوير المهني للمعلمين والمعلمات و ابتكار الأفكار الإبداعية للتعليم العام

و بهدف التيسير و التسهيل لمادة الرياضيات

و نشر العلم

نقدم لكم حلول لتحقق من فهمك لكتاب رياضيات 6

نسأل الله ان يجعله خالصاً لوجهه و أن تجدوا فيه الفائدة

حسابات مجموعة رفعة

تصميم الكتاب : أ. غادة الفضلي

الفهرس

الفصل الأول المتجهات

الفصل الثاني الإحداثيات القطبية و الاعداد المركبة

الفصل الثالث الإحتمال و الإحصاء

الفصل الرابع النهايات و الإشتقاق

الفصل الأول

المتجهات

مقدمة في المتجهات I-I

مثال 1 / تحقق من فهمك

حدد الكميات المتجهة، والكميات القياسية (العددية) في كل مما يأتي :

1A تسير سيارة بسرعة mi / 60h، وبزاوية 15° جهة الجنوب الشرقي. كمية متجهة

1B هبوط مظلي رأسياً إلى أسفل بسرعة 12.5 mi/h. كمية متجهة

1C طول قطعة مستقيمة 5cm . كمية قياسية

مثال 2 / تحقق من فهمك

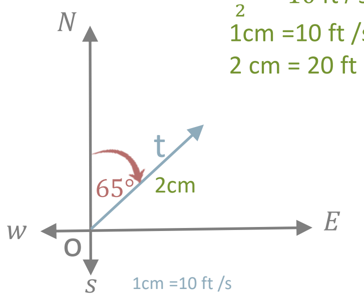
استعمل مسطرة ومنقلة لرسم متجه لكل من الكميات الآتية، واكتب مقياس الرسم في كل حالة:

2A اتجاه حقيقي

$\frac{20}{2} = 10$ ft / s

1cm =10 ft /s

2 cm = 20 ft / s

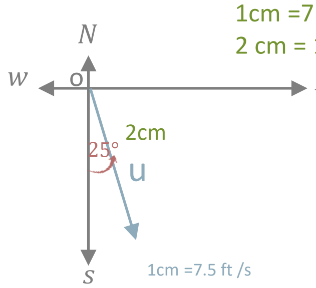


2B اتجاه ربعي

$\frac{15}{2} = 7.5$ ft / s

1cm =7.5 ft /s

2 cm = 15 ft / s

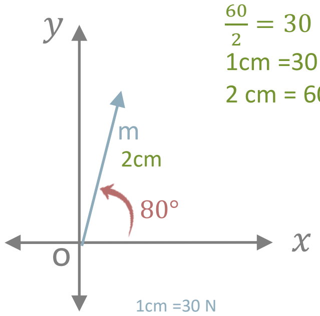


2C اتجاه أفقي

$\frac{60}{2} = 30$ N

1cm =30 N

2 cm = 60 N

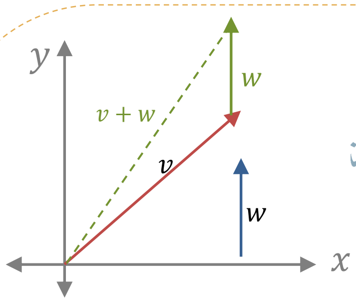


مثال 3 / تحقق من فهمك

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية مستعملا قاعدة المثلث، أو متوازي الأضلاع، ثم حدد اتجاهها بالنسبة للأفقي.

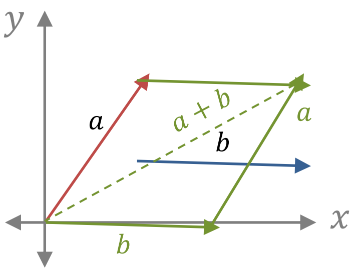
3A بإستعمال قاعدة المثلث

- نجري انسحاباً لأعلى للمتجه w بحيث تلتقي نقطة نهايته مع نقطة بداية المتجه v ثم نرسم متجه المحصلة v + w
- طول المحصلة يساوي 3cm .
- نقيس الزاوية بالنسبة للأفقي و تساوي 61°



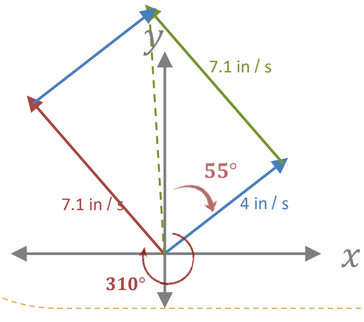
3B بإستعمال قاعدة متوازي الأضلاع

- نجري انسحاباً للمتجه b بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة بداية المتجه a ثم أكمل متوازي الأضلاع
- نرسم قطر متوازي الأضلاع و الذي يمثل طول المحصلة a + b و يساوي 3cm .
- نقيس زاوية اتجاه الأفقي = 25°



3C بإستعمال قاعدة متوازي الأضلاع

- طول المحصلة = 7.1 in/s
- اتجاه المحصلة = $360^\circ - 16 = 343^\circ$



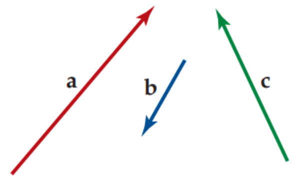
عودة إلى الفهرس

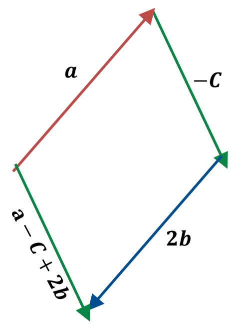
I-I مقدمة في المتجهات

مثال 4 / تحقق من فهمك

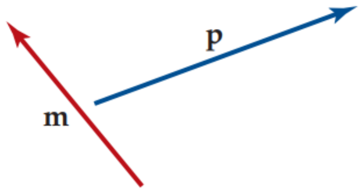
ارسم المتجه الذي يمثل كلاً مما يأتي :

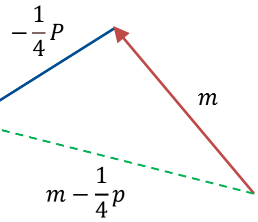
4A $a - c + 2b$





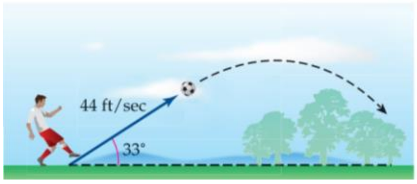
4B $m - \frac{1}{4}p$



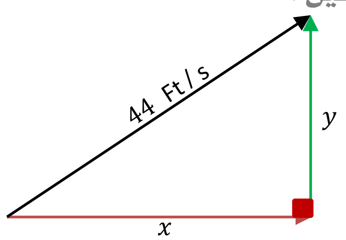


مثال 5 / تحقق من فهمك

يركل لاعب كرة قدم من سطح الأرض بسرعة مقدارها 44 ft /s ، وبزاوية قياسها 33° مع سطح الأرض كما في الشكل أدناه .



A ارسم شكلاً يوضح تحليل هذه السرعة إلى مركبتين متعامدتين .



B أوجد مقدار كل من المركبتين الأفقية والرأسية للسرعة .

$$\sin 33° = \frac{|y|}{44}$$
$$|y| = 44 \cdot \sin 33°$$
$$|y| = 23.96 \ \text{Ft / s}$$

$$\cos 33° = \frac{|x|}{44}$$
$$|x| = 44 \cdot \cos 33°$$
$$|x| = 36.9 \ \text{Ft / s}$$

عودة إلى الفهرس

I-2 المتجهات في المستوى الإحداثي

مثال 1 / تحقق من فهمك

أوجد الصورة الإحداثية لـِ $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطة بدايته و نهايته في كل مما يأتي :

1A A (-2 , -7) , B(6 , 1)

$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$

$= \langle 6+2 , 1+7 \rangle$

$= \langle 8 , 8 \rangle$

1B A (0 , 8) , B(-9 , -3)

$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$

$= \langle -9-0 , -3-8 \rangle$

$= \langle -9 , -11 \rangle$

مثال 2 / تحقق من فهمك

أوجد طول $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطة بدايته و نهايته في كل مما يأتي :

2A A (-2 , -7) , B(6 , 1)

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$= \sqrt{(6+2)^2 + (1+7)^2}$

$= \sqrt{8^2 + 8^2}$

$= \sqrt{64 + 64}$

$= \sqrt{128} \approx 11.3$

2B A (0 , 8) , B(-9 , -3)

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$= \sqrt{(-9-0)^2 + (-3-8)^2}$

$= \sqrt{(-9)^2 + (-11)^2}$

$= \sqrt{81 + 121}$

$= \sqrt{202} \approx 14.2$

مثال 3 / تحقق من فهمك

أوجد كل مما يأتي للمتجهات $a = \langle 2,5 \rangle, b = \langle -3,0 \rangle , c = \langle -4,1 \rangle$

3A $4c + b$

$= (4)\langle -4 , 1 \rangle + \langle -3,0 \rangle$

$= \langle -16 , 4 \rangle + \langle -3,0 \rangle$

$= \langle -16 + (-3), 4 + 0 \rangle$

$= \langle -16 - 3 , 4 + 0 \rangle$

$= \langle -19 , 4 \rangle$

3B $-3C$

$= (-3)\langle -4 , 1 \rangle$

$= \langle 12 , -3 \rangle$

3C $2c + 4a - b$

$= (2)\langle -4 , 1 \rangle + (4)\langle 2 , 5 \rangle - \langle -3,0 \rangle$

$= \langle -8 , 2 \rangle + \langle 8 , 20 \rangle - \langle -3,0 \rangle$

$= \langle -8 + 8 - (-3) , 2 + 20 - 0 \rangle$

$= \langle 3 , 22 \rangle$

عودة إلى الفهرس

I-2 المتجهات في المستوى الإحداثي

مثال 4 / تحقق من فهمك

أوجد متجه الوحدة الذي له نفس اتجاه المتجه المعطى في كل مما يأتي :

4A $w = \langle 6, -2 \rangle$

$$u = \frac{1}{|w|} w$$

$$= \frac{1}{|\langle 6 ,-2 \rangle|} \langle 6, -2 \rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(6)^2+(-2)^2}} \langle 6, -2 \rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{36+4}} \langle 6, -2 \rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{40}} \langle 6, -2 \rangle = \frac{1}{2\sqrt{10}} \langle 6, -2 \rangle$$

$$= \left\langle \frac{6}{2\sqrt{10}}, \frac{-2}{2\sqrt{10}} \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{6}{2\sqrt{10}}, \frac{-2}{2\sqrt{10}} \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{-\sqrt{10}}{10} \right\rangle$$

4B $x = \langle -4, -8 \rangle$

$$u = \frac{1}{|x|} x$$

$$= \frac{1}{|\langle -4 ,-8 \rangle|} \langle -4, -8 \rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(-4)^2+(-8)^2}} \langle -4, -8 \rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{16+64}} \langle -4, -8 \rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{80}} \langle -4, -8 \rangle = \frac{1}{4\sqrt{5}} \langle -4, -8 \rangle$$

$$= \left\langle \frac{-4}{4\sqrt{5}}, \frac{-8}{4\sqrt{5}} \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{-\sqrt{5}}{5}, \frac{-2\sqrt{5}}{5} \right\rangle$$

مثال 5/ تحقق من فهمك

أوجد المتجه $\overrightarrow{DE}$ المعطى نقطتا بدايته و نهايته على صورة توافق خطي لمتجهي الوحدة i , j في كل مما يأتي :

5A $D(6 ,0) \ ,E(2 ,5)$

كتابة الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{DE}$

$$\overrightarrow{DE} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$$

$$= \langle 2 - 6 , 5 - 0 \rangle$$

$$= \langle -4 , 5 \rangle$$

إعادة كتابة المتجه على صورة توافق خطي لمتجه واحد

$$\overrightarrow{DE} = \langle 5 , 8 \rangle$$

$$= 8i + 5j$$

5B $D(-3 ,-8) \ ,E(7 ,1)$

كتابة الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{DE}$

$$\overrightarrow{DE} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$$

$$= \langle 7 + 3 , 1 + 8 \rangle$$

$$= \langle 10 , 9 \rangle$$

إعادة كتابة المتجه على صورة توافق خطي لمتجه واحد

$$\overrightarrow{DE} = \langle 10 , 9 \rangle$$

$$= 10i + 9j$$

عودة إلى الفهرس

2-1 المتجهات في المستوى الإحداثي

مثال 6 / تحقق من فهمك

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه v المعطى طوله و زاوية اتجاهه مع الأفقي ، في كل مما يأتي :

5A $|v| = 8, \theta = 45°$

$v = \langle |v| \cos\theta , |v| \sin\theta \rangle$

$= \langle |8| \cos 45° , |8| \sin 45° \rangle$

$= \left\langle (8)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ (8)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right\rangle$

$= \langle 4\sqrt{2} , 4\sqrt{2} \rangle$

5B $|v| = 24, \theta = 210°$

$v = \langle |v| \cos\theta , |v| \sin\theta \rangle$

$= \langle |24| \cos 210° , |24| \sin 210° \rangle$

$= \left\langle (24)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ (24)\left(-\frac{1}{2}\right) \right\rangle$

$= \langle -12\sqrt{3} , -12 \rangle$

مثال 7/ تحقق من فهمك

أوجد زاوية اتجاه كل من المتجهين الآتيين مع الاتجاه الموجب لمحور x

7A $-6i + 2j$

$a = -6 , \quad b = 2$

$\tan\theta = \frac{b}{a}$

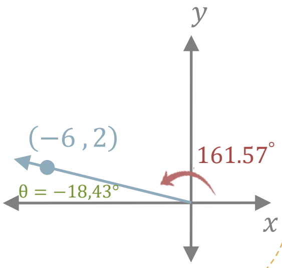
$\tan\theta = \frac{2}{-6}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{-6}\right)$

$= -18,43°$

$\theta = 180 - 18,43$

$= 161.57°$



7B $\langle -3, -8 \rangle$

$a = -3 , \quad b = -8$

$\tan\theta = \frac{b}{a}$

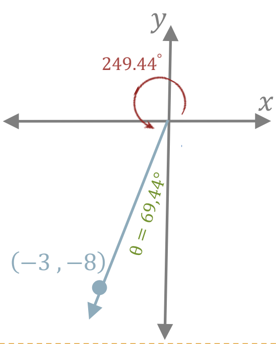
$\tan\theta = \frac{-8}{-3} = \frac{8}{3}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{8}{3}\right)$

$= 69.44°$

$\theta = 180 + 69.44$

$= 249.44°$

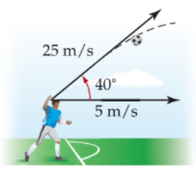


مثال 8/ تحقق من فهمك

اوجد محصلة السرعة و اتجاه الحركة للكرة إذا تحرك اللاعب للأمام بسرعة $7\ m/s$

8

- بما ان اللاعب يتحرك للأمام و بشكل مستقيم فإن الصورة الإحداثية لمتجه سرعة اللاعب $v_1 = \langle 7,0 \rangle$ و تكون الصورة الإحداثية لمتجه سرعة الكرة v_2 هي :



$v_2 = \langle |v_2| \cos\theta , |v_2| \sin\theta \rangle$

$= \langle |25| \cos 40 , |25| \sin 40 \rangle$

$= \langle 25 \cos 40 , 25 \sin 40 \rangle$

$v_2 = \langle 19.2 , 16.1 \rangle$

- نجمع المتجهين $v_1 + v_2$ لنجد متجه السرعة r :

$r = v_1 + v_2$

$= \langle 7,0 \rangle + \langle 19.2 , 16 \cdot 1 \rangle$

$= \langle 26.2 , 16 \cdot 1 \rangle$

- نوجد طول متجه المحصلة :

$|r| = \sqrt{(26 \cdot 2)^2 + (16)^2}$

$= 30.7\ m/s$

- وتكون زاوية اتجاه المحصلة مع الأفقي هي :

$\tan\theta = \frac{16}{26.2}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{16}{26.2}\right)$

$\theta = 31.4°$

أي ان محصلة سرعة الكرة هي $30\ m/s$ تقريباً ، وتصنع زاوية قياسها $31.4°$ مع الأفقي تقريباً .

عودة إلى الفهرس

I-3 الضرب الداخلي

مثال 1 / تحقق من فهمك

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين u,v ، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين .

1A $u = \langle 3, -2\rangle, v = \langle -5, 1\rangle$

$$u \cdot v = 3(-5) + (-2)(1)$$
$$= -15 - 2$$
$$= -17$$

بما ان $u \cdot v \neq 0$ ، فإن u,v ليسا متعامدين

1B $u = \langle -2, -3\rangle, v = \langle 9, -6\rangle$

$$u \cdot v = -2(9) + (-3)(-6)$$
$$= -18 + 18$$
$$= 0$$

بما ان $u \cdot v = 0$ ، فإن u,v متعامدين .

مثال 2 / تحقق من فهمك

استعمل الضرب الداخلي ، لايجاد طول كل من المتجهات التالية :

2A $b = \langle 12, 16\rangle$

بما ان $|b|^2 = b \cdot b$

فإن $|b| = \sqrt{b \cdot b}$

$$|\langle 12, 16\rangle| = \sqrt{\langle 12,16\rangle \cdot \langle 12,16\rangle}$$
$$= \sqrt{(12)^2 \cdot (16)^2}$$
$$= \sqrt{144 + 256}$$
$$= 20$$

2B $c = \langle -1, -7\rangle$

بما ان $|c|^2 = c \cdot c$

فإن $|c| = \sqrt{c \cdot c}$

$$|\langle -1, -7\rangle| = \sqrt{\langle -1, -7\rangle \cdot \langle -1, -7\rangle}$$
$$= \sqrt{(-1)^2 \cdot (-7)^2}$$
$$= \sqrt{1 + 49}$$
$$= \sqrt{50} \quad = 5\sqrt{2} \quad \approx 7.07$$

مثال 3 / تحقق من فهمك

أوجد قياس زاوية θ بين المتجهين u,v ، في كل مما يأتي :

3A $u = \langle -5, -2\rangle, \ v = \langle 4, 4\rangle$

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{|u||v|}$$
$$\cos\theta = \frac{\langle -5,-2\rangle \cdot \langle 4,4\rangle}{|\langle -5,-2\rangle||\langle 4,4\rangle|}$$

$$|\langle 4,4\rangle| = \sqrt{(4)^2 + (4)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$$

$$|\langle -5,-2\rangle| = \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$$

$$\cos\theta = \frac{-5(4) + (-2)(4)}{\sqrt{29}\sqrt{32}}$$
$$\cos\theta = \frac{-28}{4\sqrt{58}}$$
$$\theta = \cos^{-1}\frac{-28}{4\sqrt{58}}$$
$$\theta \approx 156.80^\circ$$

3B $u = \langle 9, 5\rangle, \ v = \langle -6, 7\rangle$

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{|u||v|}$$
$$\cos\theta = \frac{\langle 9,5\rangle \cdot \langle -6,7\rangle}{|\langle 9,5\rangle||\langle -6,7\rangle|}$$

$$|\langle -6,7\rangle| = \sqrt{(-6)^2 + (7)^2} = \sqrt{36+49} = \sqrt{85}$$

$$|\langle 9,5\rangle| = \sqrt{(9)^2 + (5)^2} = \sqrt{81+25} = \sqrt{106}$$

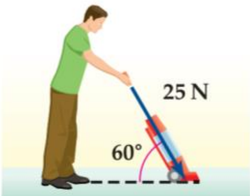
$$\cos\theta = \frac{9(-6) + (5)(7)}{\sqrt{106}\sqrt{85}}$$
$$\cos\theta = \frac{-54+35}{94.92}$$
$$\cos\theta = \frac{-19}{94.92}$$
$$\theta = \cos^{-1}\frac{-19}{94.92}$$
$$\theta \approx 101.54^\circ$$

عودة إلى الفهرس

I-3 الضرب الداخلي

مثال 4 / تحقق من فهمك

4 تنظيف : يدفع إبراهيم مكنسة كهربائية بقوه مقدارها 25N ، إذا كان قياس الزاوية بين ذراع المكنسة و سطح الأرض 60° ، فأوجد الشغل بالجول الذي بذله إبراهيم عند تحريك المكنسة مسافة 6m .



استعمل قاعدة الضرب الداخلي للشغل .
الصورة الإحداثية للقوه المتجهه F بدلالة مقدار القوة .
و زاوية الإتجاه هي

$$F = \langle 25\cos(-60) , 25\ \sin(-60)\rangle$$

الصورة الإحداثية لمتجه $\overrightarrow{AB}$ المسافة هي $\langle 6,0\rangle$

$$w = F \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$w = \langle 25\cos(-60) , 25\ \sin(-60)\rangle \cdot \langle 6,0\rangle$$

$$= \langle 12.5\ , -21.65\rangle \cdot \langle 6,0\rangle$$

$$= 12.5(6) + (-21.65)(0)$$

$$= 75 + 0$$

$$= 75\ J$$

أي أن إبراهيم يبذل $75\ J$ من الشغل لدفع المكنسة .

عودة إلى الفهرس

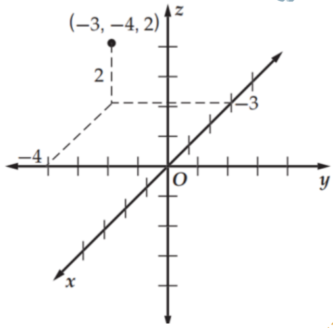
I-4 المتجهات في الفضاء الثلاثي الابعاد

مثال 1 / تحقق من فهمك

عين كل من النقاط الآتيه ، في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد :

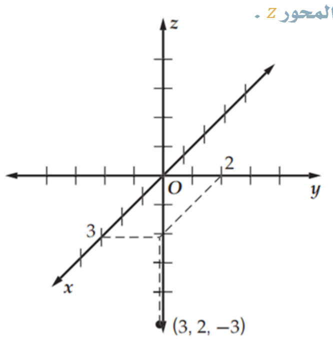
1A $(-3, -4, 2)$

عين النقطة $(-3, -4)$ في المستوى xy بوضع إشارة مناسبة ، ثم ضع نقطة على بعد وحدتين أعلى الإشارة التي وضعتها ، وبموازاة المحور z.



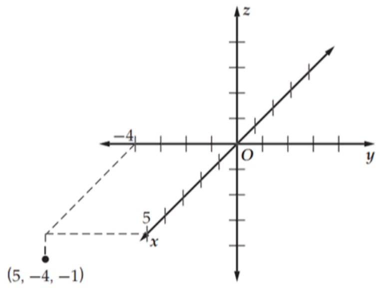
1B $(3, 2, -3)$

عين النقطة $(3,2)$ في المستوى xy بوضع إشارة مناسبة ، ثم ضع نقطة على بعد ثلاث وحدات أسفل الإشارة التي وضعتها ، وبموازاة المحور z.



1C $(5, -4, -1)$

عين النقطة $(5, -4)$ في المستوى xy بوضع إشارة مناسبة ، ثم ضع نقطة على بعد وحدة واحدة أسفل الإشارة التي وضعتها ، وبموازاة المحور z.



مثال 2 / تحقق من فهمك

طيران : تفرض أنظمة السلامة ألا تقل المسافة بين الطائرات عن 5.0mi في أثناء طيرانها، إذا علمت أن طائرتين تطيران فوق إحدى المناطق و في لحظة معينة كانت إحداثيات موقعي الطائرتين (300 , 150 , 30000) , (450 , -250 , 28000) مع العلم بأن الإحداثيات معطاة بالأقدام ، فأجب عما يأتي :

A هل تخالف الطائرتان أنظمة السلامة .

نوجد المسافة (البعد) بين الطائرتين AB :

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$= \sqrt{(450 - 300)^2 + (-250 - 150)^2 + (28000 - 30000)^2}$$

$$= \sqrt{(150)^2 + (-400)^2 + (-2000)^2}$$

$$= 2045{,}116$$

نعم ، تبعد الطائرتان عن بعضهما حوالي 2045 قدماً و هذه المسافة أقل من المسافة المسموح بها وهي نصف ميل تقريباً (2640) قدم .

B إذا أطلقت ألعاب نارية ، و انفجرت في منتصف المسافة بين الطائرتين ، فما احداثيات نقطة الإنفجار .

نوجد احداثيات نقطة المنتصف للمسافة بين الطائرتين لإيجاد نقطة الإنفجار :

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{300 + 450}{2}, \frac{150 - 250}{2}, \frac{30000 + 28000}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{750}{2}, \frac{-100}{2}, \frac{58000}{2}\right)$$

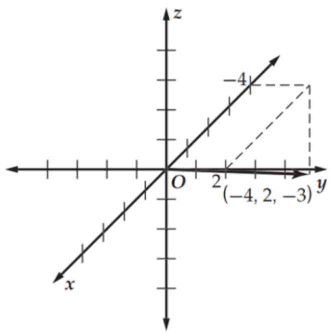
$$= (375, -50, 29000)$$

أي ان احداثيات نقطة الإنفجار هي $(375, -50, 29000)$

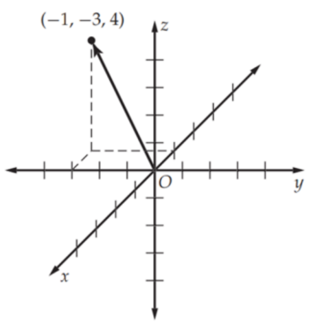
مثال 3 / تحقق من فهمك

مثل بيانياً كل من المتجهين الآتيين في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد :

3A $u = \langle -4, 2, -3 \rangle$



3B $w = -i - 3j + 4k$



عودة إلى الفهرس

I-4 المتجهات في الفضاء الثلاثي الابعاد

مثال4/ تحقق من فهمك

أوجد كلاً مما يأتي للمتجهات $y = \langle 3, -6, 2\rangle$,$w = \langle -1,4,-4\rangle$,$z = \langle -2,0,5\rangle$

4A $4w - 8z$

$= 4\langle -1,4,-4\rangle - 8\langle -2,0,5\rangle$

$= \langle -4,16,-16\rangle - \langle -16,0,40\rangle$

$= \langle -4-(-16), 16-0, -16-(40)\rangle$

$= \langle 12, 16, -56\rangle$

4B $3y + 3z - 6w$

$= 3\langle 3,-6,2\rangle + 3\langle -2,0,5\rangle - 6\langle -1,4,-4\rangle$

$= \langle 9,-18,6\rangle + \langle -6,0,15\rangle - \langle -6,24,-24\rangle$

$= \langle 9+(-6)-(-6), -18+0-24, 6+15-(-24)\rangle$

$= \langle 9,-42,45\rangle$

مثال 5 / تحقق من فهمك

أوجد الصورة الإحداثية ، و طول $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته و نهايته ، ثم أوجد متجه الوحدة بإتجاه $\overrightarrow{AB}$ في كل مما يأتي :

5A $A(-2,-5,-5), B(-1,4,-2)$

الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{AB}$:

$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\rangle$

$= \langle -1-(-2), 4-(-5), -2-(-5)\rangle$

$= \langle 1,9,3\rangle$

طول $\overrightarrow{AB}$:

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(1)^2 + (9)^2 + (3)^2}$

$= \sqrt{1+81+9}$

$= \sqrt{91}$

متجه الوحدة u بإتجاه $\overrightarrow{AB}$:

$$u = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$$

$$= \left\langle \frac{1}{\sqrt{91}}, \frac{9}{\sqrt{91}}, \frac{3}{\sqrt{91}}\right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{\sqrt{91}}{91}, \frac{9\sqrt{91}}{91}, \frac{3\sqrt{91}}{91}\right\rangle$$

5B $A(-1,4,6), B(3,3,8)$

الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{AB}$:

$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\rangle$

$= \langle 3+1, 3-4, 8-6\rangle$

$= \langle 4,-1,2\rangle$

طول $\overrightarrow{AB}$:

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(4)^2 + (-1)^2 + (2)^2}$

$= \sqrt{16+1+4}$

$= \sqrt{21}$

متجه الوحدة u بإتجاه $\overrightarrow{AB}$:

$$u = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$$

$$= \left\langle \frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{-1}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}}\right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{4\sqrt{21}}{21}, \frac{-\sqrt{21}}{21}, \frac{2\sqrt{21}}{21}\right\rangle$$

عودة إلى الفهرس

I-5 الضرب الداخلي و الضرب الإتجاهي للمتجهات في الفضاء

مثال 1 / تحقق من فهمك

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين u,v في كل مما يأتي ، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين .

1A $u = \langle 3, -5, 4\rangle, v = \langle 5, 7, 5\rangle$

$u \cdot v = 3(5) + (-5)(7) + 4(5)$

$= 15 - 35 + 20$

$= 0$

بما ان $u \cdot v = 0$ ، فإن u,v متعامدين .

1B $u = \langle 4, -2, -3\rangle, v = \langle 1, 3, -2\rangle$

$u \cdot v = 4(1) + (-2)(3) + (-3)(-2)$

$= 4 - 6 + 6$

$= 4$

بما ان $u \cdot v \neq 0$ ، فإن u,v متعامدين .

مثال 2 / تحقق من فهمك

2 أوجد قياس الزاوية بين المتجهين $u = -4i + 2j + k$, $v = 4i + 3k$ إلى أقرب منزلة عشرية .

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{|u||v|}$$

$$\cos\theta = \frac{\langle -4, 2, 1\rangle \cdot \langle 4, 0, 3\rangle}{|\langle -4, 2, 1\rangle||\langle 4, 0, 3\rangle|}$$

$|\langle -4, 2, 1\rangle| = \sqrt{(-4)^2 + (2)^2 + (1)^2}$

$= \sqrt{16 + 4 + 1}$

$= \sqrt{21}$

$|\langle 4, 0, 3\rangle| = \sqrt{(4)^2 + (0)^2 + (3)^2}$

$= \sqrt{16 + 0 + 9}$

$= \sqrt{25} = 5$

$$\cos\theta = \frac{-4(4) + (2)(0) + 1(3)}{\sqrt{21}\,(5)}$$

$$\cos\theta = \frac{-16 + 0 + 3}{5\sqrt{21}}$$

$$\cos\theta = \frac{-13}{5\sqrt{21}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{-13}{5\sqrt{21}}$$

$$\theta \approx 124.6^\circ$$

مثال 3 / تحقق من فهمك

أوجد حاصل الضرب الإتجاهي للمتجهين u,v في كل مما يأتي ، ثم بين ان $u \times v$ يعامد كلاً من u,v

3A $u = \langle 4, 2, -1\rangle, v = \langle 5, 1, 4\rangle$

$$u \cdot v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} k$$

$= [2(4) - (-1)]i - [4(4) - (-1)(5)]j + [4(1) - 2(5)]k$

$= 9i - 21j - 6k$

$= \langle 9, -21, -6\rangle$

لإثبات أن $u \times v$ يعامد كل من u,v نوجد الضرب الداخلي لـ u مع كل من u,v $\times v$

$\langle 9, -21, -6\rangle \cdot u$

$= \langle 9, -21, -6\rangle \cdot \langle 4, 2, -1\rangle$

$= 9(4) + (-21)(2) + (-6)(-1)$

$= 36 - 42 + 6$

$= -6 + 6$

$= 0$ بما ان $u \times v = 0$ ، فإن $u \times v$ يعامد المتجه u .

$\langle 9, -21, -6\rangle \cdot v$

$= \langle 9, -21, -6\rangle \cdot \langle 5, 1, 4\rangle$

$= 9(5) + (-21)(1) + (-6)(4)$

$= 45 - 21 - 24$

$= 24 - 24$

$= 0$ بما ان $u \times v = 0$ ، فإن $u \times v$ يعامد المتجه u .

بما ان ناتج الضرب الداخلي في الحالتين يساوي صفراً ، فإن $u \times v$ عمودي على كل من المتجهين u,v.

عودة إلى الفهرس

I-5 الضرب الداخلي و الضرب الإتجاهي للمتجهات في الفضاء

مثال 3 / تحقق من فهمك

أوجد حاصل الضرب الإتجاهي للمتجهين u,v في كل مما يأتي ، ثم بين ان $u \times v$ يعامد كلاً من u,v

3B

$$u = \langle -2 , -1 , -3 \rangle, v = \langle 5 , 1 , 4 \rangle$$

$$u \cdot v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -1 & -3 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} k$$

$$= [-1(4) - (-3)(1)]i - [(-2)(4) - (-3)(5)]j + [(-2)(1) - (-1)(5)]k$$

$$= -i - 7j + 3k$$

$$= \langle -1, -7 , 3 \rangle$$

لإثبات أن $u \times v$ يعامد كل من u,v نوجد الضرب الداخلي لـ u $\times v$ مع كل من u,v

$$\langle -1, -7, 3 \rangle \cdot u$$
$$= \langle -1, -7, 3 \rangle \cdot \langle -2 , -1 , -3 \rangle$$
$$= -1(-2) + (-7)(-1) + (3)(-3)$$
$$= 2 + 7 - 9$$
$$= 9 - 9$$
$$= 0$$

بما ان $u \times v = 0$ ، فإن $u \times v$ يعامد المتجه u .

$$\langle -1, -7, 3 \rangle \cdot v$$
$$= \langle 9, -21, -6 \rangle \cdot \langle 5 , 1 , 4 \rangle$$
$$= -1(5) + (-7)(1) + (3)(4)$$
$$= -5 - 7 + 12$$
$$= -12 + 12$$
$$= 0$$

بما ان $u \times v = 0$ ، فإن $u \times v$ يعامد المتجه u .

بما ان ناتج الضرب الداخلي في الحالتين يساوي صفراً ، فإن $u \times v$ عمودي على كل من المتجهين u,v.

مثال4/ تحقق من فهمك

اوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه : $u = -6i - 2j + 3k$ ، $v = 4i + 3j + k$ ضلعان متجاوران .

4

$$u \cdot v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -6 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} k$$

$$= [-2(1) - (3)(3)]i - [(-6)(1) - (3)(4)]j + [(-6)(3) - (-2)(4)]k$$

$$= -11i + 18j - 10k$$

$$|u \cdot v| = \sqrt{(-11)^2 + (18)^2 + (-10)^2}$$

$$= \sqrt{545} \approx 23.34$$ وحدة مربعة

مثال5/ تحقق من فهمك

اوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه $t = 2j - 5k, u = -6i - 2j + 3k, v = 4i + 3j + k$ أحرف متجاورة .

5

$$t \cdot (u \cdot v) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -5 \\ -6 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} (0) - \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} (2) + \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} (-5)$$

$$= ((-2) - 9)(0) - ((-6)(1) - 3(4))(2) + ((-6)(3) - (-2)(4))(-5)$$

$$= -11(0) - (-18)(2) + (-18 + 8)(-5)$$

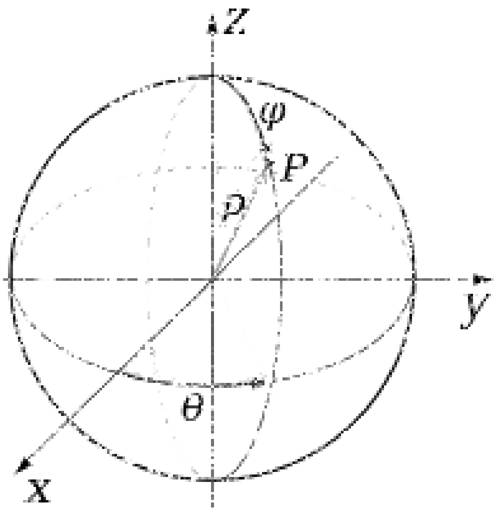
$$= 0 + 36 + 50$$

$$= 86$$ وحدة مكعبة

عودة إلى الفهرس

الفصل الثاني

الإحداثيات القطبية و الاعداد المركبة



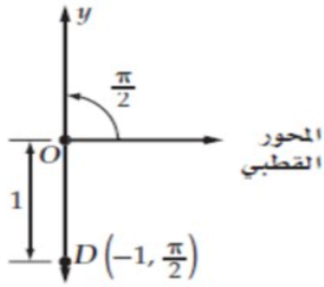
2-1 الإحداثيات القطبية

مثال1 / تحقق من فهمك مثل كل نقطة من النقاط الآتية :

1A $D\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$

نرسم ضلع الإنتهاء للزاوية $\frac{\pi}{2}$

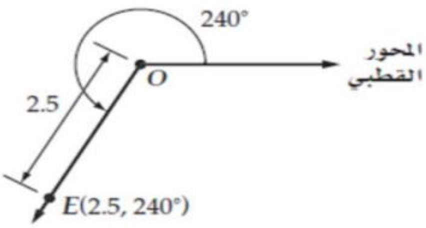
نعين النقطة D تبعد القطب وحدة واحدة



1B $E(2.5,240°)$

نرسم ضلع الإنتهاء للزاوية 240°

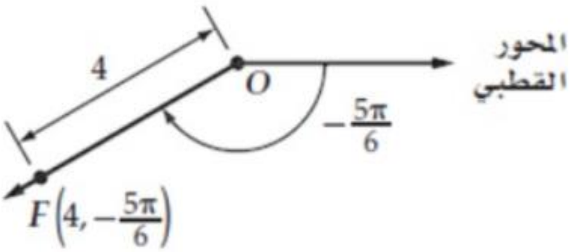
نعين النقطة D تبعد وحدتان ونصف



1C $F\left(4,-\frac{5\pi}{6}\right)$

نرسم ضلع الإنتهاء للزاوية $-\frac{5\pi}{6}$

نعين النقطة D التي تبعد عن القطب أربع وحدات

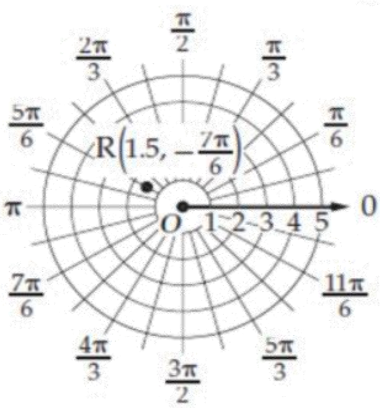


مثال2 / تحقق من فهمك مثل كلًا من النقاط الآتية في المستوى القطبي :

2A $R\left(1.5,-\frac{7\pi}{6}\right)$

نرسم ضلع الإنتهاء للزاوية $2\pi-\frac{7\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$

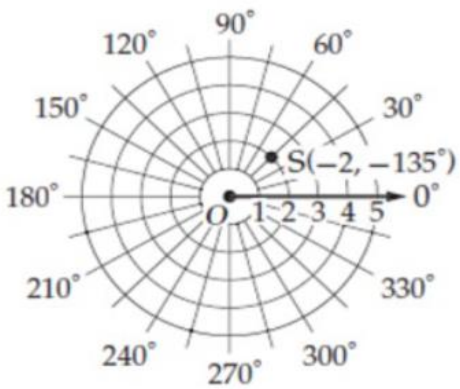
نعين النقطة R تبعد عن القطب ثلاث وحدات .



2B $S(-2,-135°)$

نرسم ضلع الإنتهاء للزاوية $360° - 135° = 225°°$

نعين النقطة S تبعد عن القطب 3.5 وحدات .



عودة إلى الفهرس

2-1 الإحداثيات القطبية

مثال3 / تحقق من فهمك

أوجد ثلاثة أزواج مختلفة كل منها يمثل إحداثيين قطبيين للنقطة المعطاة، علماً بأن $2\pi \le \theta \le 2\pi$ أو $360° \le \theta° \le 360°$:

3A $(5,240°)$

$(5\,,240°) = (5,240° - 360°)$

$(5,-120°)$

$(5\,,240°) = (-5,240° - 180°)$

$(-5,60°)$

$(5\,,240°) = (-5\,,240° - 3(180°))$

$(-5,-300°)$

3B $\left(-2,\frac{\pi}{6}\right)$

$\left(-2,\frac{\pi}{6}\right) = \left(-2,\frac{\pi}{6} - 2\pi\right)$

$\left(-2,-\frac{11\pi}{6}\right)$

$\left(-2,\frac{\pi}{6}\right) = \left(+2,\frac{\pi}{6} - \pi\right)$

$\left(+2,-\frac{5\pi}{6}\right)$

$\left(-2,\frac{\pi}{6}\right) = \left(+2,\frac{\pi}{6} + \pi\right)$

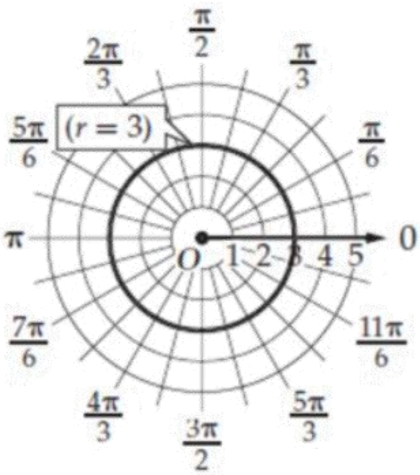
$\left(+2,\frac{7\pi}{6}\right)$

مثال4/ تحقق من فهمك

مثل كل معادلة من المعادلات القطبية الآتية بيانيا :

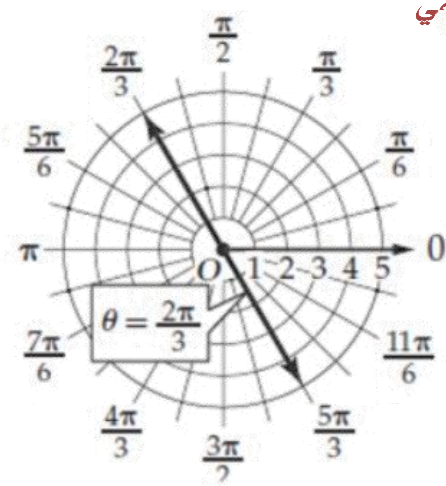
4A $r = 3$

المنحنى هو دائرة مركزها نقطة الأصل القطب و طول نصف قطرها 3



4B $\theta = \frac{2\pi}{3}$

التمثيل البياني جميع النقاط الواقعة على المستقيم الذي يصنع الزاوية مع المحور الافقي



عودة إلى الفهرس

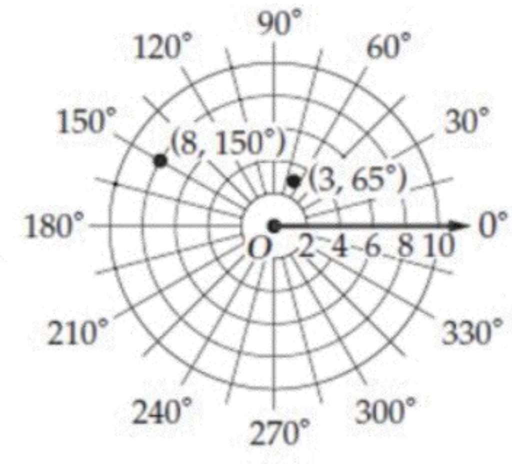
الإحداثيات القطبية 2-1

مثال5 / تحقق من فهمك

قوارب: يرصُد رادار حركة قاربين، إذا كانت إحداثيات موقع القاربين بالأميال r . حيث (3 ,65°),(8 ,150°)

5A مثل هذا الموقف في المستوى القطبي

يقع القارب الأول على بعد 3 ميل من القطب و على ضلع الانتهاء لزاوية قياسها 65° و القارب الثاني على 8 من القطب و على ضلع انتهاء لزاوية قياسها 150°



5B ما المسافة بين القاربين

$$\sqrt{3^2 + 8^2 - 2(3)(8)\cos(150 - 65)}$$

$$= 8.30 \text{ mil}$$

عودة إلى الفهرس

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

2-2 الصورة القطبية و الصورة الديكارتية للمعادلات

مثال1 / تحقق من فهمك حول الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية ، لكل نقطة مما يأتي :

1A $(-6,120°)$

$x = rcos\theta \,,\, x = -6cos120 \,,\, x = 3$

$y = rsin\theta \,,\, y = -6sin120 \,,\, y = 3\sqrt{3}$

$(3,3\sqrt{3})$ أو $(3,5.20)$ **تقريبا**

1B $S\left(5,\frac{\pi}{3}\right)$

$x = rcos\theta \,,\, x = 5cos\frac{\pi}{3} \,,\, x = 2.5$

$y = rsin\theta \,,\, y = 5sin\frac{\pi}{3} \,,\, y = 2.5\sqrt{3}$

$(2.5, 2.5\sqrt{3})$ أو $(2.5, 4.33)$ **تقريبا**

1C $T(-3 ، 45°)$

$x = rcos\theta \,,\, x = -3cos45 \,,\, x = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$y = rsin\theta \,,\, y = -3sin45 \,,\, y = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ أو $(-2.1 \,,\, -2.1)$ **تقريبا**

مثال2 / تحقق من فهمك أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيات الديكارتية في كل مما يأتي :

2A $V(8 ، 10)$

$r = \sqrt{x^2+y^2} \,,\, r = \sqrt{8^2+10^2} = 12.8$

$\theta = tan^{-1}\frac{y}{x} \,,\, \theta = tan^{-1}\frac{10}{8} = 4.04$

$(12.8 \,,\, 0.90)$ **تقريبا**

زوج آخر $\left(12.8, \tan^{-1}\left(\frac{10}{8}\right) + \pi\right)$

$(12.8, 4.04)$ **تقريبا**

2B $W(-9 \,,\, -4)$

$r = \sqrt{x^2+y^2} \,,\, r = \sqrt{(-9)^2+(-4)^2} = -9.85$

$\theta = tan^{-1}\frac{y}{x} + 180 \,,\, \theta = tan^{-1}\frac{-4}{-9} + \pi = 6.70$

$(-9.85 \,,\, 6.70)$ **تقريبا** ، $(9.85 \,,\, 3.56)$ **تقريبا**

عودة إلى الفهرس

2-2 الصورة القطبية و الصورة الديكارتية للمعادلات

مثال3 / تحقق من فهمك

صيد الأسماك: يُستعمل جهاز رصد؛ لتحديد موقع وجود الأسماك تحت الماء. افترض أن قاربا يتجه إلى الشرق، وأن جهاز الرصد قد رصد سربا من الأسماك عند النقطة

3A ما الإحداثيات الديكارتية لموقع سرب الأسماك

$$x = r\cos\theta \,,\, x = 6\cos 125 \,,\, x = -3.44$$

$$y = r\sin\theta \,,\, y = 6\sin 125 \,,\, y = 4.91$$

تقريبا $(-3.44 \,, 4.91)$

3B إذا كان موقع سرب الأسماك قد رُصد سابقاً عند النقطة التي إحداثياتها الديكارتية $(-2 \,, 6)$، فما الإحداثيات القطبية لموقع السرب .

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \,,\, r = \sqrt{(-2)^2 + 6^2} = 6.32$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} + 180 \,,\, \theta = \tan^{-1}\frac{6}{-2} + 180 = 108°$$

تقريبا $(6.32 \,, 108°)$

مثال 4 / تحقق من فهمك

حل كل معادلة مما يأتي على الصورة القطبية:

4A $X^2 + (y-3)^2 = 9$

$$(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta - 3)^2 = 9$$

$$r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta - 6r\sin\theta + 9 = 9$$

$$r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta - 6r\sin\theta = 0$$

$$r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = 6r\sin\theta$$

$$r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 6r\sin\theta$$

$$r^2(1) = 6r\sin\theta$$

$$r = 6\sin\theta$$

4B $x^2 - y^2 = 1$

$$(r\cos\theta)^2 - (r\sin\theta)^2 = 1$$

$$r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta = 1$$

$$r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 1$$

$$r^2\cos 2\theta = 1$$

$$r^2\frac{\cos 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{1}{\cos 2\theta}$$

$$r^2 = \sec 2\theta$$

عودة إلى الفهرس

2-2 الصورة القطبية و الصورة الديكارتية للمعادلات

مثال5 / تحقق من فهمك

اكتب كل معادلة قطبية مما يأتي على الصورة الديكارتية :

5A $r = -3$

بتربيع الطرفين

$r^2 = 9$, $x^2 + y^2 = r^2$

$x^2 + y^2 = 9$ دائرة

5B $\theta = \frac{\pi}{3}$

إضافة tan للطرفين $\tan\theta = \tan\frac{\pi}{3}$

$\tan\theta = \sqrt{3}$

$\frac{y}{x} = \sqrt{3}$

$y = \sqrt{3}x$ مستقيم

5C $r = 3\cos\theta$

ضرب الطرفين في r

$r^2 = 3r\cos\theta$

$x^2 + y^2 = 3x$

$x^2 + y^2 - 3x = 0$ دائرة

2-3 الأعداد المركبة و نظرية ديموافر

مثال1 / تحقق من فهمك

مثل كل مما يأتي في المستوى المركب وأوجد قيمته المطلقة :

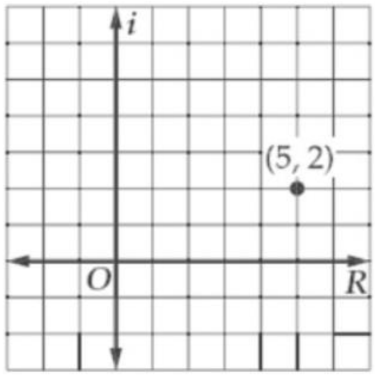
1A $5+2i$

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$|z| = \sqrt{5^2+2^2}$

$|z| = \sqrt{29}$

$\sqrt{29} \approx 5.39$

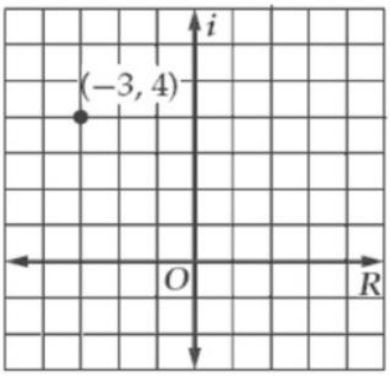


1B $-3+4i$

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$|z| = \sqrt{(-3)^2+4^2}$

$|z| = \sqrt{25} = 5$



مثال2 / تحقق من فهمك

عبر عن كل مركب مما يأتي بالصورة القطبية :

2A $9+7i$

$r = \sqrt{a^2+b^2}\ , r = \sqrt{9^2+7^2} = 11.4$

$\theta = tan^{-1}\frac{y}{x}\ , \theta = tan^{-1}\frac{7}{9} = 0.66$

$11.4(cos\ 0.66\ +\ i\ sin\ 0.66\ )$

2B $-2-2i$

$r = \sqrt{a^2+b^2}\ , r = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2} = 2.83$

$\theta = tan^{-1}\frac{y}{x} + \pi, \theta = tan^{-1}\frac{-2}{-2} + \pi = 3.92$

$2.83(cos\ 3.92\ +\ i\ sin\ 3.92\ )$

عودة إلى الفهرس

2-3 الأعداد المركبة و نظرية ديموافر

مثال 3 / تحقق من فهمك

مثل كل مركب مما يأتي في المستوى القطبي، ثم عبر عنه بالصورة الديكارتية

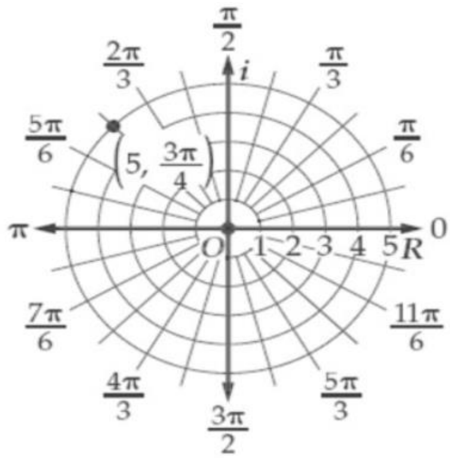
3A $5\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

عين الاحداثيات القطبية $\left(5, \frac{3\pi}{4}\right)$

$$5\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$5\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$-\frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2}i$$



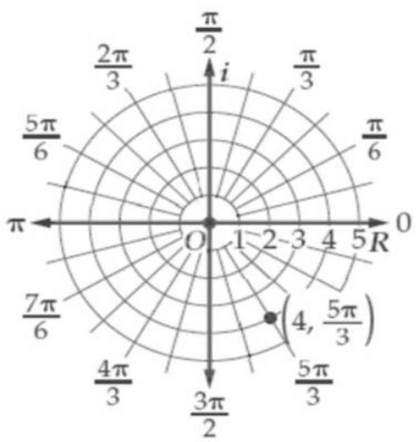
3B $4\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

عين الاحداثيات القطبية $\left(4, \frac{5\pi}{3}\right)$

$$4\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$4\left(\frac{1}{2} + i -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 2 - 2\sqrt{3}i$$



مثال 4 / تحقق من فهمك

أوجد الناتج على الصورة القطبية ، ثم عبر عنه بالصورة الديكارتية لكل مما يأتي :

4A $3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) . 5\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$$3(5)\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)\right) + i.\left(\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$15\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$ **تقريبا** , $-3.88 + 14.49i$ **تقريبا**

عودة إلى الفهرس

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

2-3 الأعداد المركبة و نظرية ديموافر

مثال 4 / تحقق من فهمك أوجد الناتج على الصورة القطبية ، ثم عبر عنه بالصورة الديكارتية لكل مما يأتي :

4B $6\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right).2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$$6(2)\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)\right)+i.\left(\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$12\left(\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$ **تقريبا** , $-3.11-i11.59$ **تقريبا**

مثال5 / تحقق من فهمك **كهرباء:** إذا كان فرق جهد دائرة كهربائية 120 ، وكانت شدة التيار $(8+6i)$ امبير، فأوجد معوقتها على الصورة الديكارتية

$120=120+j\,0$

$r=\sqrt{a^2+b^2}\,,\,r=\sqrt{(120)^2+0^2}=120$

$\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}\,,\,\theta=\frac{0}{120}=0$

$z=8+6j$

$r=\sqrt{a^2+b^2}\,,\,r=\sqrt{8^2+6^2}=10$

$\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}\,,\,\theta=\tan^{-1}\frac{6}{8}=0.64$

$I=\dfrac{120(\cos\cos 0+j\sin\sin 0)}{10[\cos\cos(0.64)\ +j\sin\sin 0.64)]}$

$I=12[\cos(-0.64)+i\sin(-0.64)]$

$I=12[\cos(0.64)-i\sin(0.64)]$

$I=12[0.80-j\,0.59)$

تقريبا $(9.6-7.1j)\Omega$

مثال6 / تحقق من فهمك أوجد الناتج في كل مما يأتي، وعبر عنه بالصورة الديكارتية :

6A $(1+\sqrt{3}i)^4$

$r=\sqrt{a^2+b^2}\,,\,r=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$

$\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}\,,\,\theta=\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{1}=\frac{\pi}{3}$

$\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\sqrt{3}\right)\right]^4$

$2^4(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3})$

$16(\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})$

$-8-8\sqrt{3}i$

6B $(2\sqrt{3}-2i)^8$

$r=\sqrt{a^2+b^2}\,,\,r=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2}=4$

$\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}\,,\,\theta=\tan^{-1}\frac{-2}{2\sqrt{3}}=\frac{-\pi}{6}$

$\left[4\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^8$

$4^8(\cos\frac{8\pi}{6}-i\sin\frac{8\pi}{6})$

$65536(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})$

$-32768+32768\sqrt{3}i$

عودة إلى الفهرس

2-3 الأعداد المركبة و نظرية ديموافر

مثال7 / تحقق من فهمك

7A أوجد الجذور التكعيبية للعدد $2 + 2i$

$r = \sqrt{a^2 + b^2}\,, r = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

$\theta = tan^{-1}\frac{y}{x}\,, \theta = tan^{-1}\frac{2}{2} = \frac{\pi}{4}$

$n = 3\,, k = 0,1,2$

عند $k = 0$

$2\sqrt{2}^{\frac{1}{3}}(cos\ \frac{\frac{\pi}{4}+2(0)\pi}{3} + i\ sin\ \frac{\frac{\pi}{4}+2(0)\pi}{3})$

$2\sqrt{2}^{\frac{1}{3}}(cos\ \frac{\pi}{12} + i\ sin\ \frac{\pi}{12})$

$1.37 + 0.37\ i$

عند $k = 1$

$2\sqrt{2}^{\frac{1}{3}}(cos\ \frac{4\pi+2(1)\pi}{3} + i\ sin\ \frac{4\pi+2(1)\pi}{3})$

$2\sqrt{2}^{\frac{1}{3}}(cos\ \frac{9\pi}{12} + i\ sin\ \frac{9\pi}{12})$

$-1 + i$

عند $k = 2$

$2\sqrt{2}^{\frac{1}{3}}(cos\ \frac{4\pi+2(2)\pi}{3} + i\ sin\ \frac{4\pi+2(2)\pi}{3})$

$2\sqrt{2}^{\frac{1}{3}}(cos\ \frac{17\pi}{12} + i\ sin\ \frac{17\pi}{12})$

$-0.37 - 1.37\ i$

عودة إلى الفهرس

2-3 الأعداد المركبة و نظرية ديموافر

مثال7 / تحقق من فهمك

7B أوجد الجذور التكعيبية لعدد8

$r=\sqrt{a^2+b^2}\,, r=\sqrt{8^2+0^2}=8$

$\theta=tan^{-1}\frac{y}{x}\,,\theta=tan^{-1}\frac{0}{8}=0$

$n=3\,,k=0,1,2$

عند $k=0$

$8^{\frac{1}{3}}(cos\ \frac{0+2(0)\pi}{3}+i\ sin\ \frac{0+2(0)\pi}{3})$

$8^{\frac{1}{3}}(cos\ 0\ +i\ sin\ 0)$

$8^{\frac{1}{3}}=2$

عند $k=1$

$8^{\frac{1}{3}}(cos\ \frac{0+2(1)\pi}{3}+i\ sin\ \frac{0+2(1)\pi}{3})$

$8^{\frac{1}{3}}(cos\ \frac{2\pi}{3}+i\ sin\ \frac{2\pi}{3})$

$-1+\sqrt{3}\,i$

عند $k=2$

$8^{\frac{1}{3}}(cos\ \frac{0+2(2)\pi}{3}+i\ sin\ \frac{0+2(2)\pi}{3})$

$-1-\sqrt{3}\,i$

$2\,,-1+\sqrt{3}\text{i},-1-\sqrt{3}\text{i}$

عودة إلى الفهرس

مثال8 / تحقق من فهمك

8A أوجد الجذور التكعيبية لعدد واحد

$r=\sqrt{a^2+b^2}\,, r=\sqrt{1^2+0^2}=1$

$\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}, \theta=\tan^{-1}\frac{0}{1}=0$

$n=3\,, k=0,1,2$

عند $k=0$

$1^{\frac{1}{3}}(\cos 0 + i\sin 0)$

$1(1 + 0)=1$

عند $k=1$

$1^{\frac{1}{3}}(\cos \frac{0+2(1)\pi}{3} + i\sin \frac{0+2(1)\pi}{3})$

$1(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})$

$-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$

عند $k=2$

$1^{\frac{1}{3}}(\cos \frac{0+2(2)\pi}{3} + i\sin \frac{0+2(2)\pi}{3})$

$1(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})$

$-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$

$1\,,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\,,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

عودة إلى الفهرس

2-3 الأعداد المركبة و نظرية ديموافر

مثال8 / تحقق من فهمك

8B أوجد الجذور السداسية لعدد واحد .

$r = \sqrt{a^2 + b^2}\,, r = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$

$\theta = tan^{-1}\frac{y}{x}\,, \theta = tan^{-1}\frac{0}{1} = 0$

$n = 3\,, k = 0,1,2,3,4,5$

عند $k = 0$

$1^{\frac{1}{6}}\left[cos\frac{2(0)\pi}{6} + isin\frac{2(0)\pi}{6}\right]$

$1^{\frac{1}{6}}(cos\, 0 + i\, sin\, 0)$

$1(1 + 0) = 1$

عند $k = 1$

$1^{\frac{1}{6}}(cos\, \frac{0+2(1)\pi}{3} + i\, sin\, \frac{0+2(1)\pi}{3})$

$1(-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2})$

$-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$

عند $k = 2$

$1^{\frac{1}{6}}(cos\, \frac{0+2(2)\pi}{3} + i\, sin\, \frac{0+2(2)\pi}{3})$

$1(-\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2})$

$-\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$

عند $k = 3$

-1

عند $k = 4$

$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

عند $k = 5$

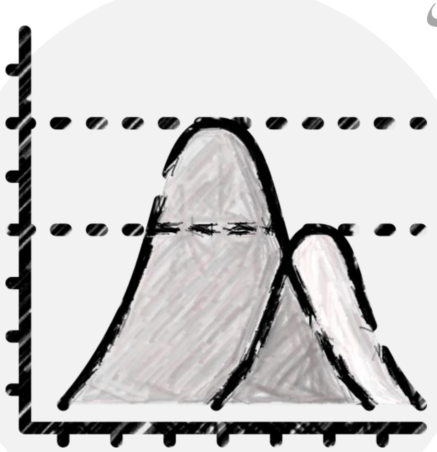
$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$1, \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\,, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\,, -1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\,, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

عودة إلى الفهرس

الفصل الثالث

الإحتمال و الإحصاء



3-1 الدراسات التجريبية و المسحية و القائمة على الملاحظة

مثال 1 / تحقق من فهمك

حدد ما إذا كانت كل دراسة مسحية فيما يأتي تتبنى عينة متحيزة، أو غير متحيزة، وفسر إجابتك:

1A منحازة ، لأن انحيازهم لكرة السلة هو الأكثر احتمالا

1B منحازة ، لأن انحيازهم للعبتهم المفضلة هو الأكثر احتمالا وهي كرة القدم .

مثال 2/ تحقق من فهمك

أي مما يأتي يحدد أفضل مادة بالنسبة إلى الطلاب دون أي تحيز .

2A منحازة ، لأنه ذكر مادة محددة ولم يذكر غيرها .

2B منحازة ، لأنه حدد مادتين للاختيار بينهما.

2C غير منحازة ، حيث أنه لم يعطي الإجابة المرتبطة بهدف السؤال.

مثال 3/ تحقق من فهمك

حدد ما إذا كان الموقف الآتي يمثل دراسة تجريبية أو دراسة قائمة على الملاحظة وفي حالة الدراسة التجريبية ، اذكر كلاً من المجموعة الضابطة و المجموعة التجريبية ، ثم بين ما إذا كانت الدراسة التجريبية متحيزة ام لا .

3 اختر 80 طالباً جامعياً نصفهم درس الإحصاء في المدرسة الثانوية ، و قارن نتائج المجموعتين في مساق للإحصاء تم تدريسه للجامعة .

دراسة قائمة على الملاحظة .

مثال 4/ تحقق من فهمك

حدد ما إذا كانت الحالة الآتية تتطلب دراسة مسحية ، أو دراسة قائمة على الملاحظة ، فسر إجابتك .

4 تريد استطلاع آراء طلاب مدرسة ثانوية حول وسيلة المواصلات المدرسية باستعمال مقياس متدرج من 1 (لا أوافق مطلقاً) إلى 5 (أوافق بشدة) .

دراسة مسحية ، تم اختيار طلاب مدرسة ثانوية، كما تم طرح السؤال عليهم بحيث وضعوا إجاباتهم وفق مقياس مدرج من 1 إلى 5

مثال 5/ تحقق من فهمك

بين ما إذا كانت العبارة الآتية تظهر ارتباطاً ، أو سببية ، ثم فسر اجابتك :

5 عندما ادرس أحصل على تقدير ممتاز .

ارتباط ، حيث إن الدراسة قد تساعد على الحصول على تقدير ممتاز ولكنها غير مضمونة .

عودة إلى الفهرس

التحليل الإحصائي

3 - 2

مثال 1 / تحقق من فهمك

تمنح مؤسسة جائزة كبرى قيمتها 20000 ريال و 30 جائزة أخرى قيمة كل منها 500 ريال ، أي مقاييس النزعة المركزية يلائم البيانات بصورة أفضل ؟

1 المنوال ، حيث أن الغالبية العظمى من القيم متساوية

مثال 2/ تحقق من فهمك

في دراسة مسحية عشوائية شملت 3247 شخصا ، قال 41% منهم إنهم مرتاحون للنهضة العلمية

2A ما هامش خطأ المعاينة ؟

قانون هامش خطأ المعاينة

$$\text{هامش خطأ المعاينة} = \mp \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$n = 3247$

$$= \mp \frac{1}{\sqrt{3247}}$$

التبسيط

$$= \mp\ 0.0175$$

إذن هامش خطأ المعاينة $= \mp$ 1.75 %

2B ما الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة أفراد المجتمع المرتاحين للنهضة العلمية ؟؟

$0.41 + 0.0175 = 0.4275$, $0.41 - 0.0175 = 0.3925$

إذن الفترة الممكنة التي تحتوي على نسبة أفراد المجتمع الكلي المرتاحين للنهضة العمرانية التي تقع بين 39.25% و 42.75 %

مثال 3/ تحقق من فهمك

3A احسب المتوسط و الانحراف المعياري للمجتمع للبيانات المحددة في الجدول المجاور

عدد مرات التكرار	x	$(x-\mu)$	$(x-\mu)^2$
3	31	0.4	0.16(3)
4	33	2.4	5.76(4)
2	34	3.4	11.56(2)
5	28	-2.6	6.76(5)
2	36	5.4	29.16(2)
5	29	-1.6	2.56(5)
1	30	-0.6	0.36(1)
1	27	-3.6	12.96(1)
1	26	-4.6	21.16(1)
1	32	1.4	1.96(1)
	765		188

إذن :

$$\mu = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}} = \frac{765}{25} = 30.6$$

وبالتالي فإن الانحراف المعياري :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2}{n}} = \sqrt{\frac{188}{25}} = 2.74$$

عودة إلى الفهرس

2 - 3 التحليل الإحصائي

مثال 3/ تحقق من فهمك

3B ضع 70 مكان 30 في الجدول . ماذا تتوقع أن يحدث لكل من المتوسط و الانحراف المعياري ؟ أعد الحسابات للتحقق

عدد مرات التكرار	x	$(x-\mu)$	$(x-\mu)^2$
3	31	-1.2	1.44(3)
4	33	0.8	0.64(4)
2	34	1.8	3.24(2)
5	28	-4.2	17.64(5)
2	36	3.8	14.44(2)
5	29	-3.2	10.24(5)
1	70	37.8	1428.84(1)
1	27	-5.2	27.07(1)
1	26	-6.2	38.44(1)
1	32	-0.2	0.04(1)
	805		1676

يجب أن يزداد المتوسط قليلا تبعاً لذلك ، أما الانحراف المعياري فيزداد بشكلٍ كبير

إذن :

$$\mu = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}} = \frac{805}{25} = 32.2$$

وبالتالي فإن الانحراف المعياري :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2}{n}} = \sqrt{\frac{1676}{25}} = 8.19$$

3C اختير (5) طلاب عشوائياً من فصل دراسي ، و قيست أطوالهم فكانت : 175 سم ، 170سم ، 168 سم ، 167 سم ، 170سم . بين ما إذا كانت هذه البيانات تمثل عينة أم مجتمعاً ، ثم أوجد الانحراف المعياري لأطوال هؤلاء الطلاب .

البيانات تمثل عينة

إذن :

$$\mu = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}} = \frac{175+170+168+167+170}{5} = 170$$

وبالتالي فإن الانحراف المعياري :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{K=1}^{n}(x_K-\overline{X})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{25+0+4+9+0}{4}} = \sqrt{\frac{38}{4}} = 3.08$$

عودة إلى الفهرس

3 - 3 الإحتمال المشروط

مثال 1 / تحقق من فهمك

1 يحتوي كيس على 52 بطاقة مقسمة إلى أربع مجموعات لكل منها لون من الألوان الآتية : الأحمر و الأخضرو الأزرق و الأصفر ، و رقمت بطاقات كل لون بالأعداد من 1 إلى 13 إذا سحبت نوال بطاقة ، فما احتمال أن تحمل هذه البطاقة العدد 13 علماً بأن ما سحبته كان العدد 11 أو 12 أو 13 .

احتمال وقوع الحادثة B علماً بأن الحادثة A قد وقعت

$$P(B / A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$P(A)=\frac{12}{52}$ ، $P(A \cap B)=\frac{4}{52}$

$$= \frac{4}{52} \div \frac{12}{52}$$

$$= \frac{4}{52} \times \frac{52}{12}$$

بالتبسيط

$$= \frac{1}{3}$$

مثال 2/ تحقق من فهمك

أوجد احتمال أن يكون شخص اختير عشوائياً معافى ، علماً بأنه لا يمارس المشي .

2

الحالة	عدد الأشخاص		
	يمارس المشي(W)	يمارس المشي) (NW	المجموع
مريض (S)	1600	1200	2800
معافى(H)	800	400	1200
المجموع	2400	1600	4000

احتمال وقوع الحادثة H علماً بأن الحادثة NW قد وقعت

$$P(H / NW) = \frac{P(H \cap NW)}{P(NW)}$$

$P(NW)=\frac{12}{52}$ $P(H \cap P)=\frac{400}{4000}$

$$= \frac{400}{4000} \div \frac{1600}{4000}$$

$$= \frac{400}{4000} \times \frac{4000}{1600}$$

بالتبسيط

$$= \frac{1}{4}$$

عودة إلى الفهرس

الإحتمال المشروط

3 - 3

مثال 3/ تحقق من فهمك

3 أوجد احتمال أن يكون الطالب من ضمن المنتخب الجامعي ، علما بأنه في السنة الأولى .

A 2.6 % تقريبا B 2.5 % تقريبا C 8.4 % تقريبا D 7.7 % تقريبا

الرياضيون الجامعيون	سنة أولى	سنة ثانية	سنة ثالثة	سنة رابعة	المجموع
ضمن المنتخب الوطني (B)	7	22	36	51	116
ليس ضمن المنتخب الوطني(A)	269	262	276	237	1064
المجموع	276	284	312	308	1180

$P(B / F) = \frac{P(B \cap F)}{P(F)}$ احتمال وقوع الحادثة B علماً بأن الحادثة F قد وقعت

$P(B \cap F) = \frac{7}{1180}$ ، $P(F) = \frac{276}{1180}$

$= \frac{7}{1180} \div \frac{276}{1180}$

$= \frac{7}{1180} \times \frac{1180}{276}$

$= 0.025$ بالتبسيط

$= 0.025 \times 100$ إيجاد النسبة المئوية

$= 2.5\%$

الجواب الصحيح B

عودة إلى الفهرس

4 - 3 الإحتمال و التوزيعات الإحتمالية

مثال 1 / تحقق من فهمك

1 في المثال I إذا كان عدد الذين رشحوا من الصف الثاني ثانوي 3 و من الصف الأول الثانوي II و كان عدد الجوائز 4 و اختير 4 طلاب من الذين رشحوا بطريقة عشوائية ، فما احتمال أن يفوز طالبان من الصف الثاني و طالبان من الصف الأول ؟؟

الخطوة الأولى : نستخدم التوافيق لإيجاد عدد النجاحات

اختيار طالبان من 3 طلاب من الصف الثاني $${}_3C_2 = \frac{3!}{1!2!} = \frac{3.\,2!}{1!\,.2\,.1} = 3$$

اختيار طالبان من 11 طلاب من الصف الأول $${}_{11}C_2 = \frac{11!}{9!2!} = \frac{11\,.10\,.\,9!}{9!\,.2.1} = 55$$

بضرب الحدثين نحصل على عدد النجاحات $\mathcal{S}$ $$\mathcal{S} = {}_3C_2 \bullet {}_{11}C_2 = 3 \times 55 = 165$$

الخطوة الثانية : تحديد عدد عناصر فضاء العينة $\mathcal{S} + \mathcal{F}$

$$\mathcal{S} + \mathcal{F} = {}_{14}C_4 = \frac{14!}{10!\,4!} = \frac{14\,.13\,.12\,.11\,.\,10!}{10!\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.1} = 1001$$

11 + 3   2 + 2

الخطوة الثالثة : نوجد احتمال النجاح

$\rho($فوز 2 من الصف الأول و فوز 2 من الصف الثاني$) = \frac{\mathcal{S}}{\mathcal{S}+\mathcal{F}} = \frac{165}{1001} \approx 0.164835$

مثال 2 / تحقق من فهمك

2 سباق : اشترك صلاح و عبدالله و سليم في سباق $400\ \text{m}$ مع خمسة رياضيين آخرين ، ما احتمال أن ينهي هؤلاء الثلاثة السباق في المراكز الثلاثة الأولى

الخطوة الأولى : نستخدم التباديل لإيجاد عدد النجاحات

$$\mathcal{S} = {}_3P_3 = 3!$$
$$= 3 \times 2 \times 1 = 6$$

الخطوة الثانية : تحديد عدد عناصر فضاء العينة $\mathcal{S} + \mathcal{F}$

$$\mathcal{S} + \mathcal{F} = {}_8P_3 = 8 \times 7 \times 6 = 336$$

الخطوة الثالثة : نوجد احتمال النجاح $\mathcal{S}$

$$\rho(\mathcal{S}) = \frac{\mathcal{S}}{\mathcal{S}+\mathcal{F}} = \frac{6}{8\times7\times6} = \frac{1}{56} = 0.017 \approx 0.02$$

أي أن الاحتمال المطلوب هو 2 %

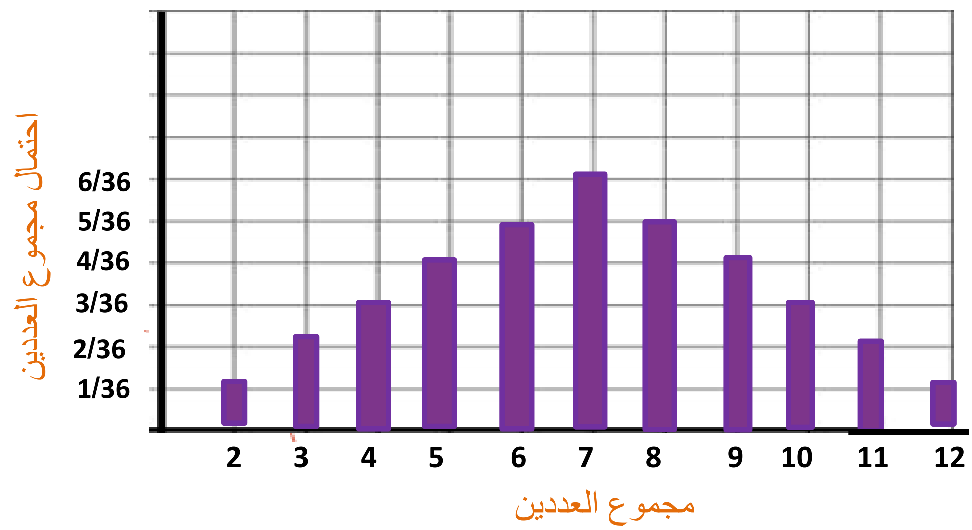
عودة إلى الفهرس

4 - 3 الإحتمال و التوزيعات الإحتمالية

مثال 3/ تحقق من فهمك

يوضح الجدول توزيعا احتماليا ، حيث ألقي مكعبان مرقمان من 1 إلى 6 مرة واحدة ، و سجل مجموع العددين الظاهرين على الوجهين العلويين و احتمال كل منها .

3A مثل بالأعمدة هذا التوزيع الاحتمالي.



3B استعمل التمثيل بالأعمدة؛ لتحدد الناتج الأكثر إمكانية للوقوع؟ ثم أوجد احتماله .

الناتج الأكثر إمكانية للوقوع هو 7 ، $p(7) = \frac{1}{6}$

3C أوجد $p($ 5 أو 11 $)$

$$p(5 \text{ أو } 11) = \frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{2+1}{18} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$$

مثال 4/ تحقق من فهمك

أوجد القيمة المتوقعة عند رمي مكعبين مرقمين مرة واحدة و تسجيل مجموع العددين الظاهرين على الوجهين العلويين .

4

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X)	1\36	1\18	1\12	1\9	5\36	1\6	5\36	1\9	1\12	1\18	1\36
X . P(X)	2\36	3\18	4\12	5\9	30\36	7\6	40\36	9\9	10\12	11\18	12\36

القيمة المتوقعة هي :

$$E(X) = \sum X \, . \, P(X) = \frac{2}{36} + \frac{3}{18} + \frac{4}{12} + \frac{5}{9} + \frac{30}{36} + \frac{7}{6} + \frac{40}{36} + \frac{9}{9} + \frac{10}{12} + \frac{11}{18} + \frac{12}{36} = 7$$

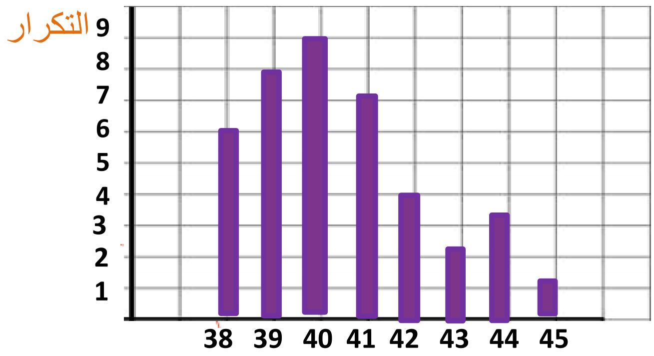
عودة إلى الفهرس

3 - 5 التوزيع الطبيعي

مثال 1 / تحقق من فهمك

1 حدد ما إذا كانت البيانات في الجدول المجاور تظهر التواءً موجباً ، أو التواءً سالباً أو موزعة توزيعاً طبيعياً

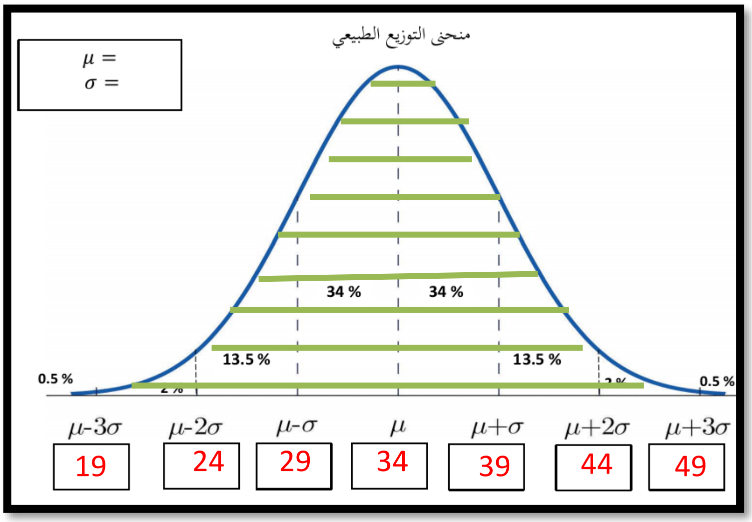
قياس الحذاء	38	39	40	41	42	43	44	45
التكرار	6	8	9	7	4	2	3	1



التواء موجب

مثال 2 / تحقق من فهمك

2 أوجد القيمة المتوقعة عند رمي مكعبين مرقمين مرة واحدة و تسجيل مجموع العددين الظاهرين على الوجهين العلويين



المنطقة المظللة بالشكل من49احتمال أن تكون قيمة تم اختيارها عشوائيا أقل هي

$$P(x < 49) = (50 + 34 + 13.5 + 2)\%$$
$$=99.5\%$$

أو

$$P(x < 49) = (100 - 0.5)\% = 99.5\%$$

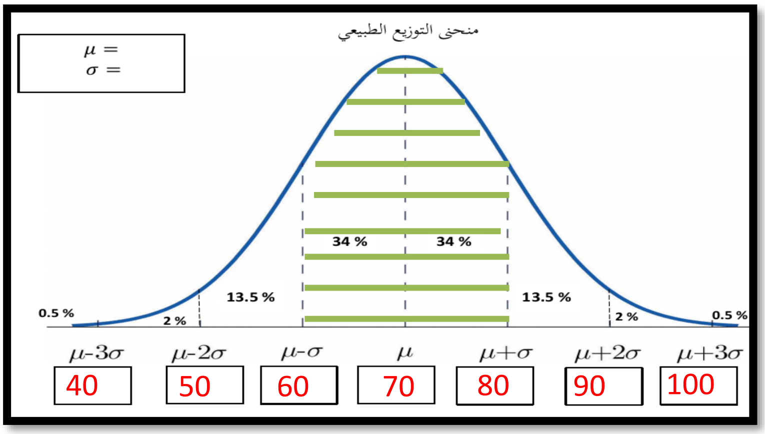
عودة إلى الفهرس

5 - 3 التوزيع الطبيعي

مثال 3/ تحقق من فهمك

درجات : إذا علمت أن كتل 100 موظف في شركة تتوزع توزيعا طبيعيا بمتوسط مقداره 75 و انحراف معياري 10 كيلو جرامات فاجب على السؤالين التاليين :

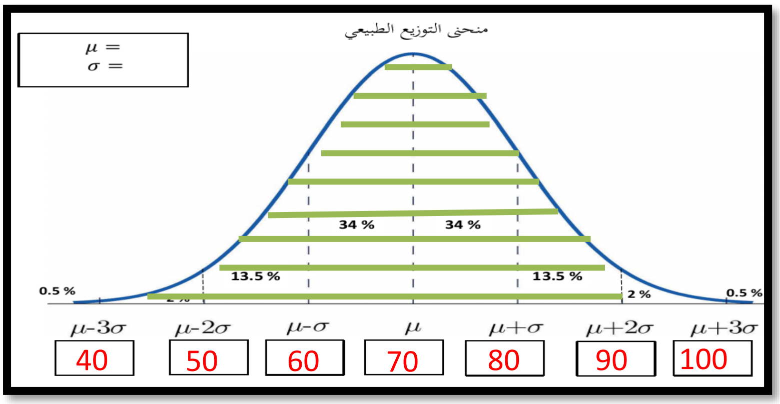
3A ما العدد التقريبي للموظفين الذين تقع كتلتهم بين 80 و 60 كيلوا جراماً



العدد التقريبي للموظفين الذين تقع كتلتهم بين 80 , 60 كيلو جرام

$= 100 \times 68\% = 100 \times \frac{68}{100} = 68$ **موظفاً**

3B ما احتمال أن يتم اختيار موظف بصورة عشوائية و تكون كتلته أقل من 90 كيلو جراماً .



$$P(x < 90) = (50 + 34 + 13.5)\% = 97.5\%$$

أو

$$P(x < 90) = (100 - 2.5)\% = 97.5\%$$

3 - 6 التوزيعات ذات الحدين

مثال 1 / تحقق من فهمك

حدد ما إذا كانت كل تجربة مما يأتي ذات حدين أو يمكن جعلها كذلك و إذا ذات حدين فاكتب قيم n , p , q و قيم المتغير العشوائي الممكنة و إذا لم تكن كذلك فبين السبب .

1A أظهرت نتيجة لمسح إحصائي في إحدى المدارس ذات الزي الموحد أن 61% يحبون الزي الجديد ، و أن 24% لا يحبونه . إذا تم اختيار 20 طالباً بشكل عشوائي ، و سؤالهم عما إذا كانوا يحبون الزي الجديد ، و كان المتغير العشوائي X يدل على عدد الطلاب الذين يحبون الزي الجديد .

هذه التجربة ليست ذات حدين لأن

1)عملية الاختيار تتم بشكل عشوائي ومستقل

2) للتجربة نتيجتان متوقعتان اما أن يحب الطالب الزي الموحد S أو لا يحبه F

3) احتمال النجاح نفسة لكل طالب

$\rho = 0.61$ ، $q = 0.24$

$\rho + q = 0.61 + 0.24 = 0.85 \neq 1$

1B أجاب خالد عن اختيار مكون من 20 فقرة من نوع " الإختيار من متعدد " لكل فقرة منها أربع إجابات واحدة فقط صحيحة (دون معرفة علمية بموضوع الإختبار) ، وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد الإجابات الصحيحة .

هذه التجربة تجربة ذات حدين لأن :

1)عملية الاختيار تتم بشكل عشوائي ومستقل

2) للتجربة نتيجتان متوقعتان اما أن يحب الطالب الزي الموحد S أو لا يحبه F

3) احتمال النجاح نفسة لكل طالب

$\rho = \frac{1}{4}$ ، $q = \frac{3}{4}$

$\rho + q = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

$X = 0 , 1 , 2 , 3 , \dots \dots \dots , 20$

مثال2/ تحقق من فهمك

2 **كليات :** يدرس في إحدى الكليات 48% من الطلاب لغة عالمية خلال سنة التخرج إذا أختير 7 طلاب عشوائيا و تم سؤالهم عما إذا درسوا لغة عالمية في سنتهم الأخيرة و كان المتغير العشوائي X يدل على عدد الطلاب الذين أجابوا بنعم فكون التوزيع ذا الحدين و مثله بالأعمدة ، ثم أوجد احتمال أن يجيب أقل من 4 طلاب بنعم .

التجربة ذات حدين فيها : $n = 7$, $\rho = 0.48$ ، $q = 1 - 0.48 = 0.52$

$p(0) = {}_7C_0 (0.48)^0 (0.52)^7 = 0.010$

$p(1) = {}_7C_1 (0.48)^1 (0.52)^6 = 0.066$

$p(2) = {}_7C_2 (0.48)^2 (0.52)^5 = 0.148$

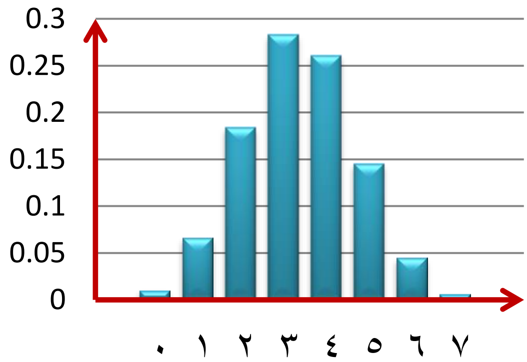
$p(3) = {}_7C_3 (0.48)^3 (0.52)^4 = 0.283$

$p(4) = {}_7C_4 (0.48)^4 (0.52)^3 = 0.261$

$p(5) = {}_7C_5 (0.48)^5 (0.52)^2 = 0.145$

$p(6) = {}_7C_6 (0.48)^6 (0.52)^1 = 0.145$

$p(7) = {}_7C_7 (0.48)^7 (0.52)^0 = 0.006$



لإيجاد احتمال أن أقل من 4 طلاب بنعم أوجد : $p(3) + p(2) + p(1) + p(0)$

$P(X < 4) = \rho(3) + p(2) + p(1) + p(0)$

$= 0.283 + 0.148 + 0.066$

$= 0.544$

$= 54.4\%$

عودة إلى الفهرس

3 - 6 التوزيعات ذات الحدين

مثال 3 / تحقق من فهمك

3 **كليات :** أوجد المتوسط و التباين و الانحراف المعياري للمتغير العشوائي X في تحقق من فهمك 2 و فسر معنى المتوسط في سياق الموقف .

التجربة ذات حدين فيها : $q = 1 - 0.48 = 0.52$ ، $\rho = 0.48$, $n = 7$

المتوسط $\mu = np = 7\,(0.48) = 3.36$

التباين $\sigma^2 = npq = 7(0.48)(0.52) = 1.747$

الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{n\,p\,q} = \sqrt{1.747} = 1.322$

يدرسون لغة عالمية سنة التخرج 3 طلبة من بين 7 معنى المتوسط انه بمعدل

مثال4/ تحقق من فهمك

4 أشارت دراسة إلى أن 32% من أولياء الأمور المستطلعة آراؤهم يرون أنه يجب تقليل عدد أيام الإجازة الصيفية في نهاية العام الدراسي ، غير أن آية ترى أن النسبة أقل من ذلك ، لذلك قامت بإجراء دراسة مسحية شملت 250 من أولياء الأمور اختارتهم بطريقة عشوائية ممن استهدفتهم الدراسة السابقة . ما احتمال ألا يرى أكثر من 65 من أولياء الأمور وجوب تقليل عدد أيام الإجازة الصيفية ؟

التجربة ذات حدين فيها :

$q = 1 - 0.32 = 0.68$ ، $\rho = 0.32$, $n = 250$

وحيث أن :

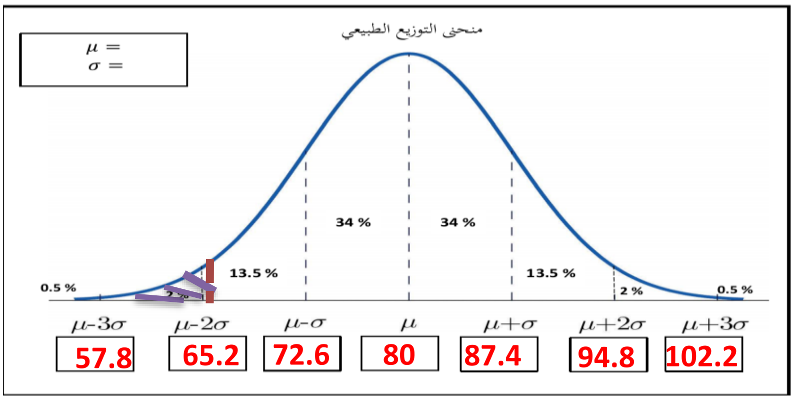
$np = 250\,(0.32) = 80 > 5$

$np = 250\,(0.68) = 170 > 5$

وهنا يمكننا استعمال التوزيع الطبيعي لتقريب الاحتمال على النحو التالي :

المتوسط للتوزيع الطبيعي $np = 250\,(0.32) = 80$

الانحراف المعياري للتوزيع الطبيعي $\sigma = \sqrt{n\,p\,q} = \sqrt{250\,(0.32)(0.68)} \approx 7.38$



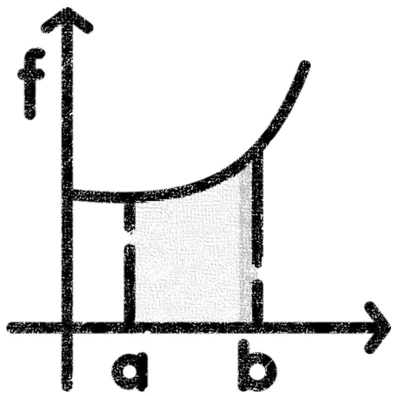
P(X < 65)= (2 + 0.5) % = 2.5 %

أي أن احتمال ألا يرى أكثر من ٦٥ من أولياء الأمور وجوب تقليل عدد أيام الإجازة الصيفية هو% 2.5

عودة إلى الفهرس

الفصل الرابع

النهايات و الإشتقاق



تقدير النهايات بيانياً

4 - I

مثال 1 / تحقق من فهمك

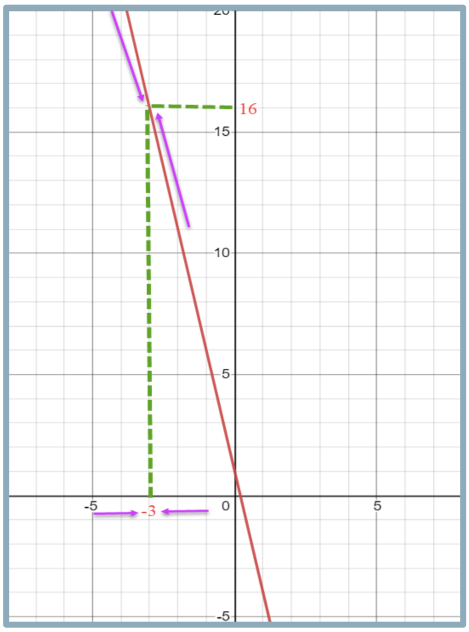
قدر كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني ، ثم عزز إجابتك باستخدام جدول القيم :

1A $\lim_{x\to -3}(1-5x)$

التحليل بيانياً:

نمثل الدالة $y = 1-5x$

x	0	-3	1
y	1	16	-4



يبين التمثيل البياني للدالة $f(x) = 1-5x$

أنه كلما اقتربت قيم x من العدد -3 من جهة اليمين أو اليسار فإن قيم الدالة $f(x)$ تقترب من العدد 16

أي أن :

$$\lim_{x\to -3^+}(1-5x) = 16 \quad , \quad \lim_{x\to -3^-}(1-5x) = 16$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -3}(1-5x) = 16$$

التعزيز عددياً:

تقترب قيم x من العدد -3 ←   → تقترب قيم x من العدد -3

x	-3.1	-3.01	-3.001	-3	-2.999	-2.99	-2.9
$f(x)$	16.5	16.05	16.005		15.995	15.95	15.5

$f(x)$ تقترب من العدد 16 $f(x)$ تقترب من العدد 16

يبين نمط الدالة أنه كلما اقتربت x من العدد -3 من اليمين أو اليسار فإن قيم الدالة $f(x)$ تقترب من العدد 16

عودة إلى الفهرس

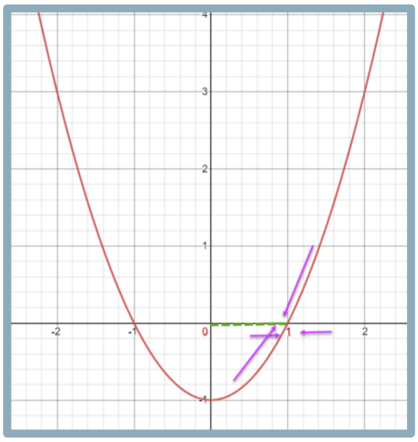
4 - 1 تقدير النهايات بيانياً

مثال 1 / تحقق من فهمك

قدر كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني ، ثم عزز إجابتك باستخدام جدول القيم :

1B $\lim_{x\to1}(x^2-1)$

x	-2	-1	0	1	2
y	3	0	-1	0	3



التحليل بيانياً :

نمثل الدالة $y = x^2 - 1$

لتمثيل الدالة نوجد رأس القطع المكافئ $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

حيث للمعادلة على الصورة : $ax^2 + bx + c = 0$

$$= \left(-\frac{0}{2(1)}, f\left(-\frac{0}{2(1)}\right)\right) = (0, -1)$$

يبين التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^2 - 1$

أنه كلما اقتربت x من العدد 1 من جهة اليمين أو اليسار
فإن قيم الدالة $f(x)$ تقترب من العدد 0 أي أن :

$$\lim_{x\to1^-}(x^2-1) = 0 \quad , \quad \lim_{x\to1^+}(x^2-1) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to1}(x^2-1) = 0$$

التعزيز عددياً:

تقترب قيم x من العدد 1 ←   → تقترب قيم x من العدد 1

x	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	-0.19	-0.019	-0.0019		0.0012	0.012	0.12

$f(x)$ تقترب من العدد 0 $f(x)$ تقترب من العدد 0

يبين نمط الدالة أنه كلما اقتربت x من العدد 1 من اليمين أو اليسار
فإن قيم الدالة $f(x)$ تقترب من العدد 0

عودة إلى الفهرس

4 - 1 تقدير النهايات بيانياً

مثال 2 / تحقق من فهمك

قدر كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني ، ثم عزز إجابتك باستخدام جدول القيم :

2A $\lim_{x \to -2} \frac{x+2}{x^2-4}$

التحليل بيانياً:

$R - \{-2, 2\} =$ مجال الدالة

نمثل الدالة $y = \frac{x+2}{x^2-4}$

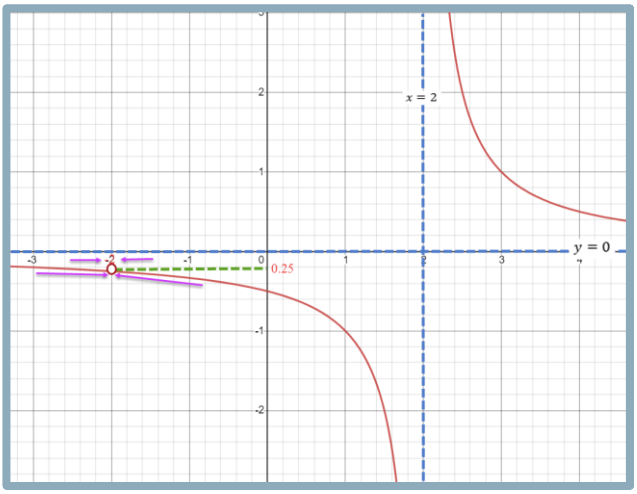
$$y = \frac{x+2}{x^2-4} = \frac{x+2}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x-2}$$

يوجد فجوة عند $x = -2$

و للدالة خط تقاربي رأسي عند $x = 2$

و خط تقاربي أفقي عند $y = 0$

x	-3	-2	1	2	3
y	-0.2	-0.25	-1	غير معرفة	1



يبين التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$

أنه كلما اقتربت x من العدد -2 من جهة اليمين أو من جهة اليسار فإن قيم الدالة $f(x)$ تقترب من العدد -0.25 أي أن :

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{x+2}{x^2-4} = -0.25 \quad , \quad \lim_{x \to -2^-} \frac{x+2}{x^2-4} = -0.25$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -2} \frac{x+2}{x^2-4} = -0.25$$

التعزيز عددياً:

تقترب قيم x من العدد -2 ←   → تقترب قيم x من العدد -2

x	-2.1	-2.01	-2.001	-2	-1.999	-1.99	-1.9
$f(x)$	-0.243	-0.249	-0.2499		-0.25006	-0.2506	-0.2564

$f(x)$ تقترب من العدد -0.25 $f(x)$ تقترب من العدد -0.25

يبين نمط الدالة أنه كلما اقتربت x من العدد -2 من اليمين أو اليسار فإن قيم الدالة $f(x)$ تقترب من العدد -0.25

عودة إلى الفهرس

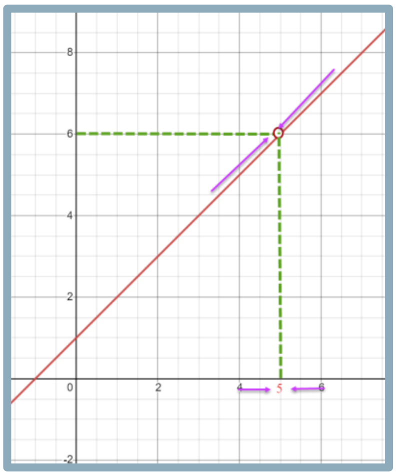
4 - 1 تقدير النهايات بيانياً

مثال 2 / تحقق من فهمك

قدر كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني ، ثم عزز إجابتك باستخدام جدول القيم :

2B $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 4x - 5}{x - 5}$

x	0	5	6
y	1	6	7



التحليل بيانياً:

مجال الدالة $= R - \{5\}$

$$y = \frac{x^2 - 4x - 5}{x - 5}$$

$$y = \frac{x^2 - 4x - 5}{x - 5} = \frac{(x-5)(x+1)}{x-5} = x + 1$$

يوجد فجوة عند $x = 5$

نمثل الدالة $y = x + 1$

يبين التمثيل البياني للدالة $f(x) = x + 1$

أنه كلما اقتربت x من العدد 5 من جهة اليسار أو من جهة اليمين فإن قيم الدالة $f(x)$ تقترب من العدد 6 أي أن :

$$\lim_{x \to 5^+} \frac{x^2 - 4x - 5}{x - 5} = 6 \quad , \quad \lim_{x \to 5^-} \frac{x^2 - 4x - 5}{x - 5} = 6$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 4x - 5}{x - 5} = 6$$

التعزيز عددياً:

تقترب قيم x من العدد 5 ← ← تقترب قيم x من العدد 5

x	4.9	4.99	4.999	5	5.001	5.01	5.1
$f(x)$	5.9	5.99	5.999		6.001	6.01	6.1

$f(x)$ تقترب من العدد 6 ← ← $f(x)$ تقترب من العدد 6

يبين نمط الدالة أنه كلما اقتربت x من العدد 5 من اليمين أو اليسار فإن قيم الدالة $f(x)$ تقترب من العدد 6

عودة إلى الفهرس

I - 4 تقدير النهايات بيانياً

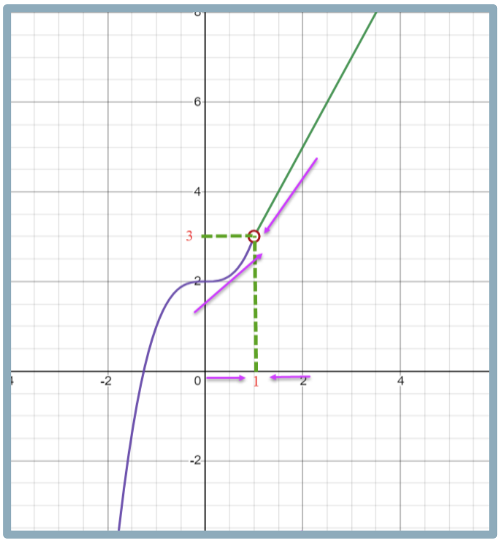
مثال 3 / تحقق من فهمك

قدر إن أمكن كل من النهايات التالية إذا كانت موجودة :

3A

$\lim_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim_{x\to 1} f(x)$

$$f(x)=\begin{cases} x^3+2 & x<1 \\ 2x+1 & x\geq 1 \end{cases}$$



يبين التمثيل البياني للدالة

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x^3+2)=3$$

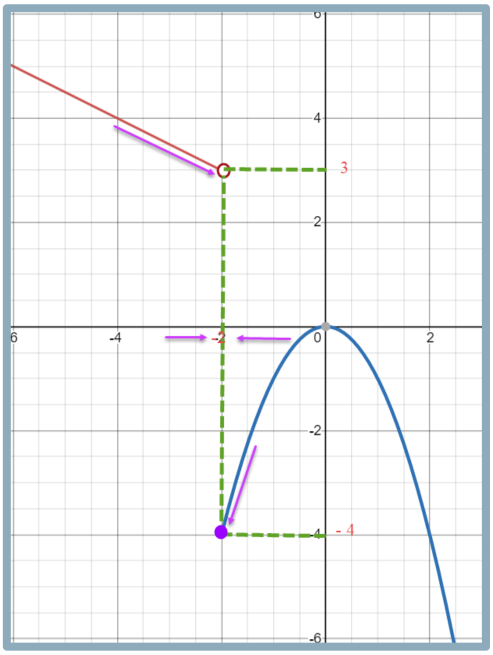
$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(2x+1)=3$$

بما أن النهايتين متساويتان $\Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x)=3$

3B

$\lim_{x\to -2^-} g(x)$, $\lim_{x\to -2^+} g(x)$, $\lim_{x\to -2} g(x)$

$$g(x)=\begin{cases} -0.5x+2 & x<-2 \\ -x^2 & x\geq -2 \end{cases}$$



يبين التمثيل البياني للدالة

$$\lim_{x\to -2^-} g(x)=\lim_{x\to -2^-}(-0.5x+2)=3$$

$$\lim_{x\to -2^+} g(x)=\lim_{x\to -2^+}-x^2=-4$$

بما أن النهايتين غير متساويتين

$\Rightarrow \lim_{x\to -2} g(x)$ غير موجودة

عودة إلى الفهرس

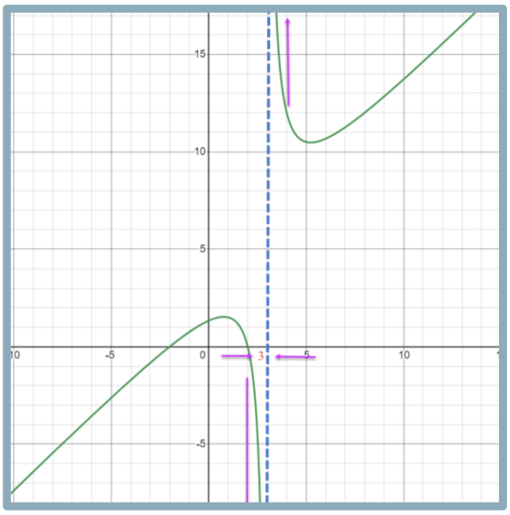
تقدير النهايات بيانياً 4 - 1

مثال 4 / تحقق من فهمك

قدر أن امكن كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة

4A $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-4}{x-3}$

x	-2	1	3	5	8
y	0	1.5	غير معرفة	10.5	12



التحليل بيانياً:

$D_f = R - \{3\}$

للدالة خط تقاربي رأسي $x = 3$

يبين التمثيل البياني للدالة

أنه كلما اقتربت x من العدد 3 من جهة اليسار
فإن قيم الدالة $f(x)$ تقل بلا حدود

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2-4}{x-3} = -\infty$$

و كلما اقتربت x من العدد 3 من جهة اليمين
فإن قيم الدالة $f(x)$ تزداد بلا حدود

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x^2-4}{x-3} = \infty$$

لذلك لا يمكننا وصف سلوك الدالة عند العدد 3
أي أن النهاية غير موجودة عند هذا العدد

$\Rightarrow \lim_{x\to 3} \frac{x^2-4}{x-3}$ غير موجودة

التعزيز عددياً:

تقترب قيم x من العدد 3   تقترب قيم x من العدد 3

x	2.9	2.99	2.999	3	3.001	3.01	3.1
$f(x)$	-44.1	-494.01	-4994.001		5006.001	506.01	56.1

$f(x)$ تقترب من العدد $-\infty$ $f(x)$ تقترب من العدد ∞

يبين نمط الدالة أنه كلما اقتربت x من العدد 3 من اليمين أو اليسار
فإن قيم الدالة $f(x)$ إما تتزايد أو تتناقص بلا حدود

عودة إلى الفهرس

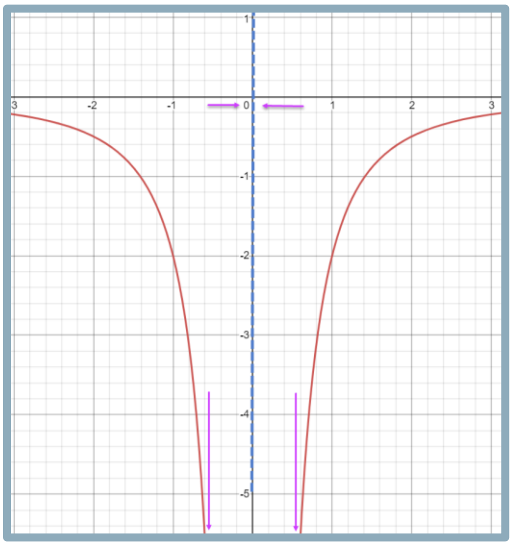
4 - I تقدير النهايات بيانياً

مثال 4 / تحقق من فهمك

قدر إن امكن كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة

4B $\lim_{x\to 0} -\frac{2}{x^4}$

x	-2	-1	0	1	2
y	$-\frac{1}{8}$	-2	غير معرفة	-2	$-\frac{1}{8}$



التحليل بيانياً:

مجال الدالة $= R - \{0\}$

للدالة خط تقاربي رأسي $x = 0$

يبين التمثيل البياني للدالة

أنه كلما اقتربت x من العدد 0 من جهة اليسار

فإن قيم الدالة $f(x)$ تقل بلا حدود

$$\lim_{x\to 0^-} -\frac{2}{x^4} = -\infty$$

و كلما اقتربت x من العدد 0 من جهة اليمين

فإن قيم الدالة $f(x)$ تقل بلا حدود

$$\lim_{x\to 0^+} -\frac{2}{x^4} = -\infty$$

لذلك ل يمكننا وصف سلوك الدالة عند العدد 0

أي أن النهاية تساوي سالب مالانهاية

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} -\frac{2}{x^4} = -\infty$$

التعزيز عددياً:

تقترب قيم x من العدد 0 ←   → تقترب قيم x من العدد 0

x	-0.1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	-20000	-200000000	-2×10^{12}		-2×10^{12}	-200000000	-20000

$f(x)$ تقترب من العدد $-\infty$ $f(x)$ تقترب من العدد $-\infty$

يبين نمط الدالة أنه كلما اقتربت x من العدد 0 من اليمين أو اليسار

فإن قيم الدالة $f(x)$ تتناقص بلا حدود

عودة إلى الفهرس

تقدير النهايات بيانياً

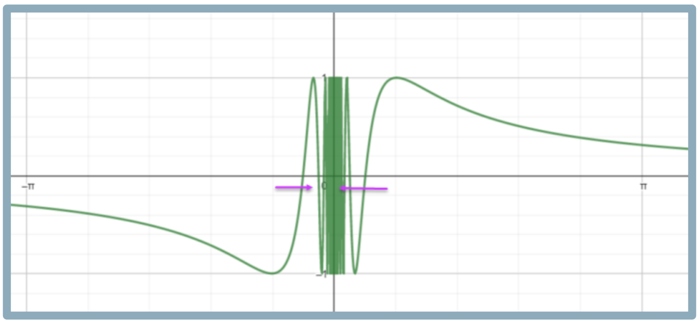
4 - I

مثال 5 / تحقق من فهمك

قدر كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة

5A $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$

التحليل بيانياً:

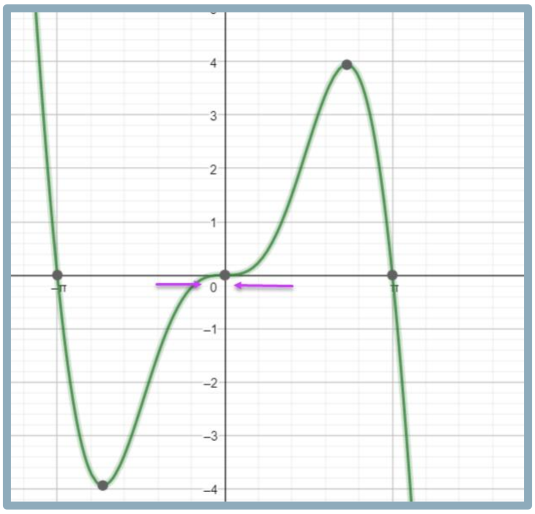


يبين التمثيل البياني للدالة
كلما اقتربت x من العدد 0 من جهة
اليسار أو من جهة اليمين فإن قيم الدالة
$f(x)$ تتذبذب بين العددين -1 و 1

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$$ غير موجودة

5B $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin x$

التحليل بيانياً:



يبين التمثيل البياني للدالة

أنه كلما اقتربت x من العدد 0 من جهة اليسار أو من جهة اليمين فإن قيم الدالة $f(x)$ تقترب من العدد 0
أي أن :

$$\lim_{x\to 0^+} x^2\sin x = 0 \quad , \quad \lim_{x\to 0^-} x^2\sin x = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} x^2\sin x = 0$$

عودة إلى الفهرس

تقدير النهايات بيانياً

4 - I

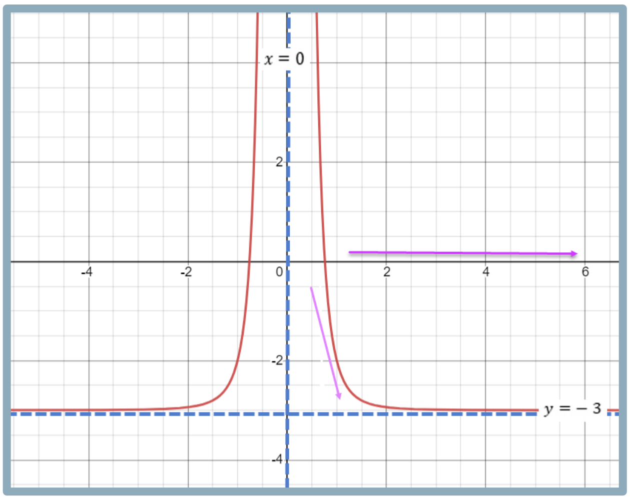
مثال 6 / تحقق من فهمك

قدر إن أمكن كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة

6A

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^4}-3\right)$$

x	-2	-1	0	1	2
y	-2.99	-2	غير معرفة	-2	-2.99



التحليل بيانياً:

مجال الدالة $= R-\{0\}$

للدالة خط تقاربي رأسي $x=0$

و خط تقاربي أفقي $y=-3$

يبين التمثيل البياني للدالة

أنه كلما زادت قيمة x فإن قيم الدالة $f(x)$ تقترب من العدد -3

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^4}-3\right)=-3$$

التعزيز عددياً:

تقترب قيم x من العدد ∞

x	10	100	1000	10000	100000
$f(x)$	-2.9999	-2.99999999	≈ -3	≈ -3	≈ -3

$f(x)$ تقترب من العدد -3

يبين نمط الدالة أنه كلما زادت قيمة x فإن قيم الدالة $f(x)$ تقترب من العدد -3

عودة إلى الفهرس

تقدير النهايات بيانياً

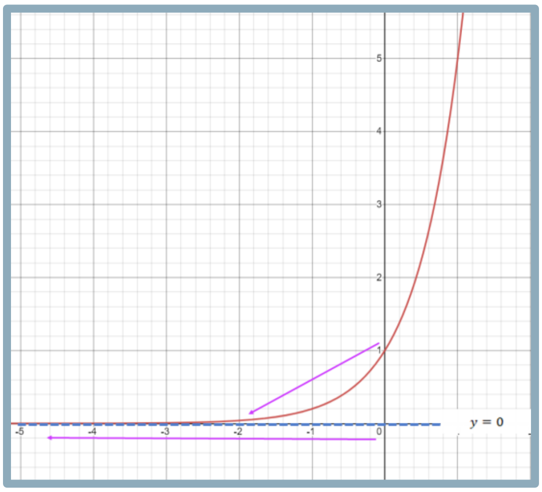
4 - I

مثال 6 / تحقق من فهمك

قدر أن امكن كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة

6B $\lim_{x\to-\infty} 5^x$

x	-1	0	1
y	$\frac{1}{5}$	1	5



التحليل بيانياً:

للدالة خط تقاربي أفقي $y = 0$

يبين التمثيل البياني للدالة

أنه كلما نقصت قيمة x فإن قيم الدالة $f(x)$ تقترب من العدد 0

$$\lim_{x\to-\infty} 5^x = 0$$

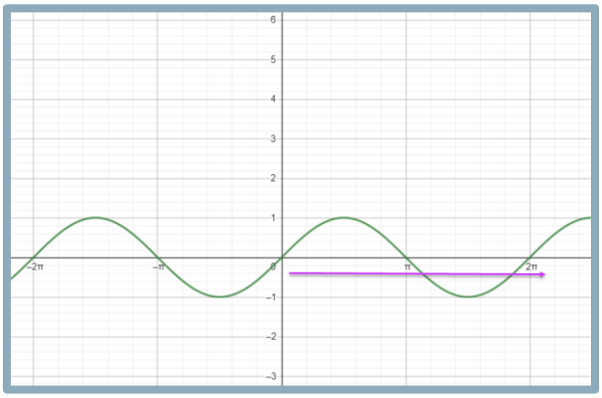
التعزيز عددياً:

تقترب قيم x من العدد $-\infty$

x	-1000	-100	-10
$f(x)$	≈ 0	1.268×10^{-70}	1.024×10^{-7}

يبين التمثيل البياني للدالة أنه كلما نقصت قيمة x فإن قيم الدالة $f(x)$ تقترب من العدد 0

6C $\lim_{x\to\infty} \sin x$



يبين التمثيل البياني للدالة
كلما تزايدت قيمة x فإن قيم الدالة $f(x)$ تتذبذب بين العددين -1 و 1

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \sin x$ غير موجودة

عودة إلى الفهرس

4 - I تقدير النهايات بيانياً

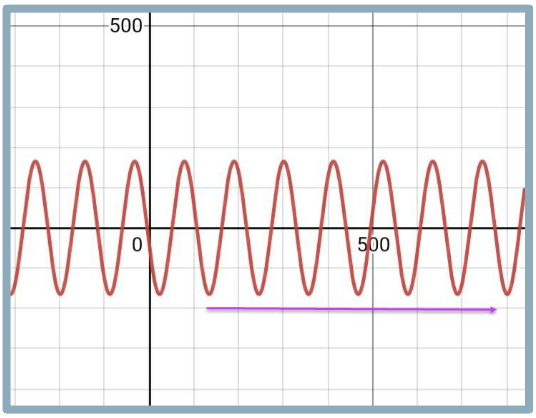
مثال 7 / تحقق من فهمك

مثال من واقع الحياة

7A

كهرباء : يزود مقبس في منطقة ما بفرق جهد كهربائي يعطى بالعلاقة $V(t) = 165 \sin 120\pi t$ حيث t الزمن بالثواني .

قدر $\lim_{t\to\infty} V(t)$ إذا كانت موجودة و فسر معناها



يبين التمثيل البياني للدالة

كلما تزايدت قيمة t فإن قيم الدالة $V(t)$

تتذبذب بين العددين -165 و 165

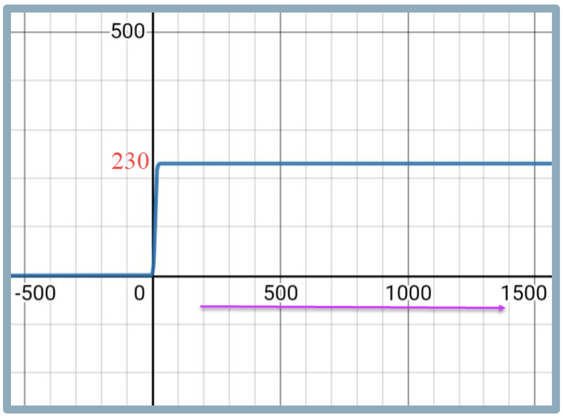
$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} V(t)$ غير موجودة

و هذا يعني أن الجهد الكهربائي يتذبذب بين العددين -165 و 165 مع مرور الوقت

7B

أحياء : عند وضع عدد من ذبابات الفاكهة في وعاء يحتوي حليباً و فاكهة و خميرة فإن عدد الذبذبات بعد t يوماً يعطى بالعلاقة $P(t) = \dfrac{230}{1 + 56.5(2.7)^{-0.37t}}$

قدر $\lim_{t\to\infty} P(t)$ إذا كانت موجودة و فسر معناها



يبين التمثيل البياني للدالة

كلما تزايدت قيمة t فإن قيم الدالة $P(t)$

تقترب من العدد 230

$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} P(t) = 230$

و هذا يعني أن الذبذبات ستصبح 230 مع مرور الوقت

عودة إلى الفهرس

2 - 4 حساب النهايات جبرياً

مثال 1 / تحقق من فهمك

استعمل خصائص النهايات لحساب كل نهاية مما يأتي :

1A $\lim_{x\to 2}(-x^3+4)$

$$\lim_{x\to 2}(-x^3+4) = -\left(\lim_{x\to 2} x\right)^3 + \lim_{x\to 2} 4$$
$$= -(2)^3 + 4 = -8 + 4 = -4$$

1B $\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{2x^2-x-15}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{2x^2-x-15} = \frac{\lim_{x\to 2} x - \lim_{x\to 2} 3}{2\left(\lim_{x\to 2} x\right)^2 - \lim_{x\to 2} x - \lim_{x\to 2} 15}$$
$$= \frac{2-3}{2(2)^2-(2)-15} = \frac{-1}{-9} = \frac{1}{9}$$

1C $\lim_{x\to -1}\sqrt{x+3}$

$$\lim_{x\to -1}\sqrt{x+3} = \sqrt{\lim_{x\to -1} x + \lim_{x\to -1} 3} = \sqrt{-1+3} = \sqrt{2}$$

مثال 2 / تحقق من فهمك

احسب كل نهاية مما يأتي بالتعويض المباشر إذا كان ممكناً ، و إلا فاذكر السبب:

2A $\lim_{x\to 4}(x^3-3x^2-5x+7)$

حساب النهاية بالتعويض المباشر

$$\lim_{x\to 4}(x^3-3x^2-5x+7) = (4)^3-3(4)^2-5(4)+7$$
$$= 64 - 48 - 20 + 7 = 3$$

2B $\lim_{x\to -5}\frac{x+1}{x^2+3}$

حساب النهاية بالتعويض المباشر

$$\lim_{x\to -5}\frac{x+1}{x^2+3} = \frac{-5+1}{(-5)^2+3} = \frac{-4}{28} = \frac{-1}{7}$$

2C $\lim_{x\to -8}\sqrt{x+6}$

لا يمكن حساب النهاية بالتعويض المباشر لأن الدالة دالة جذر تربيعي و عند حساب ما تحت الجذر يكون الناتج عدد سالب $\lim_{x\to -8}(x+6) = -8+6 = -2 < 0$

2D $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$

لا يمكن حساب النهاية بالتعويض المباشر لأنها دالة نسبية مقامها يساوي صفر عندما $x = 2$

عودة إلى الفهرس

4 - 2 حساب النهايات جبرياً

مثال 3 / تحقق من فهمك

احسب كل نهاية مما يأتي :

3A $\lim\limits_{x\to-2} \frac{x^3-3x^2-4x+12}{x+2}$

حساب النهاية بالتعويض المباشر

$$\lim_{x\to-2} \frac{x^3-3x^2-4x+12}{x+2} = \frac{0}{0}$$ كمية غير معينة

باستخدام القسمة التركيبية ثم التعويض

-2	1	-3	-4	12
		-2	10	- 12
	1	-5	6	0

خارج القسمة $= x^2 - 5x + 6$

$$\lim_{x\to-2} \frac{x^3-3x^2-4x+12}{x+2} = \lim_{x\to-2} \frac{(x^2-5x+6)(x+2)}{x+2} = \lim_{x\to-2}(x^2-5x+6)$$

$$= (-2)^2 - 5(-2) + 6$$

$$= 20$$

حل آخر :

باستخدام التحليل ثم الاختصار ثم التعويض

$$\lim_{x\to-2} \frac{x^3-3x^2-4x+12}{x+2} = \lim_{x\to-2} \frac{(x^3-3x^2)+(-4x+12)}{x+2}$$

$$= \lim_{x\to-2} \frac{x^2(x-3) - 4(x-3)}{x+2}$$

$$= \lim_{x\to-2} \frac{(x^2-4)(x-3)}{x+2}$$

$$= \lim_{x\to-2} \frac{\cancel{(x+2)}(x-2)(x-3)}{\cancel{x+2}}$$

$$= \lim_{x\to-2}(x-2)(x-3)$$

$$= (-2-2)(-2-3) = (-4)(-5) = 20$$

عودة إلى الفهرس

4 - 2 حساب النهايات جبرياً

مثال 3 / تحقق من فهمك — احسب كل نهاية مما يأتي :

3B $\lim_{x\to 6}\frac{x^2-7x+6}{3x^2-11x-42}$

حساب النهاية بالتعويض المباشر : كمية غير معينة $\lim_{x\to 6}\frac{x^2-7x+6}{3x^2-11x-42}=\frac{0}{0}$

باستخدام التحليل ثم الاختصار ثم التعويض

$$\lim_{x\to 6}\frac{x^2-7x+6}{3x^2-11x-42}=\lim_{x\to 6}\frac{(x-1)\cancel{(x-6)}}{(3x+7)\cancel{(x-6)}}$$

$$=\lim_{x\to 6}\frac{(x-1)}{3x+7}$$

$$=\frac{(6-1)}{3(6)+7}=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$$

مثال 4 / تحقق من فهمك — احسب كل نهاية مما يأتي :

4A $\lim_{x\to 25}\frac{x-25}{\sqrt{x}-5}$

حساب النهاية بالتعويض المباشر : كمية غير معينة $\lim_{x\to 25}\frac{x-25}{\sqrt{x}-5}=\frac{0}{0}$

بالضرب في المرافق ثم الاختصار ثم التعويض

$$\lim_{x\to 25}\frac{x-25}{\sqrt{x}-5}=\lim_{x\to 25}\frac{x-25}{\sqrt{x}-5}\times\frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+5}$$

$$=\lim_{x\to 25}\frac{(x-25)(\sqrt{x}+5)}{x-25}=\lim_{x\to 25}(\sqrt{x}+5)=\sqrt{25}+5=10$$

4B $\lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{x+4}}{x}$

حساب النهاية بالتعويض المباشر : كمية غير معينة $\lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{x+4}}{x}=\frac{0}{0}$

بالضرب في المرافق ثم الاختصار ثم التعويض

$$\lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{x+4}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{x+4}}{x}\times\frac{2+\sqrt{x+4}}{2+\sqrt{x+4}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4-(x+4)}{x(2+\sqrt{x+4})}=\lim_{x\to 0}\frac{4-x-4}{x(2+\sqrt{x+4})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{(2+\sqrt{x+4})}=\frac{-1}{(2+\sqrt{0+4})}=-\frac{1}{4}$$

عودة إلى الفهرس

مجموعة رفعة الرياضيات

تطوير - إنتاج - توثيق

2 - 4 حساب النهايات جبرياً

مثال 5 / تحقق من فهمك

احسب كل نهاية مما يأتي :

5A $\lim\limits_{x\to\infty}(-x^3-4x^2+9)$

$$\lim_{x\to\infty}(-x^3-4x^2+9)=\lim_{x\to\infty}(-x^3)$$
$$=(-\infty)^3=-\infty$$

نهاية دالة كثيرة الحدود عند المالانهاية

نهاية دالة القوة عند المالانهاية

5B $\lim\limits_{x\to-\infty}(4x^6+3x^5-x)$

$$\lim_{x\to-\infty}(4x^6+3x^5-x)=4\lim_{x\to-\infty}x^6$$
$$=4(-\infty)^6=4(\infty)=\infty$$

نهاية دالة كثيرة الحدود عند المالانهاية

نهاية دالة القوة عند المالانهاية

5C $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-6x^2+4x^5)$

$$\lim_{x\to-\infty}(2x-6x^2+4x^5)=4\lim_{x\to-\infty}(x)^5$$
$$=4(-\infty)^5=-\infty$$

نهاية دالة كثيرة الحدود عند المالانهاية

نهاية دالة القوة عند المالانهاية

مثال 6 / تحقق من فهمك

احسب كل نهاية مما يأتي :

6A $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5}{x-10}$

بقسمة كل حد على أعلى قوة في المقام :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5}{x-10}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{5}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{10}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{5}{x}}{1-\frac{10}{x}}=\frac{0}{1-0}=0$$

6B $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^2+7}{5x+1}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^2+7}{5x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{-3x^2}{x^2}+\frac{7}{x^2}}{\frac{5x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3+\frac{7}{x^2}}{\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{-3+0}{0-0}=-\infty$$

6C $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-3x^2+1}{2x^3+4x}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3-3x^2+1}{2x^3+4x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7x^3}{x^3}-\frac{3x^2}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3}-\frac{4x}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{7-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}}{2-\frac{4}{x^2}}=\frac{7-0+0}{2-0}=\frac{7}{2}=3.5$$

ملاحظة : يمكن حل التمرين بمقارنة درجتي البسط و المقام .

عودة إلى الفهرس

حساب النهايات جبرياً 4 - 2

مثال 7/ تحقق من فهمك

احسب نهاية كل متتابعة مما يأتي :

7A $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4}{n^2+1}$

نوجد الحدود الخمسة الأولى

الحد الثالث $= \dfrac{4}{3^2+1} = \dfrac{2}{5}$ الحد الثاني $= \dfrac{4}{2^2+1} = \dfrac{4}{5}$ الحد الأول $= \dfrac{4}{1^2+1} = 2$

الحد الخامس $= \dfrac{4}{5^2+1} = \dfrac{4}{26}$ الحد الرابع $= \dfrac{4}{4^2+1} = \dfrac{4}{17}$

القيمة التقريبية للخمسة حدود الأولى : $2 , 0.8 , 0.4 , 0.2 , 0.1$ تقترب من العدد صفر

بقسمة كل حد على أعلى قوة في المقام :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{0}{1+0} = 0$$

7B $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3}{3n+8}$

نوجد الحدود الخمسة الأولى

الحد الثالث $= \dfrac{2(3)^3}{3(3)+8} = \dfrac{54}{17}$ الحد الثاني $= \dfrac{2(2)^3}{3(2)+8} = \dfrac{8}{7}$ الحد الأول $= \dfrac{2(1)^3}{3(1)+8} = \dfrac{2}{11}$

الحد الخامس $= \dfrac{2(5)^3}{3(5)+8} = \dfrac{250}{23}$ الحد الرابع $= \dfrac{2(4)^3}{3(4)+8} = \dfrac{32}{5}$

القيمة التقريبية للخمسة حدود الأولى : $0.18 , 1.14 , 3.18 , 6.4 , 10.9$ تتزايد بلا حدود

بقسمة كل حد على أعلى قوة في المقام :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3}{3n+8} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n^3}{n^3}}{\frac{3n}{n^3}+\frac{8}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\frac{3}{n^2}+\frac{8}{n^3}} = \frac{2}{0+0} = \infty$$

عودة إلى الفهرس

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

4 - 2 حساب النهايات جبرياً

مثال 7/ تحقق من فهمك

احسب نهاية كل متتابعة مما يأتي :

7C $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{9}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]\right)$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{9}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{9}{n^3}\left[\frac{n(2n^2+3n+1}{6}\right]\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{18n^2+27n+9}{6n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{18n^2}{n^2}+\frac{27n}{n^2}+\frac{9}{n^2}}{\frac{6n^2}{n^2}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{18+\frac{27}{n}+\frac{9}{n^2}}{6}\right)=\frac{18+0+0}{6}=3$$

عودة إلى الفهرس

4 - 3 المماس و السرعة المتجهة

مثال 1/ تحقق من فهمك

أوجد ميل مماس كل منحنى مما يأتي عند النقط المعطاة :

1A $(3,9)$, $y = x^2$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{2xh+h^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{h(2x+h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}(2x+h)=(2x+0)=2x$$

إذن ميل المماس عند النقطة $(3,9)$ يساوي : $2(3) = 6$

1B $(-2,8)$, $y = x^2 + 4$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{[(x+h)^2+4]-[x^2+4]}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{[x^2+2xh+h^2+4]-[x^2+4]}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{x^2+2xh+h^2+4-x^2-4}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{2xh+h^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{h(2x+h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}(2x+h)=2x+0=2x$$

إذن ميل المماس عند النقطة $(-2,8)$ يساوي : $2(-2) = -4$

عودة إلى الفهرس

4 - 3 المماس و السرعة المتجهة

مثال 2/ تحقق من فهمك

أوجد معادلة ميل منحنى كل دالة عند أي نقطة :

2A $y = x^2 - 4x + 2$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{[(x+h)^2 - 4(x+h) + 2] - [x^2 - 4x + 2]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{[x^2 + 2xh + h^2 - 4x - 4h + 2] - [x^2 - 4x + 2]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^2 + 2xh + h^2 - 4x - 4h + 2 - x^2 + 4x - 2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2xh + h^2 - 4h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(2x + h - 4)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}(2x + h - 4) = 2x + 0 - 4 = 2x - 4$$

إذن ميل المماس عند أي النقطة يساوي : $2x - 4$

2B $y = x^3$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}(3x^2 + 3xh + h^2)$$

$$= 3x^2 + 3x(0) + (0)^2 = 3x^2$$

إذن ميل المماس عند أي النقطة يساوي : $3x^2$

عودة إلى الفهرس

4 - 3 المماس و السرعة المتجهة

مثال 3/ تحقق من فهمك

مثال من واقع الحياة :

3 بالون : تمثل $h(t) = 5 + 65t - 16t^2$ الارتفاع بالأقدام بعد t ثانية لبالون يصعد رأسياً للأعلى ، ما السرعة المتوسطة للبالون بين $t = 1s$, $t = 2s$ ؟

$$b = 2 \qquad a = 1$$

$$h(t) = 5 + 65t - 16t^2 \qquad h(t) = 5 + 65t - 16t^2$$

$$h(2) = 5 + 65(2) - 16(2)^2 = 71 \qquad h(1) = 5 + 65(1) - 16(1)^2 = 54$$

$$v_{avg} = \frac{h(b) - h(a)}{b - a} = \frac{h(2) - h(1)}{2 - 1} = \frac{71 - 54}{1} = 17\ ft/s$$

إذن السرعة المتوسطة لارتفاع البالون تساوي : $17\ ft/s$ للأعلى

مثال 4 / تحقق من فهمك

4 سقطت علبة مادة التنظيف من يد عامل في أثناء قيامه بتنظيف نافذة بناية على ارتفاع $1400\ ft$ عن سطح الأرض و تمثل المعادلة $h(t) = 1400 - 16t^2$ ارتفاع العلبة بالأقدام بعد t ثانية من سقوطها ، أوجد السرعة المتجهة اللحظية للعلبة $v(t)$ بعد $7s$ ؟

$$v(t) = \lim_{h\to 0}\frac{h(t+h) - h(t)}{h} \Longrightarrow v(7) = \lim_{h\to 0}\frac{h(7+h) - h(7)}{h}$$

$$v(7) = \lim_{h\to 0}\frac{[1400 - 16(7+h)^2] - [1400 - 16(7)^2]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{[1400 - 16(49 + 14h + h^2] - [1400 - 784]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1400 - 784 - 224h - 16h^2 - 1400 + 784}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-227h - 16h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(-224 - 16h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}(-224 - 16h) = -224 - 16(0) = -224$$

إذن سرعة سقوط علبة الدهان بعد $7s$ تساوي : $224\ ft/s$ للأسفل

عودة إلى الفهرس

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

3 - 4 المماس و السرعة المتجهة

مثال 5 / تحقق من فهمك

5 تمثل الدالة $h(t) = 90t - 16t^2$ ارتفاع صاروخ بعد t ثانية من إطلاقه رأسياً من مستوى سطح البحر حيث الارتفاع بالأقدام ، أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للصاروخ عند أي زمن ؟

$$v(t) = \lim_{h\to 0}\frac{h(t+h)-h(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{[90(t+h)-16(t+h)^2]-[90t-16t^2]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{[90t+90h-16(t^2+2th+h^2]-[90t-16t^2]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{90t+90h-16t^2-32th-16h^2-90t+16t^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{90h-32th-16h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(90-32t-16h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}(90-32t-16h) = 90-32t-16(0) = 90-32t$$

أي أن معادلة السرعة المتجهة اللحظية
عند أي زمن هي :

$$v(t) = 90 - 32t$$

عودة إلى الفهرس

4 - 4 المشتقات

مثال 1 / تحقق من فهمك

أوجد مشتقة $f(x)$ باستعمال النهايات ثم احسب قيمة المشتقة عند قيم x المعطاة :

1A $\quad f(x) = 6x^2 + 7 \quad , \quad x = 2 , 5$

$$\grave{f}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[6(x+h)^2 + 7] - [6x^2 + 7]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[6(x^2 + 2xh + h^2) + 7] - [6x^2 + 7]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{6x^2 + 12xh + 6h^2 + 7 - 6x^2 - 7}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{12xh + 6h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(12x + 6h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (12x + 6h) = 12x + 6(0) = 12x$$

أي أن مشتقة $f(x)$ هي : $\grave{f}(x) = 12x$

نحسب قيمة المشتقة عند $x = 2 , 5$:

$\grave{f}(x) = 12x$

$\grave{f}(5) = 12(5) = 60$

$\grave{f}(x) = 12x$

$\grave{f}(2) = 12(2) = 24$

عودة إلى الفهرس

4 - 4 المشتقات

مثال 1 / تحقق من فهمك

أوجد مشتقة $f(x)$ باستعمال النهايات ثم احسب قيمة المشتقة عند قيم x لمعطاة :

1B $f(x) = -5x^2 + 2x - 12 \quad , \quad x = 1, 4$

$$\grave{f}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[-5(x+h)^2 + 2(x+h) - 12] - [-5x^2 + 2x - 12]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[-5(x^2 + 2xh + h^2) + 2(x+h) - 12] - [-5x^2 + 2x - 12]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-5x^2 - 10xh - 5h^2 + 2x + 2h - 12 + 5x^2 - 2x + 12}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-10xh - 5h^2 + 2h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(-10x + 5h + 2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (-10x + 5h + 2) = -10x + 5(0) + 2 = -10x + 2$$

أي أن مشتقة $f(x)$ هي : $\grave{f}(x) = -10x + 2$

نحسب قيمة المشتقة عند $x = 1, 4$:

$\grave{f}(x) = -10x + 2$

$\grave{f}(4) = -10(4) + 2 = -38$

$\grave{f}(x) = -10x + 2$

$\grave{f}(1) = -10(1) + 2 = -8$

عودة إلى الفهرس

4 - 4 المشتقات

مثال 2 / تحقق من فهمك — أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي :

2A

$j(x) = x^4$

$\acute{j}(x) = 4\,x^{4-1} = 4\,x^3$

2B

$k(x) = \sqrt{x^3}$

$k(x) = x^{\frac{3}{2}}$

$\grave{k}(x) = \frac{3}{2}\,x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}\,x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

حل آخر :

مشتقة دالة الجذر التربيعي = $\frac{\text{مشتقة ما تحت الجذر}}{2\times\text{الجذر}}$

$\grave{k}(x) = \frac{3x^{3-1}}{2\sqrt{x^3}} = \frac{3x^2}{2x^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{2}\,x^{2-\frac{3}{2}}$

$= \frac{3}{2}\,x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

2C

$m(x) = \frac{1}{x^4}$

$m(x) = x^{-4}$

$\grave{m}(x) = -4\,x^{-4-1} = -4\,x^{-5} = -\frac{4}{x^5}$

حل آخر :

مشتقة $\left(\frac{\text{عدد ثابت}}{\text{دالة}}\right)$ = $\frac{-\text{ مشتقة المقام}\times\text{الثابت}}{\text{مربع المقام}}$

$\grave{m}(x) = \frac{-1\ \times 4\,x^{4-1}}{(x^4)^2} = -\frac{4\,x^3}{x^8} = -\frac{4}{x^5}$

مثال 3 / تحقق من فهمك — أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي :

3A

$f(x) = 2x^5 - x^3 - 102$

$\acute{f}(x) = 2\times 5\,x^{5-1} - 3\,x^{3-1} - 0 \ = 10\,x^4 - 3x^2$

3B

$g(x) = 3x^4(x+2)$

$g(x) = 3x^5 + 6\,x^4$

$\acute{g}(x) = 3\times 5\,x^{5-1} + 6\times 4\,x^{4-1} = 15\,x^4 + 24x^3$

2C

$h(x) = \frac{4x^4 - 3x^2 + 5x}{x}$

$h(x) = \frac{4x^4}{x} - \frac{3x^2}{x} + \frac{5x}{x} = 4x^3 - 3x + 5$

$\acute{h}(x) = 4\times 3\,x^{3-1} - 3(1) + 0 = 12\,x^2 - 3$

عودة إلى الفهرس

المشتقات 4 - 4

مثال 4/ تحقق من فهمك

4 الدالة $h(t) = 55t - 16t^2$ تمثل الارتفاع بالأقدام بعد t ثانية لكرة قذفت رأسياً إلى الأعلى ، أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية للكرة عند أي زمن .

$h(t) = 55t - 16t^2$ الدالة الأصلية

$\grave{h}(t) = 55(1) - 16 \times 2t$

$\grave{h}(t) = 55 - 32t$

أي أن سرعة الكرة اللحظية هي $v(t) = 55 - 32t$

مثال 5 / تحقق من فهمك

مثال من واقع الحياة :

5 رياضة القفز : الدالة $h(t) = 20t^2 - 160t + 330$ تمثل ارتفاع سعد بالأقدام في أثناء مشاركته في قفزة البنجي (القفز من أماكن مرتفعة بحيث تكون القدمان موثقين بحبل مطاطي) حيث t الزمن بالثواني في الفترة $[0, 6]$، أوجد أقصى و أدنى ارتفاع يبلغه سعد في هذه الفترة الزمنية .

١) نوجد المشتقة عند $h\grave{}(t)$:

$\grave{h}(x) = 40t - 160$

٢) نوجد النقط الحرجة بحل المعادلة $h(t)\grave{} = 0$:

$\grave{h}(x) = 0 \Rightarrow 40t - 160 = 0$

$\Rightarrow 40t = 160$

$\Rightarrow t = 4 \in [0, 6]$

إذن $t = 4$ نقطة الحرجة للدالة

٣) نوجد قيم الدالة عند النقط الحرجة و عند الأطراف :

$h(t) = 20t^2 - 160t + 330$

$h(4) = 20(4)^2 - 160(4) + 330 = 10$

$h(0) = 20(0)^2 - 160(0) + 330 = 330$

$h(6) = 20(6)^2 - 160(6) + 330 = 90$

٤) أقصى ارتفاع = 330 عند $t = 0$

أدنى ارتفاع = 10 عند $t = 4$

عودة إلى الفهرس

المشتقات

4 - 4

مثال 6 / تحقق من فهمك

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي :

6A $h(x) = (x^5 + 13x^2)(7x^3 - 5x^2 + 18)$

مشتقة حاصل ضرب دالتين :

$$\grave{h}(x) = (5x^4 + 26x)(7x^3 - 5x^2 + 18) + (x^5 + 13x^2)(21x^2 - 10x)$$

$$\grave{h}(x) = 35x^7 - 25x^6 + 90x^4 + 182x^4 - 130x^3 + 468x + 21x^7 - 10x^6 + 273x^4 - 130x^3$$

$$\grave{h}(x) = 56x^7 - 35x^6 + 545x^4 - 260x^3 + 468x$$

حل آخر : بفك الأقواس ثم الاشتقاق

$$h(x) = (x^5 + 13x^2)(7x^3 - 5x^2 + 18)$$

$$h(x) = 7x^8 - 5x^7 + 18x^5 + 91x^5 - 65x^4 + 234x^2$$

$$h(x) = 7x^8 - 5x^7 + 109x^5 - 65x^4 + 234x^2$$

$$\grave{h}(x) = 56x^7 - 35x^6 + 545x^4 - 260x^3 + 468x$$

6B $h(x) = (x^2 + x^3 + x)(8x^2 + 3)$

مشتقة حاصل ضرب دالتين :

$$\grave{h}(x) = (2x + 3x^2 + 1)(8x^2 + 3) + (x^2 + x^3 + x)(16x)$$

$$\grave{h}(x) = 16x^3 + 6x + 24x^4 + 9x^2 + 8x^2 + 3 + 16x^3 + 16x^4 + 16x^2$$

$$\grave{h}(x) = 40x^4 + 32x^3 + 33x^2 + 6x + 3$$

حل آخر : بفك الأقواس ثم الاشتقاق

$$h(x) = (x^2 + x^3 + x)(8x^2 + 3)$$

$$h(x) = 8x^4 + 3x^2 + 8x^5 + 3x^3 + 8x^3 + 3x$$

$$h(x) = 8x^5 + 8x^4 + 11x^3 + 3x^2 + 3x$$

$$\grave{h}(x) = 40x^4 + 32x^3 + 33x^2 + 6x + 3$$

عودة إلى الفهرس

4 - 4 المشتقات

مثال 7 / تحقق من فهمك

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي :

7A

$$j(x) = \frac{7x - 10}{12x + 5}$$

مشتقة حاصل قسمة دالتين :

$$\acute{j}(x) = \frac{\text{مشتقة المقام} \times \text{البسط} - \text{المقام} \times \text{مشتقة البسط}}{\text{مربع المقام}}$$

$$\acute{j}(x) = \frac{(7)(12x + 5) - (7x - 10)(12)}{(12x + 5)^2}$$

$$\acute{j}(x) = \frac{84x + 35 - 84x + 120}{(12x + 5)^2}$$

$$\acute{j}(x) = \frac{155}{(12x + 5)^2}$$

7B

$$k(x) = \frac{6x}{2x^2 + 4}$$

مشتقة حاصل قسمة دالتين :

$$\acute{k}(x) = \frac{\text{مشتقة المقام} \times \text{البسط} - \text{المقام} \times \text{مشتقة البسط}}{\text{مربع المقام}}$$

$$\acute{k}(x) = \frac{(6)(2x^2 + 4) - (6x)(4x)}{(2x^2 + 4)^2}$$

$$\acute{k}(x) = \frac{12x^2 + 24 - 24x^2}{(2x^2 + 4)^2}$$

$$\acute{k}(x) = \frac{-12x^2 + 24}{(2x^2 + 4)^2}$$

عودة إلى الفهرس

4- 5 المساحة تحت المنحنى والتكامل

مثال 1 / تحقق من فهمك

المساحة تحت المنحنى باستعمال مستطيلات :

1 قرب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = -16x^2 + 24x$ و المحور x على الفترة $[0, 24]$ باستعمال $6, 8, 12$ مستطيلاً على الترتيب . استعمل الطرف الأيمن لقاعدة كل مستطيل لتحديد ارتفاعه .

$$\text{طول الفترة} = \frac{\text{نهاية الفترة} - \text{بداية الفترة}}{\text{عدد المستطيلات}}$$

باستعمال 6 مستطيلات :

$$\text{عرض المستطيل} = \text{طول الفترة} = \frac{24-0}{6} = 4$$

الفترات : $[0, 4], [4, 8], [8, 12], [12, 16], [16, 20], [20, 24]$

$$\text{المساحة} = 4.f(4) + 4.f(8) + 4.f(12) + 4.f(16) + 4.f(20) + 4.f(24)$$

المساحة $= 2240$ وحدة مربعة

باستعمال 8 مستطيلات :

$$\text{عرض المستطيل} = \text{طول الفترة} = \frac{24-0}{8} = 3$$

الفترات :

$[0, 3], [3, 6], [6, 9], [9, 12], [12, 15], [15, 18]\ [18, 21], [21, 24]$

$$\text{المساحة} = 3.f(3) + 3.f(6) + 3.f(9) + 3.f(12) + 3.f(15) + 3.f(18) + 3.f(21) + 3.f(24)$$

المساحة $= 2268$ وحدة مربعة

باستعمال 12 مستطيلات :

$$\text{عرض المستطيل} = \text{طول الفترة} = \frac{24-0}{12} = 2$$

الفترات :

$[0, 2], [2, 4], [4, 6], [6, 8], [8, 10], [10, 12]\ [12, 14], [14, 16]$
$[16, 18], [18, 20]\ [20, 22], [22, 24]$

$$\text{المساحة} = 2.[f(2) + f(4) + f(6) + f(8) + f(10) + f(12) + f(14) + f(16) + f(18) + f(20) + f(22) + f(24)]$$

المساحة $= 2288$ وحدة مربعة

عودة إلى الفهرس

4- 5 المساحة تحت المنحنى والتكامل

مثال2/ تحقق من فهمك

المساحة تحت المنحنى باستعمال الأطراف اليمنى و اليسرى للمستطيلات :

2 قرب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = \frac{12}{x}$ و المحور x على الفترة $[1, 5]$ باستعمال مستطيلات عرض كل واحد منها وحدة واحدة . استعمل الأطراف اليمنى ثم اليسرى لقواعد المستطيلات لتحديد ارتفاعها ثم احسب الوسط للتقريبين .

باستعمال الأطراف اليمنى :

الفترات : $[1, 2], [2, 3], [3, 4], [4, 5]$

المساحة $= 1.f(2) + 1.f(3) + 1.f(4) + 1.f(5)$

المساحة $= 15.4$ وحدة مربعة

باستعمال الأطراف اليسرى :

الفترات : $[1, 2], [2, 3], [3, 4], [4, 5]$

المساحة $= 1.f(1) + 1.f(2) + 1.f(3) + 1.f(4)$

المساحة $= 25$ وحدة مربعة

الوسط $= \dfrac{15.4 + 25}{2} = 20.2$ وحدة مربعة

عودة إلى الفهرس

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

5 -4 المساحة تحت المنحنى والتكامل

مثال 3 / تحقق من فهمك

استعمل النهايات لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة و المحور و المعطاة بالتكامل المحدد في كل مما يلي:

3A $\int_0^1 3x^2\,dx$

١) نوجد Δx :

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \Rightarrow \Delta x = \frac{1-0}{n} \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{n}$$

٢) نوجد x_i :

$$x_i = a + i\cdot\Delta x \Rightarrow x_i = 0 + i.\frac{1}{n}$$

٣) تعريف التكامل باستخدام مجموع ريمان :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$\int_0^1 3x^2dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(i.\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) \quad , \quad f(x) = 3x^2$$

$$\int_0^1 3x^2dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 3\left(i.\frac{1}{n}\right)^2\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\int_0^1 3x^2dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 3\,i^{\,2}.\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\int_0^1 3x^2dx = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^{\,2} \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} i^{\,2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\int_0^1 3x^2dx = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^3}.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\int_0^1 3x^2dx = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+1}{2n^2}$$

$$\int_0^1 3x^2dx = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{2n^2} + \lim_{n\to\infty}\frac{3n}{2n^2} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n^2}$$

$$\int_0^1 3x^2dx = \lim_{n\to\infty}1 + \lim_{n\to\infty}\frac{3}{2n} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n^2} = 1+0+0 = 1$$ وحدة مربعة

عودة إلى الفهرس

4- 5 المساحة تحت المنحنى والتكامل

مثال 3 / تحقق من فهمك

استعمل النهايات لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة و المحور و المعطاة بالتكامل المحدد في كل مما يلي:

3B $\int_0^3 x\,dx$

١) نوجد Δx :

$$\triangle x_i = \frac{b-a}{n} \Rightarrow \triangle x_i = \frac{3-0}{n} \Rightarrow \triangle x_i = \frac{3}{n}$$

٢) نوجد x_i :

$$x_i = a + i \cdot \triangle x_i \Rightarrow x_i = 0 + i.\frac{3}{n}$$

٣) تعريف التكامل باستخدام مجموع ريمان :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$\int_0^3 x\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(i.\frac{3}{n}\right)\left(\frac{3}{n}\right) \quad , \quad f(x) = x$$

$$\int_0^3 x\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(i.\frac{3}{n}\right)\left(\frac{3}{n}\right)$$

$$\int_0^3 x dx = \lim_{n\to\infty} \frac{9}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\int_0^3 x\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{9}{n^2} . \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\int_0^3 x\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{9n+9}{2\,n}$$

$$\int_0^3 x\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{9n}{2n} + \lim_{n\to\infty} \frac{9}{2n}$$

$$\int_0^3 x\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{9}{2} + \lim_{n\to\infty} \frac{9}{2n} = \frac{9}{2} + 0 = \frac{9}{2}$$ وحدة مربعة

عودة إلى الفهرس

4- 5 المساحة تحت المنحنى والتكامل

مثال 4 / تحقق من فهمك

استعمل النهايات لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة و المحور و المعطاة بالتكامل المحدد في كل ممايلي:

4A $\int_1^3 x^2\, dx$

١) نوجد Δx :

$$\triangle x_i = \frac{b-a}{n} \Rightarrow \triangle x_i = \frac{3-1}{n} \Rightarrow \triangle x_i = \frac{2}{n}$$

٢) نوجد x_i :

$$x_i = a + i \cdot \triangle x_i \Rightarrow x_i = 1 + i.\frac{2}{n}$$

٣) تعريف التكامل باستخدام مجموع ريمان :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$\int_1^3 x^2 dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(1 + i.\frac{2}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right) \quad , \quad f(x) = x^2$$

$$\int_1^3 x^2 dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(1 + i.\frac{2}{n}\right)^2 \left(\frac{2}{n}\right)$$

$$\int_1^3 x^2 dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{4}{n}\, i + i^{\,2}.\frac{4}{n^2}\right)\left(\frac{2}{n}\right) \qquad \sum_{i=1}^{n} i^{\,2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\int_1^3 x^2 dx = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2\right) \qquad \sum_{i=1}^{n} = \frac{n(n+1)}{2} \;,\; \sum_{i=1}^{n} k = kn$$

$$\int_1^3 x^2 dx = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}.n + \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n^2}\; \frac{n(n+1)}{2} + \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n^3}.\; \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\int_1^3 x^2 dx = \lim_{n\to\infty} 2 + \lim_{n\to\infty} \frac{4n+4}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{8n^2+12n+4}{3n^2} = 2 + 4 + \frac{8}{3} = \frac{26}{3}$$ وحدة مربعة

عودة إلى الفهرس

4- 5 المساحة تحت المنحنى والتكامل

مثال 4 / تحقق من فهمك

استعمل النهايات لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة و المحور و المعطاة بالتكامل المحدد في كل ممايلي:

4B $\int_{2}^{4} x^3\,dx$

١) نوجد Δx :

$$\triangle x_i = \frac{b-a}{n} \Rightarrow \triangle x_i = \frac{4-2}{n} \Rightarrow \triangle x_i = \frac{2}{n}$$

٢) نوجد x_i :

$$x_i = a + i \cdot \triangle x_i \Rightarrow x_i = 2 + i.\frac{2}{n}$$

٣) تعريف التكامل باستخدام مجموع ريمان :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$\int_2^4 x^3 dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(2 + i.\frac{2}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right) \quad , \quad f(x) = x^3$$

$$\int_2^4 x^3 dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(2 + i.\frac{2}{n}\right)^3 \left(\frac{2}{n}\right) \qquad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4}$$

$$\int_2^4 x^3 dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(8 + \frac{24}{n}\,i + i^2.\frac{24}{n^2} + \frac{8}{n^3}\,i^3\right)\left(\frac{2}{n}\right) \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\int_2^4 x^3 dx = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} 8 + \frac{24}{n}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{24}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^3\right) \qquad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \;,\; \sum_{i=1}^{n} k = kn$$

$$\int_2^4 x^3 dx = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}.8n + \lim_{n\to\infty} \frac{48}{n^2}\;\frac{n(n+1)}{2} + \lim_{n\to\infty} \frac{48}{n^3}.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \lim_{n\to\infty} \frac{16}{n^4}.\frac{n^2\,(n+1)^2}{4}$$

$$\int_2^4 x^3 dx = \lim_{n\to\infty} 16 + \lim_{n\to\infty} \frac{24n+24}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{16n^2+24n+8}{n^2} + \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+8n+4}{n^2}$$

$\int_2^4 x^3 dx = 16 + 24 + 16 + 4 = 60$ وحدة مربعة

عودة إلى الفهرس

4- 5 المساحة تحت المنحنى والتكامل

مثال 5 / تحقق من فهمك — مثال من واقع الحياة :

5 طلاء : لدي عبدالله كمية من الطلاء تكفي لطلاء $30\ ft^2$ هل تكفي لطلاء جزأين من جدار مساحة كل منهما بالقدم المربع تعطى بالتكامل $\int_0^5 (5-0.2x^2)\,dx$ برر إجابتك

لإيجاد مساحة الجزء الواحد

١) نوجد Δx :

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \Rightarrow \Delta x = \frac{5-0}{n} \Rightarrow \Delta x = \frac{5}{n}$$

٢) نوجد x_i :

$$x_i = a + i\cdot\Delta x \Rightarrow x_i = 0 + i.\frac{5}{n} = \frac{5}{n}i$$

٣) تعريف التكامل باستخدام مجموع ريمان :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$f(x) = 5 - 0.2x^2 \quad , \quad \int_0^5 (5-0.2x^2)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{5}{n}i\right)\left(\frac{5}{n}\right)$$

$$\int_0^5 (5-0.2x^2)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[5-0.2\left(\frac{5}{n}i\right)^2\right]\left(\frac{5}{n}\right)$$

$$\int_0^5 (5-0.2x^2)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(5-\frac{5}{n^2}i^2\right)\left(\frac{5}{n}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\int_0^5 (5-0.2x^2)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{5}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}5 - \frac{5}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i^2\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} k = kn$$

$$\int_0^5 (5-0.2x^2)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{5}{n}.5n \quad -\lim_{n\to\infty}\frac{25}{n^3}.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\int_0^5 (5-0.2x^2)dx = \lim_{n\to\infty} 25 - \lim_{n\to\infty}\frac{50n^2+75n+25}{6n^2} = 25 - \frac{50}{6} = \frac{50}{3} \quad ft^2$$

$$\text{المساحة} = 2\int_0^5 (5-0.2x^2)dx = 2\times\frac{50}{3} = \frac{100}{3} = 33.3 \quad ft^2$$

لذلك كمية الطلاء لا تكفي لأن مساحة الجزأين أكثر من $30\ ft^2$

عودة إلى الفهرس

4- 6 النظرية الأساسية في التفاضل و التكامل

مثال 1 / تحقق من فهمك

أوجد دالتين أصليتين مختلفتين لكل دالة مما يأتي :

1A $2x$

نبحث عن دالة مشتقتها $2x$

$F(x) = x^2$ أو $F(x) = x^2 + 1$

1B $-3x^{-4}$

نبحث عن دالة مشتقتها $-3x^{-4}$

$F(x) = x^{-3}$ أو $F(x) = x^{-3} + 1$

مثال 2 / تحقق من فهمك

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي :

2A $f(x) = 6x^4$

$$F(x) = \frac{6x^{4+1}}{4+1} + C = \frac{6}{5}x^5 + C$$

2B $f(x) = \frac{10}{x^3}$

$$f(x) = 10x^{-3}$$

$$F(x) = \frac{10x^{-3+1}}{-3+1} + C = -5x^{-2} + C = -\frac{5}{x^2} + C$$

2C $f(x) = 8x^7 + 6x + 2$

$$F(x) = \frac{8x^{7+1}}{7+1} + \frac{6x^{1+1}}{1+1} + 2x + C$$

$$F(x) = \frac{8x^8}{8} + \frac{6x^2}{2} + 2x + C$$

$$F(x) = x^8 + 3\,x^2 + \ 2x + C$$

عودة إلى الفهرس

مثال 3 / تحقق من فهمك

مثال من واقع الحياة :

سقوط حر : عند قيام فني بإصلاح نافذة برج على ارتفاع $120\ ft$ سقطت محفظته نحو الأرض ، تمثل $v(t) = -32t$ سرعة المحفظة المتجهة اللحظية بالأقدام لكل ثانية .

A) أوجد دالة موقع المحفظة $s(t)$ بعد t ثانية من سقوطها .

B) أوجد الزمن الذي تستغرقه المحفظة حتى تصل إلى سطح الأرض .

A) نوجد دالة الموقع :

$$s(t) = \int v(t)\ dt$$

$$s(t) = \int -32t\ dt = \frac{-32\,t^2}{2} + C = -16t^2 + C$$

لإيجاد ثابت التكامل : $t = 0$ و $s(t) = 120\ ft$

$$s(t) = -16t^2 + C$$

$$120 = -16(0)^2 + C \Longrightarrow C = 120$$

$$s(t) = -16t^2 + 120$$

B) تصل المحفظة إلى سطح الأرض عندما المسافة تساوي صفر :

$$s(t) = -16t^2 + 120$$

$$0 = -16t^2 + 120$$

$$16t^2 = 120$$

$$t^2 = \frac{120}{16}$$

$$t = \sqrt{\frac{120}{16}} \Longrightarrow t = 2.7$$

إذن الزمن الذي تستغرقه المحفظة حتى تصل إلى سطح الأرض يساوي تقريباً 2.7 s

عودة إلى الفهرس

6 -4 النظرية الأساسية في التفاضل و التكامل

مثال 4 / تحقق من فهمك احسب كل تكامل محدد مما يأتي :

4A $\int_{2}^{5} 3x^2\,dx$

$$\int_{2}^{5} 3x^2\,dx = \frac{3x^{2+1}}{2+1}\Big]_2^5 = \frac{3x^3}{3}\Big]_2^5 = x^3]_2^5 = [5^3]-[2^3] = 125-8 = 117$$

4B $\int_{1}^{2} (16x^3-6x^2)\,dx$

$$\int_{1}^{2} (16x^3-6x^2)\,dx = \frac{16\,x^{3+1}}{3+1} - \frac{6x^{2+1}}{2+1}\Big]_1^2 = \frac{16\,x^4}{4} - \frac{6x^3}{3}\Big]_1^2$$

$$= 4x^4-2x^3]_1^2 = [4(2)^4-2(\,2)^3]-[4(1)^4-2(\,1)^3]$$

$$= 48-2 = 46$$

مثال 5/ تحقق من فهمك احسب كل تكامل مما يأتي :

5A

$$\int (6x^2+8x-3)\,dx = \frac{6x^{2+1}}{2+1} + \frac{8x^{1+1}}{1+1} - 3x + C$$

$$= \frac{6x^3}{3} + \frac{8x^2}{2} - 3x + C$$

$$= 2x^3 + 4\,x^2 - 3x + C$$

5B $\int_{1}^{3} (-x^4+8x^3-24x^2+30x-4)\,dx$

$$\int_{1}^{3} (-x^4+8x^3-24x^2+30x-4)\,dx = \frac{-x^5}{5} + \frac{8x^4}{4} - \frac{24x^3}{3} + \frac{30x^2}{2} - 4x\Big]_1^3$$

$$= -\frac{1}{5}x^5 + 2x^4 - 8x^3 + 15x^2 - 4x]_1^3$$

$$= \left[-\frac{1}{5}(3)^5 + 2(3)^4 - 8(3)^3 + 15(3)^2 - 4(3)\right] - \left[-\frac{1}{5}(1)^5 + 2(1)^4 - 8(1)^3 + 15(1)^2 - 4(1)\right]$$

$$= \frac{102}{5} - \frac{24}{5} = 15.6$$

عودة إلى الفهرس

6 -4 النظرية الأساسية في التفاضل و التكامل

مثال 6 / تحقق من فهمك

أوجد الشغل اللازم لشد نابض مسافة ما و المعطى بالتكامل في كل مما يأتي :

6A

$$\int_0^{0.7} 476x\ dx$$

$$\int_0^{0.7} 476x\ dx = \frac{476x^{1+1}}{1+1}\Bigg]_0^{0.7} = \frac{476x^2}{2}\Bigg]_0^{0.7} = 238x^2]_0^{0.7} = [238(0.7)^2] - [0] = 116.62\ J$$

6B

$$\int_0^{1.4} 512x\ dx$$

$$\int_0^{1.4} 512x\ dx = \frac{512x^{1+1}}{1+1}\Bigg]_0^{0.7} = \frac{512x^2}{2}\Bigg]_0^{0.7} = 256x^2]_0^{0.7} = [256(1.4)^2] - [0] = 501.76J$$

عودة إلى الفهرس

المراجع

- دليل المعلم -رياضيات 6
- كتاب الطالب -رياضيات 6