تمثيل الدالة التربيعية بيانياً

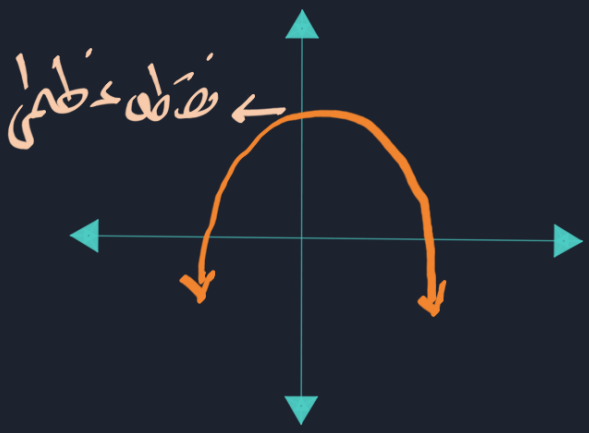
الدالة التربيعية هي دالة غير خطية — الدالة المولدة لها د(س) = س²

الصورة القياسية $ص = أ س^2 + ب س + جـ$ ، $أ \neq 0$

تُمثل على شكل قطع مكافئ

القطع متماثل حول محور التماثل حاد الله $س = -\frac{ب}{2أ}$

المقطع الصادي جـ



أ < 0 سالبة

القطع فتحته لأسفل

أعلى نقطة فيه نقطة عظمى

أ > 0 موجبة

القطع فتحته لأعلى

أدنى نقطة فيه نقطة صغرى

المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى

{ص : ص ∈ ح العدد الحقيقي}

المدى

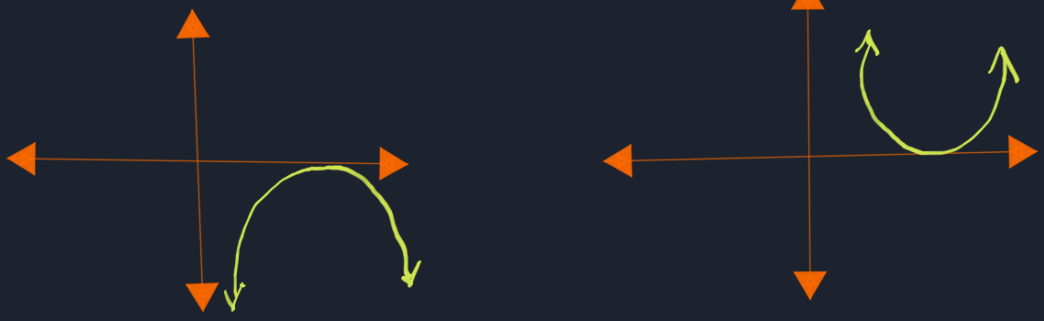
{ص : ص ≥ العدد الصغرى}

ملاحظة ق.ع أو ق.ص تعني الإحداثي الصادي في النقطة العظمى والصغرى.

حل المعادلات التربيعية بيانياً

حلول المعادلة ← المقاطع السينية

عدد الحلول

حلان مختلفان	
حل وحيد	
لا يوجد حل حقيقي	

ملاحظة / جذرا مكرر عندما يكون الجذران هما نفس العدد (حل وحيد)

عند تقاطع محور السينات ورأس القطع

hassnq

حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع

(١) كتابة العبارة التربيعية على صورة مربع كامل.

(حوار رمضية اكمال المربع)

في العبارة $أ س^{٢} + ب س + ...$

(١) $\frac{ب}{٢}$ نصف معامل س

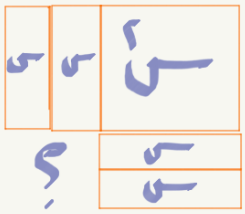
$(\frac{ب}{٢})^{٢}$ نربعه

$أ س^{٢} + ب س + (\frac{ب}{٢})^{٢}$

$= (أ س + \frac{ب}{٢})^{٢}$

نضيفه للعبارة ثم نطرحه لنصبح بصورة مربع كامل

مثال / $س^{٢} + ٤ س + ح$



لدخله الشكل الى مربع كامل ، اضيف ٤ بطاقات جزء من بطاقات العدد ١

استعمال بطاقات الجبر

$س^{٢} + ٤ س + ٤$

استعمال حوار رمضية اكمال المربع

١ ← $\frac{ب}{٢} = \frac{٤}{٢} = ٢$

٢ ← $(٢)^{٢} = ٤$

٣ ← $س^{٢} + ٤ س + ٤$

٤ ← $(س + ٢)^{٢}$

(٢) حل المعادلات التي يصعب إكمال المربع $P = 1$

سابقاً درسنا حل المعادلات التربيعية بـ التحليل / التمثيل البياني / اكمال المربع

خطوات إكمال المربع للمعادلات

(١) وصل المتغيرات عن الحد الثابت وجعل كل منهما في طرف.

(٢) اكمال المربع بقسمة $ب$ على ٢ ثم تربيعها.

(٣) نضيف العدد المربع الى طرفي المعادلة.

(٤) نكون المربع الكامل.

(٥) حل المعادلة بالجذر التربيعي.

مثال حل المعادلة: $س^٢ - ١٢س + ٣ = ٨$

(١) $س^٢ - ١٢س = ٥$

(٢) $س^٢ - ١٢س + (-٦)^٢ = ٥ + ٣٦$

$س^٢ - ١٢س + ٣٦ = ٤١$

$(س - ٦)^٢ = \pm\sqrt{٤١}$

$\frac{-١٢}{٢} = -٦$

$(-٦)^٢ = ٣٦$

$س - ٦ = +\sqrt{٤١}$

$س - ٦ = +٦,٤$

$س = ١٢,٤$

$س - ٦ = -\sqrt{٤١}$

$س - ٦ = -٦,٤$

$س = -٠,٤$

(٣) حل المعادلة التربيعية بالكمال المربع $أ \neq ١$

تقسم جميع الحدود على معامل $س^{٢}$ ثم تتبع نفس الخطوات السابقة بالأعلى ...

مثال: حل المعادلة $٣س^{٢} - ٩س - ٢١ = ٠$

$$\frac{٣س^{٢}}{٣} - \frac{٩س}{٣} = \frac{٢١}{٣}$$

$$س^{٢} - ٣س = ٧$$

$$س^{٢} - ٣س + \frac{٩}{٤} = ٧ + \frac{٩}{٤}$$

$$(س - \frac{٣}{٢})^{٢} = ٢٨,٢٥$$

$$س - \frac{٣}{٢} = \pm \sqrt{١٠,٢٥} \approx \pm ٣,٢$$

$$س - \frac{٣}{٢} = ٣,٢ \quad \text{أو} \quad س - \frac{٣}{٢} = -٣,٢$$

$$س = ٦,٧ \quad \text{أو} \quad س = -١,٧$$

حل المعادلات التربيعية بالتحليل العام

الأهداف

أحل معادلات تربيعية باستعمال التحليل العام

حل المعادلة التربيعية $أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠$ ، $أ \neq ٠$ بالتحليل العام

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$$

$٢ س^{٢} + ٩ س = ١٨$

$٢ س^{٢} + ٩ س - ١٨ = ٠$

$أ = ٢ ، ب = ٩ ، جـ = -١٨$

$$س = \frac{-٩ \pm \sqrt{٩^{٢} - ٤ \times ٢ \times -١٨}}{٢ \times ٢}$$

$$= \frac{-٩ \pm \sqrt{٨١ + ١٤٤}}{٤}$$

$$= \frac{-٩ \pm \sqrt{٢٢٥}}{٤}$$

$$= \frac{-٩ \pm ١٥}{٤}$$

$$س = \frac{-٩ + ١٥}{٤} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$$

$$س = \frac{-٩ - ١٥}{٤} = \frac{-٢٤}{٤} = -٦$$

حلاه مختلفا ن

$٣ س^{٢} - ٢ س = ٩$

$٣ س^{٢} - ٢ س - ٩ = ٠$

$أ = ٣ ، ب = -٢ ، جـ = -٩$

$$س = \frac{+٢ \pm \sqrt{(-٢)^{٢} - ٤ \times ٣ \times -٩}}{٢ \times ٣}$$

$$= \frac{٢ \pm \sqrt{٤ + ١٠٨}}{٦}$$

$$= \frac{٢ \pm \sqrt{١١٢}}{٦}$$

$$س = \frac{٢ + ١٠٫٦}{٦} = ١٫٤$$

$$س = \frac{٢ - ١٠٫٦}{٦} = -١٫٤$$

حلاه مختلفا ن

$س^2 + 16 = 0$

$أ = 1 \quad ب = 0 \quad جـ = 16$

$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - 4أجـ}}{2أ} = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \times 1 \times 16}}{2 \times 1}$

$= \frac{0 \pm \sqrt{-64}}{2}$

$= \frac{0 \pm \sqrt{-64}}{2}$

ليس لها حل حقيقي

مجموعة الحل $= \emptyset$

$2س^2 = 12س - 18$

$2س^2 - 12س + 18 = 0$

$أ \quad ب \quad جـ$

$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - 4أجـ}}{2أ} = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \times 2 \times 18}}{2 \times 2}$

$= \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{4}$

$= \frac{12 \pm \sqrt{0}}{4}$

$س = \frac{12}{4} = 3$

حل وحيد هو 3

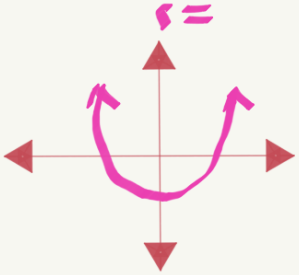
نستنتج من الأمثلة السابقة

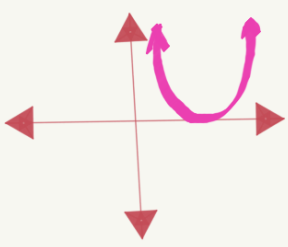
أنه على حسب قيمة المميز نعرف عدد الحلول

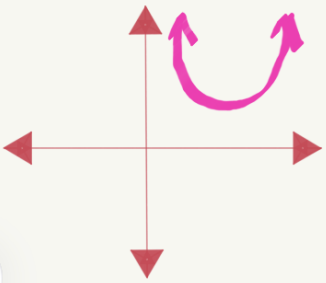
المميز $= ب^2 - 4أجـ$ (ما تحت الجذر التربيعي)

$ب^2 - 4أجـ$

$م > 0$ (+)	$م = 0$	$م < 0$ (-)
عدد الحلول الحقيقية $= 2$	يوجد حل حقيقي واحد	لا يوجد حل حقيقي







الطرق المختلفة لحل المعادلات التربيعية

$٣س^{٢} - ٢٤س = -٣٦$

الطريقة (١) التحليل

$٣س^{٢} - ٢٤س + ٣٦ = ٠$ ← بقسمة على ٣

$س^{٢} - ٨س + ١٢ = ٠$

$(س - ٦)(س - ٢) = ٠$

$(س - ٦) = ٠ \leftarrow س = ٦$ أو $(س - ٢) = ٠ \Leftarrow س = ٢$

بقسمة على ٢ الأصغر

$٦ \times ٢ = ١٢$

$٦ + ٢ = ٨$

(بالسالب) كلاهما -

الطريقة (٢) اكمال المربع

$س^{٢} - ٨س = -١٢$ ← (١)

$-٨ \div ٢ = -٤$ ، $(-٤)^{٢} = ١٦$ (٢)

$س^{٢} - ٨س + ١٦ = -١٢ + ١٦$ (٣)

$(س - ٤)^{٢} = \pm ٤$ (٤)

$س - ٤ = \pm ٢$ (٥)

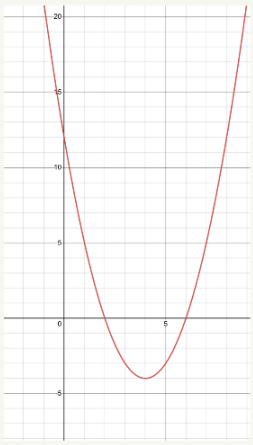
اما $س - ٤ = ٢$

$س = ٦$

أو $س - ٤ = -٢$

$س = ٢$

الطريقة (٣) الرسم البياني



المقاطع السينية هي

$س = ٢$ ،

$س = ٦$

الطريقة (٤) القانون العام

$س^{٢} - ٨س + ١٢ = ٠$

$أ = ١$ $ب = -٨$ $جـ = ١٢$

$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$

$= \frac{٨ \pm \sqrt{٦٤ - ٤٨}}{٢}$

$س = \frac{٨ \pm ٤}{٢}$

$س = \frac{٨+٤}{٢} = ٦$ ، $س = \frac{٨-٤}{٢} = ٢$

تبسيط العبارات الجذرية

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

مهارة سابقة

إيجاد الجذور التربيعية $\sqrt{١٦} = ٤ ، \pm\sqrt{٢٥} = \pm ٥$

تقدير الجذور التربيعية $\sqrt{٥} \simeq ٢ ، \sqrt{٢١} \simeq ٥$

الآن

استعمال خاصية ضرب الجذور التربيعية في تبسيط الجذور التربيعية

" " " " " " " " " " قسمة

تتضمن العبارة الجذرية جذراً، كالجذر التربيعي، ويكون في أبسط صورة إذا تحقق الشرطان التاليان في مقدار الجذر.

- لا يكون أي من عوامله مربعاً كاملاً أعداداً! $\sqrt{١٦} \times$
- لا يتضمن كسوراً. $\sqrt{\frac{٣}{٤}} \times$
- لا يظهر أي جذر في مقام الكسر $\frac{٢}{\sqrt{٣}} \times ، \frac{١}{٢+\sqrt{٣}}$

خاصية ضرب الجذور التربيعية ← لتبسيط العبارات الجذرية

$\sqrt{ب} \times \sqrt{أ} = \sqrt{أ ب}$ ، $أ \geq ٠ ، ب \geq ٠$

$\sqrt{أ} \times \sqrt{أ} = (\sqrt{أ})^{٢} = أ$

أمثلة تبسيط العبارات الآتية:

$\sqrt{٥٤} = \sqrt{٦ \times ٩} = \sqrt{٦} \times \sqrt{٩} = ٣\sqrt{٦}$

أو بالتحليل ←

٥٤	٢
٢٧	٣
٩	٣
٣	٣
١	

$\sqrt{٥٤} = ٣\sqrt{٢ \times ٣^{٢}} = ٣\sqrt{٦}$

$\sqrt{٢٥} = \sqrt{٢ \times ٥ \times ٥} = \sqrt{١٠ \times ٥} = \sqrt{١٠} \times \sqrt{٥}$

أو بالتحليل ← $\sqrt{٥٠}$

$\sqrt{٢٥} = \sqrt{٥٠}$

٥٠	٢
٢٥	٥
٥	٥
١	

$\sqrt{س^{٢}} = س$ (ليست صحيحة دائماً)

لأن $\sqrt{(-٣)^{٢}} \neq -٣$ حاطه

خاصية جديدة :-

$\sqrt{س^{٢}} = |س|$

$\sqrt{س^{٣}} = \sqrt{س^{٢} \times س} = |س| س$

$\sqrt{س^{٤}} = \sqrt{س^{٢} \times س^{٢}} = س \times س = س^{٢}$

$\sqrt{س^{٦}} = \sqrt{س^{٤} \times س^{٢}} = |س^{٢}|$

بسط العبارة /

$\sqrt{٣٢ ر^{٤} ك^{٥} ن^{٤}} = \sqrt{١٦ \times ٢ ر^{٤} ك^{٤} ن^{٤} ن}$

$= ٤ |ر^{٢}| ك^{٢} ن^{٢} \sqrt{٢ ن}$

$\sqrt{٥٦ س^{١٠} ص^{٥} ل^{٤}} = \sqrt{٤ \times ١٤ س^{١٠} ص^{٤} ص ل^{٤}}$

$= ٢ |ص^{٢}| ل^{٢} \sqrt{١٤ س ص}$

خاصية قسمة الجذور التربيعية ← لتبسيط العبارة الجذرية

$\sqrt{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}}$ ، أ ≥ ٠ ، ب > ٠

مثال / أكتب $\sqrt{\frac{٣٥}{١٥}}$ في أبسط صورة /

$\sqrt{\frac{٣٥}{١٥}} = \sqrt{\frac{٧}{٣}} = \frac{\sqrt{٧}}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}}$ ← خاصية قسمة الجذور التربيعية

$\frac{\sqrt{٧}}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}}$ ← خاصية ارتفاع المقام

$\frac{\sqrt{٣ \times ٧}}{٣}$ ← خاصية ضرب الجذور التربيعية

تمرين / $\frac{\sqrt{٦ص}}{\sqrt{١٢}} = \frac{\sqrt{٦ص}}{\sqrt{١٢}} \times \frac{\sqrt{١٢}}{\sqrt{١٢}} = \frac{\sqrt{١٢ \times ٦ص}}{١٢} = \frac{\sqrt{٧٢ص}}{١٢} = \frac{\sqrt{٣٦ \times ٢ص}}{١٢}$

$= \frac{٦\sqrt{٢ص}}{١٢} = \frac{\sqrt{٢ص}}{٢}$

تمرين / $\sqrt{\frac{٤٥}{ج^{٢}}}$

$= \frac{\sqrt{٩}}{\sqrt{ج^{٢}}} = \frac{\sqrt{٩} \times \sqrt{٥}}{\sqrt{ج^{٢}}} = \frac{٣\sqrt{٥}}{ج}$

* استخدام المرافق لتبسيط الجذور التربيعية /

مرافق $\sqrt{أ} + \sqrt{ب}$ هو $\sqrt{أ} - \sqrt{ب}$

مثال / مرافق $٢ + \sqrt{٧}$ هو $٢ - \sqrt{٧}$ ← حاصل ضربهم هو عدد نسبي

تمرين / بسط العبارة $\frac{٣}{٢ + \sqrt{٥}} \times \frac{٢ - \sqrt{٥}}{٢ - \sqrt{٥}} = \frac{٦ - ٣\sqrt{٥}}{٤ - ٥}$ ← الحدين غير متشابهين

$= \frac{٦ - ٣\sqrt{٥}}{-١} = ٣\sqrt{٥} - ٦$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إتقان - توثيق

العمليات على العبارات الجبرية

سابقاً ← تبسيط العبارات الجبرية

الآن

جمع وطرح العبارات الجبرية

[1] عبارات متشابهة
حدودها متشابهة

[2] عبارات مختلفة
حدودها مختلفة

[3] ضرب العبارات الجبرية

مثال / بسط كل عبارة مما يأتي /

[1]

(1) $٣س^{٢}ص - ٥س^{٢}ص + ٤س^{٢}ص$

$= س^{٢}ص(٣-٥+٤)$

$= ٢س^{٢}ص$

(2) $٦ل^{٢}م + ٢ل^{٢}م - ٩ل^{٢}م$

$= ل^{٢}م(٦+٢-٩)$

$= -ل^{٢}م$

(3) $١٥أ^{٣}ب - ٤أ^{٣}ب + ٥أ^{٣}ب - ١١أ^{٣}ب$

$(١٥-١١)أ^{٣}ب + (-١٤+٥)أ^{٣}ب$

$٤أ^{٣}ب - ٨أ^{٣}ب$

(4) $٤أ^{٣}ب + ٣أ^{٢}ب - ٦أ^{٢}ب + ٣أ^{٢}ب$

$(٤-٦)أ^{٢}ب + (٣+٣)أ^{٢}ب$

$-٢أ^{٢}ب + ٦أ^{٢}ب$

[2]

(1) $٤أ^{٢} + ٥٤أ^{٢}$

$٤ \times ٦أ^{٢} + ٤ \times ٩أ^{٢}$

$٢ \times ٢ \times ٣ \times ٣أ^{٢} + ٢ \times ٢ \times ٣ \times ٣أ^{٢}$

$٦أ^{٢} + ٦أ^{٢}$

$١٢أ^{٢}$

المعادلات الجذرية ١٢

سابقاً ← جمع عبارات جذرية وطرحها وضربها ،
والآن ... حل المعادلات الجذرية .

ماهي المعادلة الجذرية ← هي معادلة تحوي متغيراً تحت الجذر

لا مثل $\sqrt{س} = ٤$ ، $\sqrt{س+٢} = س+١$

قواعد نحتاجها في الدرس

$(أ+ب)^{٢} = أ^{٢} + ٢أب + ب^{٢}$ ← مربع المجموع حدين

$(أ-ب)^{٢} = أ^{٢} - ٢أب + ب^{٢}$ ← مربع الفرق بين حدين

* خاصية تربيع طرفي المعادلة

اذا كان $أ = ب$ فإن $أ^{٢} = ب^{٢}$

$\sqrt{س} = ٤$ فإن $(\sqrt{س})^{٢} = (٤)^{٢}$

لحل المعادلات الجذرية

← نجعل الجذر في طرف من المعادلة
← نربع الطرفين

مثال /

حل المعادلة $\sqrt{٥+أ} = ٧ - ١٢$

$\sqrt{٥+أ} = ١٢ - ٧$

$(\sqrt{٥+أ})^{٢} = (٥)^{٢}$

$٥ + أ = ٢٥$

$أ = ٢٠$

التحقق من الحل

$\sqrt{٥+٢٠} = ٧ + ١٢$

$\sqrt{٢٥} = ٧ + ٥$

$١٢ = ١٢$

حل المعادلة $\sqrt{أ جـ - ٣} - ٢ = ٤$

$\sqrt{أ جـ - ٣} = ٤ + ٢$

$(\sqrt{أ جـ - ٣})' = (٦)'$

$٢ \times ٣ = أ جـ - ٣$

$أ جـ = ٢٩$

التحقق من الحل

$\sqrt{أ جـ - ٣} = ٤$

$\sqrt{٢٩ - ٣} - ٢ = ٤$

$\sqrt{٢٦} - ٢ = ٤$

$٦ - ٢ = ٤$

$٤ = ٤$

(٢) حل معادلة جذرية تتضمن حداً خطياً :

$\sqrt{ك + ١} = ك - ١$

$(\sqrt{ك + ١})' = (ك - ١)'$

$ك + ١ = ك^٢ - ٢ك + ١$

$ك^٢ - ٣ك = ٠$

$ك(ك - ٣) = ٠$

$ك = ٠ ، ك = ٣$

التحقق من الحل

$\sqrt{ك + ١} = ك - ١$

ك = ٠

$\sqrt{١} = ٠ - ١$

$١ \neq -١$ ✗ حل دخيل

ك = ٣

$\sqrt{٤} = ٣ - ١$

$٢ = ٢$ ✓ حل صحيح

قال / $\sqrt{ن + ٥} = ن + ٣$

$(\sqrt{ن + ٥})^٢ = (ن + ٣)^٢$

$ن + ٥ = ن^٢ + ٦ن + ٩$

$ن^٢ + ٥ن + ٤ = ٠$

$(ن + ٤)(ن + ١) = ٠$

$ن = -١ ، ن = -٤$

التحقق من الحل

$\sqrt{ن + ٥} = ن + ٢$

ن = -١

$\sqrt{٤} = ٢ ، ٢ = ٢$ ✓ حل صحيح

ن = -٤

$\sqrt{١}$ ✗ حل دخيل

$١ \neq -١$

نظرية فيثاغورس

سابقاً ← حل المعادلات التي بعواملها باستعمال حاصل الجذر التربيعي

الآن ← (١) حل مسائل باستعمال نظرية فيثاغورس ،
(٢) حساب طول أحد أضلاع المثلث قائم الزاوية إذا علم طولا ضلعين فيه .

خطوات سابقة

أوجد أ ب ، ٩ ، (٨ ف)

المربع

الوتر الضلع المقابل للزاوية القائمة (أطول الأضلاع)

الساق يسمى كل من الضلعين الأخريين ساق .

المعكوس إذا كانت الأطوال م ، ب ، جـ تحقق المعادلة م^٢ + ب^٢ = جـ^٢
فإن المثلث قائم الزاوية

نظرية فيثاغورس مجموعة من ثلاثة أعداد صحيحة موجبة تحقق المعادلة

م^٢ + ب^٢ = جـ^٢

من أشهرها ٣ ، ٤ ، ٥ وأضعافها

٥ ، ١٢ ، ١٣ وأضعافها

٧ ، ٢٤ ، ٢٥ وأضعافها

٩ ، ٤٠ ، ٤١ وأضعافها

أمثلة

أوجد طول الضلع المجهول وحدد النسبة التي أمر جهة منه كما

١

م ب + ب جـ = جـ

٨ + ٦ = جـ

٦٤ + ٣٦ = جـ

جـ = ١٠٠

جـ = ± ١٠

الوتر مجهول

نجمع

جـ = ١٠ وحدة طول

حل ماحد صبي ← من ثلاثية فيثاغورس

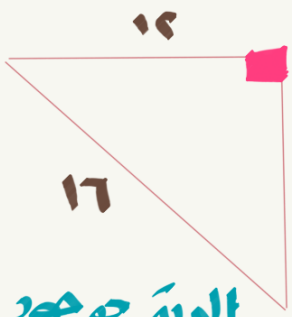
٣ ٤ ٥

٦ ٨ جـ

١٠

نبرهن انه الوتر أطول ضلع

٢



← ليس من ثلاثيات فيثاغورس

م ب + ب جـ = جـ

م + ١٢ = ١٦

م + ١٤٤ = ٢٥٦

م = ٢٥٦ - ١٤٤

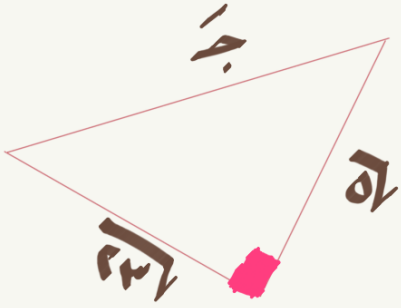
م = ± ١١٢

م = + ١٠,٥٨ وحدة طول

الوتر مجهول

نطرح

[٣]



$جـ'^{٢} = ٥^{٢} + ٢٣^{٢}$

$جـ'^{٢} = ٢٥ + ٥٢٩$

$جـ' = \pm\sqrt{٥٥٤}$

$جـ' = \sqrt{٥٥٤}$ وحدة طول

مسائل من واقع الحياة

$ع^{٢} = ٩^{٢} - ٤^{٢}$

$ع = \sqrt{٨١ - ١٦}$

$= \sqrt{٦٥}$

$ع = ٨,٠٦ \approx ٨,١$ م

محكوم من نظرية فيثاغورس

م ، ب ، جـ أضلاع مثلث وتحقق المعادلة $م^{٢} + ب^{٢} = جـ^{٢}$

فإن المثلث قائم الزاوية

ولكن $م^{٢} + ب^{٢} \neq جـ^{٢}$ فإن المثلث ليس قائم الزاوية

أمثلة

حدد إذا كانت مجموعة الأطوال الآتية تشكل أضلاع مثلث قائم الزاوية أم لا.

[١] ٣ ، ٤ ، ٥

$٣^{٢} + ٤^{٢} = ٥^{٢}$

$٩ + ١٦ = ٢٥$

$\therefore ٢٥ = ٢٥$

تشكل مثلث قائم الزاوية

حل آخر

٣، ٤، ٥

١٠×٣ ، ١٠×٤ ، ١٠×٥

← ثلاثية فيثاغورس تحقق المعادلة م² + ب² = جـ²

٤) ٦ ، ١٢ ، ١٨

١٨² ≟ ٦² + ١٢²

٣٢٤ ≟ ٣٦ + ١٤٤

٣٢٤ ≠ ١٨٠

لا تشكل ثلاثية فيثاغورية

٣) ٨ ، ١٢ ، ١٦

١٦² ≟ ١٢² + ٨²

٢٥٦ ≟ ١٤٤ + ٦٤

٢٥٦ ≠ ٢٠٨

المثلث ليس قائم الزاوية

٤) ٣ ، ٢٧ ، ٤١

(٤١)² ≟ ٣² + (٢٧)²

٤١ ≟ ٩ + ٤٠

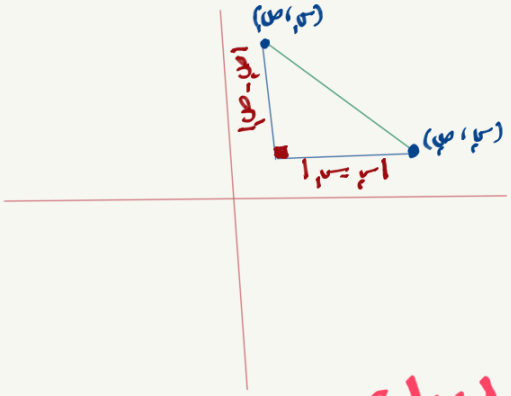
٤١ ≠ ٤٩

المثلث ليس قائم الزاوية

المسافة بين نقطتين

سابعاً
استعمال نظرية فيثاغورس

الآن /
إيجاد المسافة بين نقطتين حي للمستوى الاحداثي .



قانون المسافة بين نقطتين

(س١ ، ص١) ، (س٢ ، ص٢)

$$ف = \sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$$

ملاحظة /

في حالة سواي الاحداثي السيني او الصادي فقط نعوض بقيم الاحداثي الآخر ...

مثلاً المسافة بين (٢ ، ٥) ، (٢ ، ٦)

(١) ٦ - ٥ = ١ (٢) ف = $\sqrt{(١)^2}$ = ١

لان المسافة بين الاحداثي السيني = صفر

أمثلة /

اوجد المسافة بين النقطتين

(٤ ، ٢) ، (-٣ ، -١)

$$ف = \sqrt{(-3-4)^2 + (-1-2)^2}$$

$$ف = \sqrt{49 + 9}$$

$$= \sqrt{58} \approx 7,5$$

(-٧ ، -٣) ، (-٥ ، -٨)

$$ف = \sqrt{(-5+7)^2 + (-8+3)^2}$$

$$= \sqrt{2^2 + 5^2}$$

$$= \sqrt{29} \approx 5,3$$

$(٦، -٢)(٨، ١٢)$

$ف = \sqrt{(١٢-٦)^{٢} + (٨+٢)^{٢}}$

$= \sqrt{٦^{٢} + ١٠^{٢}}$

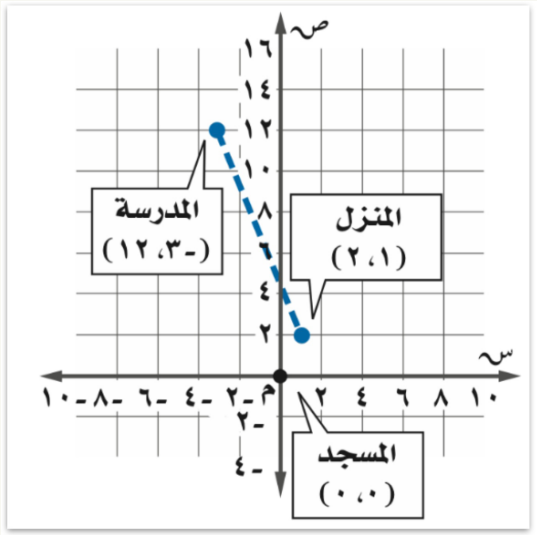
$= \sqrt{٣٦ + ١٠٠}$

$ف = \sqrt{١٣٦} \approx ١١,٧$

أصله حد واقع الحياة ..

في المستوى الاحداثي المجاور، أوجد:

أ) المسافة بين منزل عمر والمدرسة



$ف = \sqrt{(١٢-٢)^{٢} + (-٣-١)^{٢}}$

$= \sqrt{١٠^{٢} + ٤^{٢}}$

$= \sqrt{١١٦} \approx ١٠,٧$ كلم تقريباً

ب) المسافة بين منزل عمر والمسجد $(٠،٠)$ $(١،٢)$ لربط حباشة

$ف = \sqrt{١^{٢} + ٢^{٢}}$

$= \sqrt{٥} \approx ٢,٢٤$ كلم تقريباً

ايجاد الإحداثي المجهول ...

$(٢، ٢)$ $(-٦، ٢)$ $ف = ١٠$ وحدات $\quad ؟ = ب$

$١٠ = \sqrt{(-٦-٢)^{٢} + (ب-٢)^{٢}}$

$١٠٠ = (-٨)^{٢} + (ب-٢)^{٢}$

$$(ع^2 + 2ع - 3)^2 + 6ع^2 = 100$$

$$ع^4 + 4ع^3 - 6ع^2 - 100 = 0$$

$$ع^4 - 4ع^3 - 32ع^2 = 0$$

$$(ع - 8)(ع + 4) = 0$$

$$ع = 8 \text{ أو } ع = -4$$

$$4 \times 8 = 32$$

$$+ \quad - \quad +$$

$ن = ؟$ $(-5، 2)$ $(3، 1)$ $ف = |\overline{89}|$ وحدة

$$|\overline{89}| = \sqrt{(ص + 3)^2 + (1 - ن)^2}$$

$$89 = 8^2 + (1 - ن)^2$$

$$89 = 64 + (1 - 2ن + ن^2)$$

$$0 = -24 + (1 - 2ن + ن^2)$$

$$0 = ن^2 - 2ن - 24$$

$$(ن - 6)(ن + 4) = 0$$

$$ن = 6 \text{ أو } ن = -4$$

$$4 \times 6 = 24$$

$$+ \quad - \quad +$$

المثلثان المتشابهة

سابقاً حل التناسبات

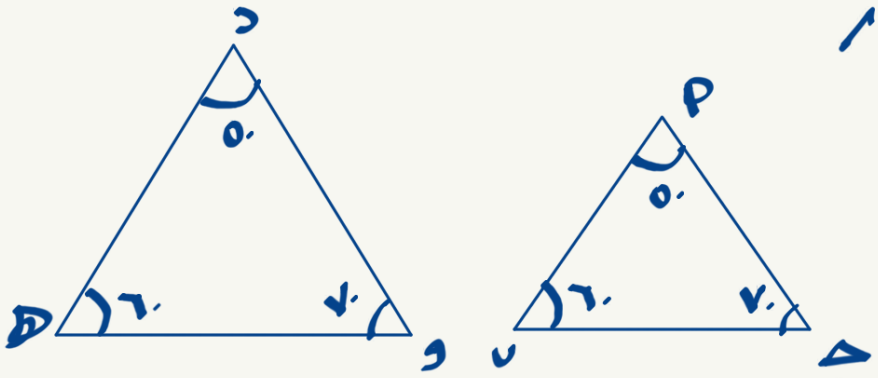
الآن ← نحدد ما إذا كان مثلثان متشابهان أم لا .
← نجد العناصر المجهولة في مثلثين متشابهين .

تسمى المثلثات التي لها الشكل نفسه (مثلثات متشابهة)
ليس من الضروري أن يكون لها الطول نفسه
حالة خاصة / التشابهة حالة خاصة من التطابق.

رمز التشابه ~

يقال عن مثلثين أنهما متشابهان إذا كان زوايا هما المتناظرة قياساتها متساوية وأطوال أضلاعها المتناظرة متناسبة

مثال /

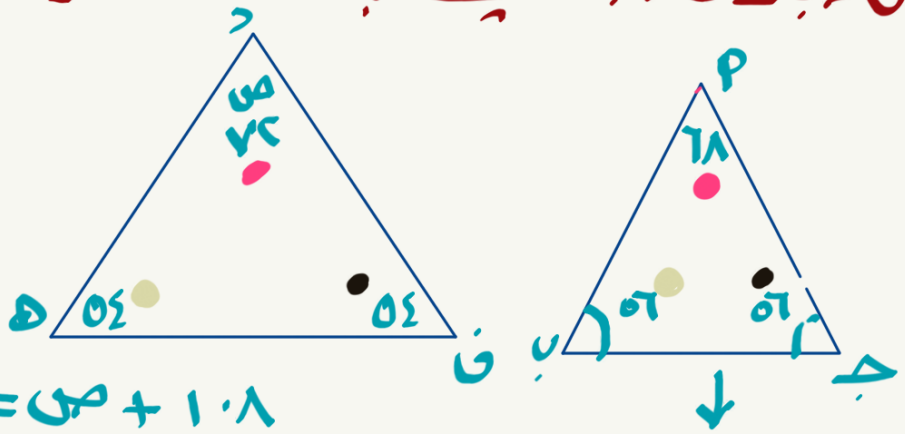


Δ د ه و ~ Δ أ ب ج

$\frac{\text{أ ب}}{\text{د ه}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{ه و}} = \frac{\text{أ ج}}{\text{د و}}$

ق (أ) = ق (د)
ق (ب) = ق (ه)
ق (ج) = ق (و)

مثال / حدد هل إذا كان Δ ABC الذي فيه ق(∠A) = ٦٨°
ق(∠B) = ق(∠C) = ٥٤° ، Δ DEF حيث ق(∠D) = ق(∠E) = ٥٤°
فإن Δ ABC يشابه Δ DEF

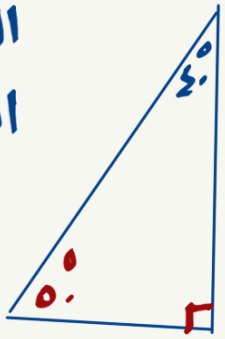


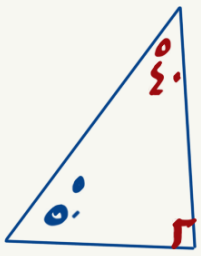
٢ س + ٦٨ = ١٨٠
س + ٣٤ = ٩٠
س = ٥٦
ق(∠B) = ق(∠C) = ٥٦°

١٠٨ + ص = ١٨٠
ص = ٧٢

الزاويا المتناظرة غير متطابقة
Δ ABC لا يشابه Δ DEF

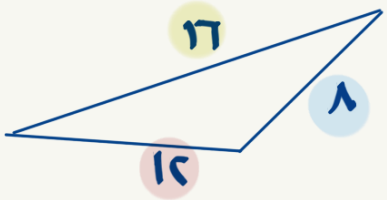
مثال / حدد هل إذا كان كل زوج من المثلثات الآتية متشابهين أم لا /

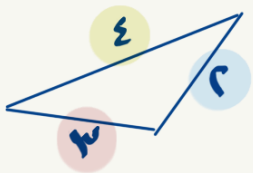




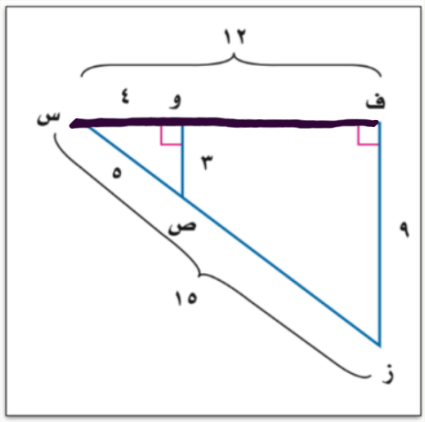
الزاويا المتناظرة متساوية القياس ∴ المثلثان متشابهان

$\frac{١٢}{٣} = \frac{٨}{٢} = \frac{١٦}{٤}$
أطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة ∴ المثلثان متشابهان





حدد هل كان المثلثان متشابهان أم لا /



$\triangle$ و س ص ~ $\triangle$ ف س ز

٣، ٤، ٥ ٩ ١٢ ١٥

أ)

$\frac{٤}{١٢} = \frac{٣}{٩} = \frac{٥}{١٥}$

الأضلاع المتناظرة متناسبة

المثلثان متشابهان

حدد هما إذا كان $\triangle$ أ ب جـ والذي فيه أ ب = ٦ ، ب جـ = ١٦ ، أ جـ = ٢٠ يشابه $\triangle$ ع ك ل حيث ع ك = ٣ ، ك ل = ٨ ، ع ل = ٩ ؟

$\frac{أ ب}{ع ك} \quad \frac{ب جـ}{ك ل} \quad \frac{أ جـ}{ع ل}$

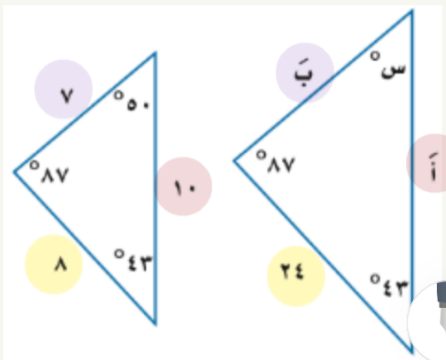
$\frac{٦}{٣} = \frac{١٦}{٨} ؟ \frac{٢٠}{٩}$

الأضلاع المتناظرة ليست متناسبة

المثلثات غير متشابهان

إيجاد القياسات المجهولة

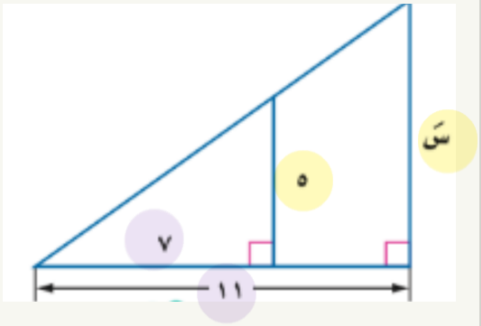
حالة سابقة (التناسب ، مجموع زوايا المثلث)



من الزوايا المتناظرة س° = ٥٠°

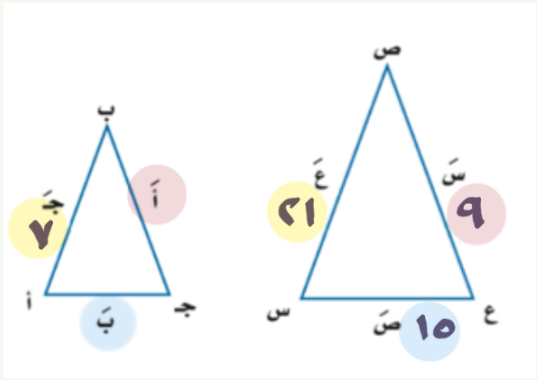
$\frac{ب'}{٧} = \frac{٢٤}{٨} \Leftarrow ب' = ٢١$

$\frac{أ'}{١٠} = \frac{٢٤}{٨} \Leftarrow أ' = ٣٠$



$$\frac{٧}{١١} = \frac{٥}{س}$$

$$س = \frac{٥٥}{٧} \approx ٧,٩$$



Δ ص ع س $\sim$ Δ ب جـ أ

$$\frac{٢١}{٧} = \frac{٩}{أ ب}$$

$$٣ = أ ب ، ٣ أ ب = ٩$$

$$\frac{٢١}{٧} = \frac{١٥}{ب جـ}$$

$$٥ = ب جـ ، ٣ ب جـ = ١٥$$

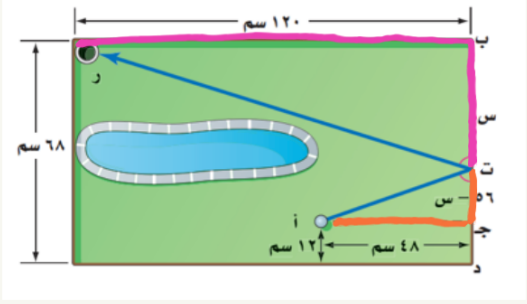
٢١ ← ٧

٩ ← ٣

١٥ ← ٥

مسألة من واقع الحياة /

جولف: يلعب حمد لعبة جولف مصغرة كما في الشكل المجاور، ويريد قذف الكرة من النقطة أ إلى النقطة ت لترتد وتدخل الحفرة ر. استعمل تشابه المثلثات لتحديد بعد نقطة الارتداد عن الرأس ب.



$$\frac{س}{٥٦ - س} = \frac{١٢٠}{٤٨}$$

$$٤٨ س = ٦٧٢٠ - ١٢٠ س$$

$$١٦٨ س = ٦٧٢٠$$

$$س = ٤٠$$

Sin
Cos
Tan

النسب المثلثية

سابقاً / استخدام نظرية فيثاغورس .

الآن / (١) إيجاد النسب المثلثية للزوايا .
(٢) استخدام النسب المثلثية لحل المثلث

المقدمات /

حساب المثلث / العلاقة بين زوايا المثلث وأضلاعه .

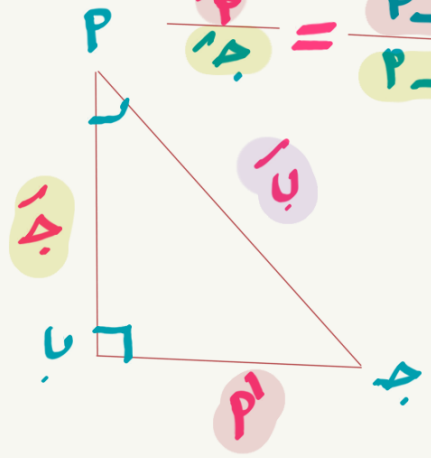
النسب المثلثية / نسبة تقارن بين طولي ضلعين في مثلث قائم الزاوية .

أكثر النسب المثلثية شيوعاً

جيب الزاوية = جا ق = طول المقابل للزاوية ق / الوتر = ب ﺟ / أ ﺟ

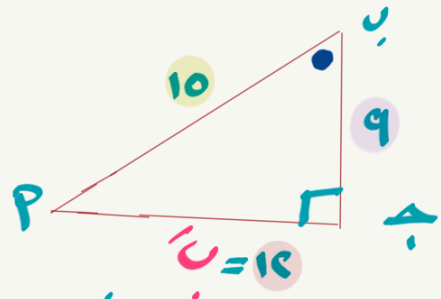
جيب تمام الزاوية = جتا ق = طول المجاور للزاوية ق / الوتر = أ ب / أ ﺟ

ظل الزاوية = ظا ق = طول المقابل لـ ق / طول المجاور لـ ق = ب ﺟ / أ ب



مثال (١)

من ثلاثية فيثاغورس ٣ : ٤ : ٥ ، ٩ : ١٢ : ١٥



مطلوب النسب المثلثية للزاوية ب

جا أ = المقابل / الوتر = ١٢/١٥ = ٤/٥

جتا أ = المجاور / الوتر = ٩/١٥ = ٣/٥

ظا أ = المقابل / المجاور = ١٢/٩ = ٤/٣

مثال (٢)

أوجد النسب المثلثية للزاوية أ

جا أ = ٣/٥

جتا أ = ٤/٥

ظا أ = ٣/٤

---

* استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد النسب المثلثية لأي زاوية

Sin ← جا

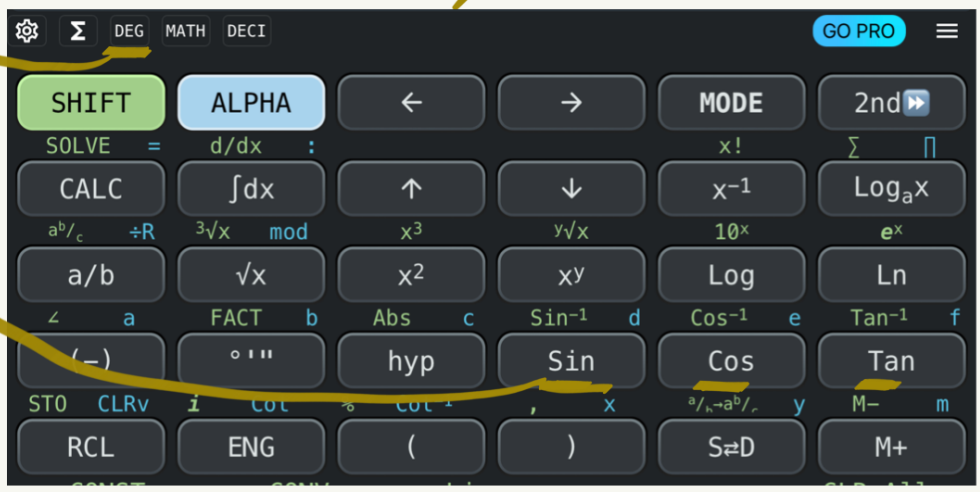
Cos ← جتا

Tan ← ظا

(١) تأكد أن النظام وحدات Deg

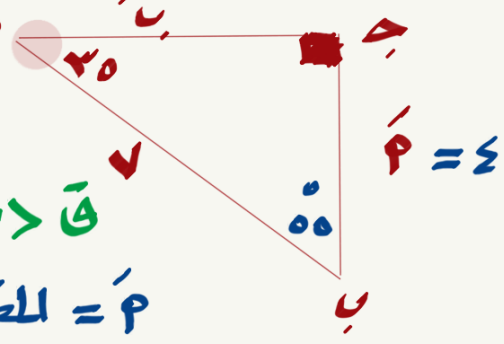
(٢) نضغط على Sin, Cos, Tan

(٣) الناتج بالأعلى.



* استعمال النسب المثلثية لحل المثلث ...

حل المثلث القائم الزاوية م ب جـ بأطول ضلع الى أقرب جزء من عشرة.



م = المقابل ، ب = المجاور ، ٧ = الوتر

$$\text{جا } ٣٥^\circ = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{م}{٧}$$

$$\frac{م}{٧} = \frac{٠,٥٧٣٦}{١}$$

$$م \approx ٤$$

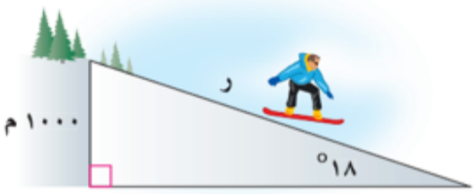
$$\text{جتا } ٣٥^\circ = \frac{ب}{٧}$$

$$\frac{ب}{٧} = \frac{٠,٨١٩٢}{١}$$

$$ب \approx ٥,٧$$

مسألة من واقع الحياة

تزلج على الجليد: في موقع للتزلج على أحد التلال، كان ارتفاع التلة الرأسي ١٠٠٠ م، وزاوية ميلها عن مستوى الأرض ١٨°، قدّر طول (ر).



ر ← الوتر ؟

١٠٠٠ ← المقابل

$$\text{جا } ١٨^\circ = \frac{١٠٠٠}{ر}$$

$$\frac{١٠٠٠}{ر} = \frac{٠,٣٠٩٠}{١}$$

$$ر \approx ٣٢٣٦,٢ \text{ م}$$

بالآله الحاسبه

(1) Shift

(2) نضغط ال
sin or cos or tan

(3) $\sin^{-1}$ (النتيجه) = الزاويه

معكوس الدوال المثلثيه

معكوس جيب الزاويه جا

$$\text{جا}^{-1}(\text{جا}\ \theta) = \theta$$

$$\text{جا}\ \theta = \text{م} \leftarrow \theta = \text{جا}^{-1}\ \text{م}$$

معكوس جيب تمام الزاويه جتا

$$\text{جتا}^{-1}(\text{جتا}\ \theta) = \theta$$

$$\text{جتا}\ \theta = \text{م} \leftarrow \theta = \text{جتا}^{-1}\ \text{م}$$

معكوس ظل الزاويه ظا

$$\text{ظا}^{-1}(\text{ظا}\ \theta) = \theta$$

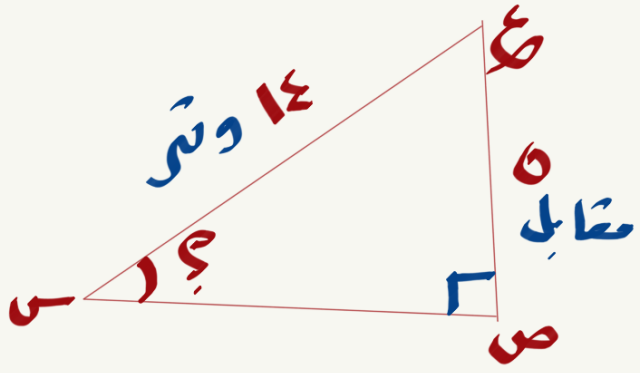
$$\text{ظا}\ \theta = \text{م} \leftarrow \theta = \text{ظا}^{-1}\ \text{م}$$

مثال /
ارجد ق∠س ، س ع = ١٤ ، ص ع = ٥

$$\text{جا}\ \theta = \frac{٥}{١٤}$$

$$\text{س} = \text{جا}^{-1}\left(\frac{٥}{١٤}\right)$$

$$\text{س} \approx ٢١^\circ$$

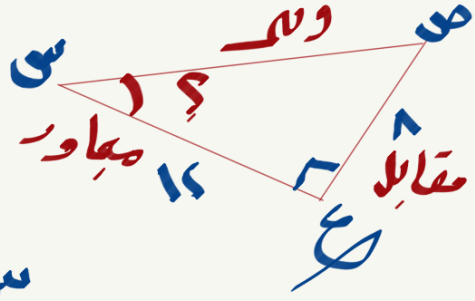


مثال /

$$\text{ظا}\ \theta = \frac{٨}{١٢}$$

$$\text{ظا}\ \theta = \frac{٤}{٣}$$

$$\text{س} = \text{ظا}^{-1}\left(\frac{٤}{٣}\right) ،\ \text{س} \approx ٣٤^\circ$$



مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إتاحة - توثيق

تصميم دراسة مسحية

العينة ← جزء من مجموعة أكبر تسمى **المجتمع**
كلما كان حجم العينة أكبر كلما كانت النتائج أكثر تمثيلاً **للمجتمع**.

أساليب جمع البيانات

(١) **الدراسة المسحية**
← جمع أراء ← استطلاع ← مسح ← استبانه ← سؤال مباشر

(٢) **الدراسة القائمة على الملاحظة**
← ملاحظة دون تدخل مباشر.
← مراقبة دون معلومات.
← لا يخضعون لأي تجربة.
← دراسة أثر شيء معين خلال سنوات سابقة.

(٣) **الدراسة القائمة على التجربة**
← تجربة ← تعديل مباشر ← طالبة مقصودة

أمثلة

ترغب جمعية حيوية في تقرير رغبة الناس في تقديم البرعان للحيوانات الحيوية فوزعت ١٠٠٠ استبانه على سكان أحد الأحياء.

العينة ← ١٠٠٠ من سكان الحي ← دراسة مسحية
المجتمع ← أحد الأحياء

قامت مؤسسة للبحوث العلمية بتحليل ردود أفعال مجموعتين من العمال إن نجاة السكر.

تجربة ← دراسة
قائمة على التجربة

العينة ← من إن مؤسسة البحوث العلمية
المجتمع ← جميع العمال

يريد الطالبون على اداء محلية المدرسة اختيار عينة لغلاظ من بين خمسة تصاميم. لذا حدد اختيار عشرة من طلاب المدرسة عشوائياً للاستطلاع من بين هذه التصاميم.

لا يوجد اي استبانة ولا تجربة فقط دوره الملاحظة دون التدخل المباشر

دراسة قائمة على الملاحظة.

العينة ← عشرة من طلاب المدرسة.
المجتمع ← طلاب المدرسة.

يريد مدير نادي رياضي أن يعرف سعراً للنادي فسأل ١٠٠ شخص من مشجعي النادي اختيروا عشوائياً من أرائهم.

← دراسة مسحية

العينة ← ١٠٠ شخص من مشجعي النادي.
المجتمع ← مشجعي النادي.

انواع العينات من حيث التحيز

عينة متحيزة (مكان محدد)

غير عشوائية غير متحيزة (مكان عام)

أمثلة / (١) سُئل كل خامس شخص يدخل الي مكتبة عن الصفات الشخصية التي يفضلها.

غير متحيزة (عشوائية) لانه كل خامس شخص يدخل صفات تختلف عن الأخر.

(٢) سُئل كل خامس شخص يدخل مكتبة عن هواياته المفضلة.

عينة متحيزة.

(٣) سُئل كل عاشر طالب يدخل المدرسة عن المادة الدراسية المفضلة لديه.

عينة غير متحيزة ← كل طالب له مادة دراسية يفضلها تختلف عن الأخر.

(٤) يريد مدير مطعم أن يتحقق من أن العاملين يقومون الزبائن بأسلوب جيد ، فراقب أحد العاملين مدة ساعة في اليوم.

عينة متحيزة.

العينات العشوائية

عشوائية بسيطة

كل شخص له نفس فرصة الاختيار ولا يوجد مزايا تقسيم الى مجموعات ولا تنظيم حسب فئة رئيسية ...

عشوائية طبقية

يتم تقسيمها الى مجموعات او الى فئات او الى اقسام ثم اختيار من كل مجموعة عينة عشوائية بسيطة.

عشوائية منتظمة

يتم اختيار شخص محدد من العناصر او تبعاً لفترة رئيسية محددة.

امثلة:

(1) وزعت الحيوانات في احدى حدائق الى مجموعات تبعاً لموطنها ثم اختير زوج من كل مجموعة بصورة عشوائية لفحص دمه.

العينة ← ازواج الحيوانات التي تم اختيارها من كل مجموعة.

المجتمع ← حيوانات الحديقة

العينة العشوائية ← طبقية لانه تم تقسيم الحيوانات الى مجموعات

(٢) يفحص المدير في أحد المطاعم جودة الفطائر كل ٢٠ بدءًا بوقتٍ نُحدد عشوائيًا.

الصيغة ← الفطائر التي يتم فحصها.

المجمع ← جميع الفطائر المعدة في المطعم.

الصيغة العشوائية ← منتظمة لأن الفحص يكون في حالات رصيد محدد

---

(٣) تلصق نجمة في أحد الاحتمالات أسفل الأقلام الطباق، وتقدم هدايا للضيوف الذين يكون هذه الأطباق من ذهبهم.

الصيغة ← الأطباق التي تحمل الملصقات.

المجمع ← جميع الأطباق.

الصيغة العشوائية ← بسيطة لأن كل شخص له نفس الفرصة بأن يكون الملصق على طبقه.

تحليل نتائج الدراسات الوصفية

البيانات

كمية
تُعطى بصورة قيم عددية
مثل كتلة الجسم
وتحتاج الاختبار
تستطيع تحليلها
لاحتوائها على أرقام
مثل
اسم المؤلف أو الحيوان
أسماء معلقة

نوعية
لا تأخذ قيم
عددية مثل
الجنسية وإعراب
الألفاظ
لا تستطيع تحليلها
لاحتوائها على أرقام

مقاييس النزعة المركزية :

(١) المتوسط
مجموع القيم
على عددها

(٢) الوسيط
القيمة التي توسط
البيانات بعد ترتيبها
تصاعدياً أو تنازلياً

(٣) المنوال
القيمة الأكثر
شيوعاً
أو تكراراً

حارة سابقة :

أوجد المتوسط والوسيط والمنوال لدرجات الأخيلة لـ ١٠
طلاب في مادة الرياضيات
٧، ٩، ٩، ١٠، ٨، ٥، ١٠، ٩، ٩، ١٠

المتوسط = $\frac{٨٦}{١٠}$ = ٨,٦ ، الوسيط هو ٩
المنوال هو ٩

متى يفضل استعمال !!!

المتوسط الحسابي

عندما تكون القيم متقاربة ، ولا يحتوي على قيم متطرفة

الوسيط

عندما توجد قيم متطرفة ، ولا يحتوي على فجوة كبيرة في البيانات .

المنوال

عندما يوجد قيم تكرر كثيراً .

مثلاً / أيّ مقاييس النزعة المركزية هو الأنسب /

أ) **تسوُّق:** سجَّل أحد محال بيع الأجهزة الإلكترونية عدد الزبائن في كل ساعة عمل في أحد الأيام كما هو موضح في الجدول المجاور.

عدد الزبائن			
٨٦	٧٢	٧٩	٨٦
٧٩	٣٢	٨٨	٨٦
٨٢	٦٩	٧١	٧٠
٨٦	٨١	٨٥	٨٨

البيانات تحتوي قيمة متطرفة هي ٣٢
وبالتالي لا يفضل استعمال المتوسط

٣٢ ، ٦٩ ، ٧٠ ، ٧١ ، ٧١ ، ٧٢ ، ٧٩ ، ٧٩ ، ٨ ، ٨١ ، ٨٢ ، ٨٥ ، ٨٦ ، ٨٦ ، ٨٦ ، ٨٦ ، ٨٨ ، ٨٨

لا توجد فجوة في تنظيم البيانات وبالتالي لا نفضل استعمال الوسيط

∴ المقياس الأفضل هو المنوال لوجود قيم متكررة = ٨٦

سياحة: تريد إحدى وكالات السياحة التي تعمل عبر الإنترنت أن تنظم رحلات للعائلات، فأجرت مسحًا حول المكان المفضل لها لقضاء الإجازة. وقد كانت الأماكن الخمسة الأولى هي: الشواطئ ٢٥٪؛ المتنزهات ٢٢٪؛ البر ٢١٪؛ المواقع الأثرية التاريخية ١٧٪؛ الجبال ١٥٪.

لا يمكن ايجاد مقاييس النزعة المركزية لهذه العبارة عن نسب مئوية ...

تقويم نتائج الدراسة المسحية

كتاب الجامعة السنوي: إذا أُعطيت الجزء الآتي من تقرير دراسة مسحية، فحدّد صحة المعلومات والاستنتاجات.

السؤال: هل يجب أن تعدّ الجامعة كتابها السنوي إلكترونيًّا هذا العام؟

العينة: وضعت استبانات على مقاعد الطلاب بصورة عشوائية.

الاستنتاج: يجب أن تعدّ الجامعة هذا العام الكتاب السنوي إلكترونيًّا فقط.

النتائج	
الاختيار	الاستجابة
إلكترونيًّا فقط	٦٧٪
ورقيًّا فقط	٢٢٪
إلكترونيًّا وورقيًّا	٩٪
لا تفضيل	٢٪

الدراسة غير صحيحة لم يذكر العينة التي تم دراستها وايضاً النتائج اعطيت بصورة نسب مئوية

تحقق من فهمك

٢) **مدينة ألعاب:** طلب من كل عاشر زائر من بين ٥٠٠٠ زائر لمدينة ألعاب في أحد الأيام أن يجيب عن سؤال الاستبانة الآتي:

السؤال: هل ترى أن أسعار بطاقات الدخول لمدينة الألعاب معقولة؟

الاستنتاج: أسعار التذاكر معقولة، ويجب أن تبقى كما هي.

النتائج	
الاختيار	الاستجابة
معقولة جدًّا	٥٦
معقولة	١٨٥
معقولة نوعًا ما	١٣٢
غير معقولة	٦٩
غير معقولة أبدًا	٥٨

العينة متحيزة ولذا الاستنتاج غير صحيح .

رياضة: استطلعت إدارة التعليم في إحدى المناطق آراء ٣٥٨٥ طالبًا عن رياضتهم المفضلة.

السؤال: ما الرياضة التي تفضل المشاركة فيها؟

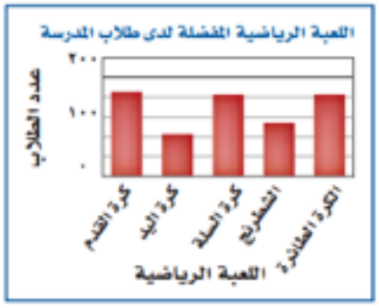
النتائج: كرة الطائرة ٢٧١، كرة القدم ٥٧٠، كرة السلة ٤٣٦، التايكوندو ٢٧٩، المصارعة ١٩٧، جري التتابع ٢٠٩، السباحة ٣١٩، الجمباز ١٩٧، كرة اليد ٢٨٩، التنس ٢٠٢، رياضات أخرى ٦١٦.

الاستنتاج: كرة القدم هي الرياضة التي يفضل الطلاب المشاركة فيها.

لديوجد تحيز ويبدو ان المصدر موثوق والبيانات تؤيد الاستنتاج اذن الدراسة المسحية والاستنتاج صحيحان.

نتائج مضللة

٣) يوضح التمثيل بالأعمدة المجاور نتائج استطلاع أجراه مدرس التربية الرياضية لمعرفة اللعبة الرياضية التي يفضلها طلاب المدرسة.



السؤال: ما اللعبة الرياضية التي تفضلها؟

الاستنتاج: كرة اليد هي اللعبة الأقل شيوعًا بين الألعاب الرياضية المفضلة.

حدّد ما إذا كان التمثيل بالأعمدة يقدم صورة صادقة أم لا لنتائج الدراسة المسحية. وفسّر إجابتك.

هنا نوجد عيب لوجود الاخطاء على الرسم البياني الصحيح والاستنتاج صحيحان.

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

احصائيات العينة وحالم المجتمع

معلمة المجتمع ← مقياس يصف المجتمع

احصائي العينة ← مقياس يصف العينة

← متوسط
← وسيط
← منوال
← نسبة مئوية

١) **أغذية:** يتم اختيار عبوة عشوائيًّا من خط إنتاج أحد الأغذية المحفوظة، ثم يُؤخذ بدءًا من تلك العبوة، العبوات التي أرقامها من مضاعفات ٥٠، وتُدَوّن كتلتها ويُحسب المنوال لعينة كتل الإنتاجِ اليومي.

العينة العبوات التي تؤخذ عند خط الانتاج يتم وزنها.

المجتمع العبوات التي ينتجها المصنع

احصائي العينة منوال العبوات التي تؤخذ عند خط الانتاج ويتم وزنها

معلمة المجتمع منوال العبوات التي ينتجها المصنع

٢) **تعليم:** اختيرت عينة عشوائية من ١٠٠٣ طلاب من الصف الثالث الثانوي في المدارس الثانوية في جدة، وسُئلوا إن كانوا راغبين في دراسة الهندسة بالجامعة، ثم حُسبت النسبة المئوية للذين كانت إجاباتهم "نعم".

العينة ١٠٠٣ طالب من طلاب الصف الثالث ثانوي في مدارس جدة

المجتمع جميع طلاب الصف الثالث ثانوي في مدارس جدة.

احصائي العينة النسبة المئوية للطلاب الراغبين في دراسة الهندسة من طلاب العينة.

معلمة المجتمع النسبة المئوية للطلاب الراغبين في دراسة الهندسة من جميع الطلاب

* ايجاد الانحراف المتوسط /

$$\frac{\sum |س - س̄|}{ن}$$

س ← القيم

س̄ ← المتوسط الحسابي

ن ← عدد البيانات .

تسويق: رصد موزِّع عدد صناديق العصير اليومية التي بيعت فكانت: ١٢، ٣٢، ٣٦، ٤١، ٢٢، ٤٧، ٥١، ٣٣، ٣٧، ٤٩ . أوجد الانحراف المتوسط لهذه البيانات.

$$س̄ = \frac{١٢+٣٢+٣٦+٤١+٢٢+٤٧+٥١+٣٣+٣٧+٤٩}{١٠}$$

$$= \frac{٣٦٠}{١٠} = ٣٦$$

$$\text{الانحراف المتوسط} = \frac{|١٢-٣٦|+|٣٢-٣٦|+|٣٦-٣٦|+|٤١-٣٦|+|٢٢-٣٦|+|٤٧-٣٦|+|٥١-٣٦|+|٣٣-٣٦|+|٣٧-٣٦|+|٤٩-٣٦|}{١٠}$$

$$= \frac{|-٢٤|+|-٤|+|٠|+|٥|+|-١٤|+|١١|+|١٥|+|-٣|+|١|+|١٣|}{١٠}$$

$$= ٩$$

* الانحراف المعياري /

هو مقياس يصف مدى تباعد البيانات عن وسطها الحسابي ، رمزه ع

$$ع = \sqrt{\frac{\sum (س - س̄)^٢}{ن}}$$

س ← القيم

س̄ ← المتوسط الحسابي

ن ← عدد البيانات

ملاحظة هامة / الانحراف المعياري = ع

التباين = (الانحراف المعياري)^٢ = ع^٢

مثال / احسب المتوسط الحسابي والانحراف المعياري والتباين (١) (٢) (٣)
مصريا لأحد الجري من سيارة .

٦ ، ١٠ ، ١١ ، ١٥ ، ٨

ن = ٥

(١) س = ٥٠ / ٥ = ١٠

(٢) ع٢ = [(-٤)٢ + (٠)٢ + (١)٢ + (٥)٢ + (-٢)٢] / ٥

ع٢ = [١٦ + ٠ + ١ + ٢٥ + ٤] / ٥ = ٤٦ / ٥ = ٩,٢

(٣) ع = √٩,٢ ≈ ٣

يمكن تفسير مدى انتشار البيانات من خلال الانحراف المعياري. فعلى سبيل المثال، إذا كان المتوسط الحسابي ٧٥، والانحراف المعياري ٣، فإن معظم قيم البيانات قريبة جدًّا من المتوسط الحسابي، أما إذا كان المتوسط الحسابي ٧٥، والانحراف المعياري ١٥، فإن هذه البيانات متباعدة ومنتشرة على مدى أوسع، وقد يكون من بينها قيم متطرفة.

مثال من واقع الحياة ...

رصد خالد استهلاكه من السعرات خلال أسبوع آخر فكان:

١٩٥٠، ٢٠٠٠، ٢١٠٠، ٢٠٠٠، ١٩٠٠، ٢١٠٠، ٢٠٠٠

جد الانحراف المعياري لاستهلاكه من السعرات في هذا الأسبوع. ٦٧,٨ تقر

س = ١٤٠٥٠ / ٧ ≈ ٢٠٠٧

ع٢ = [(-٥٧)٢ + (-٧)٢ + (٩٣)٢ + (-١٠٧)٢ + (-٧)٢ + (٩٣)٢ + (-٧)٢] / ٧

ع٢ = ٣٢١٤٣ / ٧ ≈ ٤٦٠٢ ، ع ≈ ٦٧,٨ تقريباً

التباديل والتوافيق

المضروب !

ن! = ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣) × ... × ٣ × ٢ × ١ ، ن ≥ ١ ، ٠! = ١

٥! = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ١٢٠

١٣! = ١٣ × ١٢ × ١١ × ... × ٣ × ٢ × ١

من المضروب ٣ عوامل فقط ← طريقة التنظيم

ستة طرق

الصفر! = ١ ، ١! = ١ ، ٢! = ٢

تحقق (١)

محاضرات: دخل ناصر وخمسة من أصدقائه قاعة محاضرات. فبكم طريقة مختلفة يمكنهم أن يجلسوا جميعًا على ٦ مقاعد خالية في صفٍّ واحدٍ؟

٥! = ١٢٠

تحكم (١)

جوائز: يريد أحد المراكز التجارية أن يعرض صور جوائزه الستِّ التي يوزِّعها على الزبائن على لوحة. بكم طريقة يمكن تنظيم الجوائز في صفٍّ واحدٍ؟

٦! = ٧٢٠

مدرسة العكرة يحل حل تدرب ٨ ص ٢١

التباديل ← تنظيم العناصر بحيث يكون الترتيب مهماً .

عدد العناصر ن والمأخوذة ر عشراً في كل مرة

الكل ← $ن$ ، الجزء ← $ر$

$$ل^{ن}_{ر} = \frac{ن!}{(ن-ر)!}$$

مثال $ل^{٣}_{٣} = \frac{٣!}{(٣-٣)!} = \frac{٦}{١} = ٦$ ، بالحصر $ل^{٣}_{٣} = ٣ \times ٢ = ٦$

الكل (٧) $ل^{٧}_{٣} = ٧ \times ٦ = ٤٢$

الكل (٩) $ل^{٩}_{٣} = ٩ \times ٨ \times ٧ = ٥٠٤$

تدريب (١٠) $ل^{٦}_{٦} = ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٧٢٠$

(١١) $ل^{٥}_{٥} = ٥$

تحقق !

٢) **لوحات:** رسم فنان ١٥ لوحة فنية. فبكم طريقة يمكنه اختيار ١٠ لوحات منها لعرضها في معرض فني.

← نشاط حر

$$ل^{١٥}_{١٠} = ١٠٨٩٧٢٨٦٤٠٠$$

تدرب

١٨) **مجوهرات:** يعمل قاسم في محل لبيع المجوهرات. وقد طلب منه مديره أن يضع ثلاثًا من القلائد الاثنتي عشرة في خزانة العرض الأمامية. فبكم طريقة يمكن أن يرتب قاسم القلائد في خزانة العرض؟

$ل^{١٢}_{٣} = ١٢ \times ١١ \times ١٠ = ١٣٢٠$ طريقة

التوافيق / عدد طرق التشكيل لمجموعة من العناصر بحيث يكون الترتيب غير مهماً /

$ن ق_ر$ (عدد التوافيق لعناصر عددها ن الموجودة ر منها)

$$ن ق_ر = \frac{ن!}{ر! (ن - ر)!}$$

مثال

$$٥ ق_٢ = \frac{٥!}{٣! \times ٢!} = \frac{١٢٠}{٦ \times ٢} = \frac{٢٤}{٢} = ١٠$$

احتصاراً للحل

$$٥ ق_٣ = \frac{٤ \times ٥}{٢} = ١٠$$

تأكد (٤) ص ٢٩

$$٦ ق_٤ = \frac{٣ \times ٤ \times ٥ \times ٦}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤} = \frac{٣٠}{٢} = ١٥$$

$$٥ ق_٢ = \frac{٤ \times ٥}{١ \times ٢} = ١٠$$

ص ٣٠

مثال ٣ من واقع الحياة التوافيق

أعمال منزلية: تطلب أم إلى أبنائها الخمسة القيام ببعض الأعمال المنزلية كل أسبوع. بكم طريقة يمكن اختيار اثنين منهم لتنظيف ساحة المنزل؟

بما أن الترتيب في عملية الاختيار ليس مهمًّا، فيجب أن نجد عدد توافيق ٥ أبناء، اختير اثنان منهم كل مرة.

$$٥ ق_٢ = \frac{٤ \times ٥}{١ \times ٢} = ١٠ \text{ طرق}$$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

٣) **اختبار:** تقدّم سعيد لاختبار في ٢٠١٨، طلب فيه الإجابة عن ١٠ أسئلة من بين ١٢ سؤالًا. بكم طريقة يمكن أن يختار الأسئلة؟ ٦٦

التَرتيب غير مهم

$$ق^{١٢}_{١٠} = \frac{٣ \times ٤ \times ٥ \times ٦ \times ٧ \times ٨ \times ٩ \times ١٠ \times ١١ \times ١٢}{٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥ \times ٦ \times ٧ \times ٨ \times ٩ \times ١٠} = ٦٦$$

٢٠١٨

تحقق من فهمك

٤) **كتب:** أراد أربعة طلاب أن يختاروا كتبًا يقرؤونها من بين ١٨ كتابًا مختلفًا، تتكون من ٤ روايات، و٦ كتب علمية ، و٨ كتب إسلامية. بكم طريقة يمكنهم اختيار الكتب الأربعة؟

$$ق^{١٨}_{٤} = \frac{١٥ \times ١٦ \times ١٧ \times ١٨}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤} = ٣٠٦$$

مثال ٥ من واقع الحياة — **إيجاد الاحتمال باستعمال التباديل**

دراجات: يتطلب فتح قفل يعمل بالأرقام رمزًا مكوّنًا من ثلاثة أرقام من بين الأرقام صفر إلى ٩ على ألّا يُستعمل العدد الواحد أكثر من مرة واحدة.

تباديل

(١) ما عدد التباديل المختلفة الممكنة؟

$$ل^{١٠}_{٣} = ١٠ \times ٩ \times ٨ = ٧٢٠$$ ← الكل

(٢) ما احتمال ألا تكون جميع أرقام الرمز فردية؟

الفردية (١، ٣، ٥، ٧، ٩)

$$ل^{٥}_{٣} = ٥ \times ٤ \times ٣ = ٦٠$$

$$ح(\text{فردية}) = \frac{٦٠}{٧٢٠} = \frac{٦}{٧٢} = \frac{١}{١٢}$$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تحقق من فهمك

٥) **شركات:** يريد أعضاء مجلس إدارة شركة أن يختاروا رئيسًا ونائبًا للرئيس وأمينًا للسر وأمينًا للصندوق. وكان فهد وسطام من بين تسعة مرشحين لهذه المراكز.

أ) بكم طريقة يمكن لأعضاء مجلس الإدارة اختيار الأعضاء الذين يشغلون هذه المراكز؟

$ل^9_4 = 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$

ب) ما احتمال أن يختار فهد وسطام مركز الرئيس أو نائب الرئيس؟

(١) سطام وفهد من ضمن المجموعة $ل^9_2 = 72$

(٢) // // ليس من ضمن المجموعة $ل^7_2 = 42$

(٣) $72 - 42 = 30$

(٤) $ح = \frac{30}{72} = \frac{5}{12}$

حدّد هل يتضمن كل موقف من المواقف الآتية تباديل أم توافيق:

٢١) اختيار ٣ أنواع مختلفة من الفطائر من قائمة تحتوي على ١٢ نوعًا. توافيق

٢٢) اختيار الفائزين بالمراكز الثلاثة الأولى في مسابقة ثقافية. تباديل

٢٣) اختيار ٥ كتب لقراءتها من بين ٨ كتب على رفٍّ. توافيق

٢٤) ترتيب حروف كلمة «سعودي». تباديل

احتمالات الحوادث المركبة

الحوادث المركبة

قانون الضرب في الاحتمالات
ح (أ ∩ ب) = ح (أ) × ح (ب / أ)

- **مستقلة**: ح (أ ∩ ب) = ح (أ) × ح (ب) ← بإرجاع
- **غير مستقلة**: ح (أ ∩ ب) = ح (أ) × ح (ب / أ) ← بدون إرجاع

قانون الجمع في الاحتمالات
ح (أ ∪ ب)

- **متنافية**: لا توجد عناصر مشتركة ← ح (أ ∪ ب) = ح (أ) + ح (ب)
- **متنافية**: توجد عناصر مشتركة ← ح (أ ∪ ب) = ح (أ) + ح (ب) − ح (أ ∩ ب)

مثال (١) احتمال الحوادث المستقلة وغير المستقلة

كرات زجاجية: يحتوي كيس على ٦ كرات سوداء و ٩ زرقاء و ٤ صفراء وكرتين خضراوين. فإذا سُحبت منه كرة عشوائيًّا ثم أُعيدت وسُحِبت كرة ثانية، فأوجد احتمال سحب كرة سوداء ثم كرة صفراء.

بإرجاع

الكرة الأولى: ح(سوداء) $= \frac{\text{عدد الكرات السوداء}}{\text{عدد الكرات الكلي}} = \frac{٦}{٢١}$

الكرة الثانية: ح(صفراء) $= \frac{\text{عدد الكرات الصفراء}}{\text{عدد الكرات الكلي}} = \frac{٤}{٢١}$

احتمال الحوادث المستقلة: ح (سوداء وصفراء) = ح (سوداء) × ح (صفراء)

عوّض: $= \frac{٦}{٢١} \times \frac{٤}{٢١} = \frac{٢٤}{٤٤١}$

الاحتمال يساوي $\frac{٢٤}{٤٤١} = ٠,٠٥٤$ تقريبًا.

تحقق من فهمك ن = ٢١

أ) ح (زرقاء وخضراء) $= \frac{٩}{٢١} \times \frac{٢}{٢١} = \frac{١٨}{٤٤١} = \frac{٢}{٤٩}$

ب) ح (ليست سوداء و زرقاء) $= \frac{٩}{٢١} \times \frac{١٥}{٢١} = \frac{١٣٥}{٤٤١} = \frac{١٥}{٤٩}$

تمارين

١) **ألعاب الأطفال:** يحتوي صندوق ألعاب على ١٢ دمية و ٨ سيارات صغيرة و ٣ كرات. إذا اختارت أمينة اثنتين عشوائيًا من هذه الألعاب لأخيها الأصغر، فما احتمال أن تكون قد اختارت سيارتين صغيرتين؟

ن = ١٢ + ٨ + ٣ = ٢٣

الحوادث غير مستقلة (لم يذكر بإرجاع)

ح (ان تكون سيارتين صغيرتين)

ح (الاولى) × ح (الثانية بعد سحب الاولى)

$\frac{٨}{٢٣} \times \frac{٧}{٢٢} = \frac{٥٦}{٥٠٦} = \frac{٢٨}{٢٥٣}$

٢) **فواكه:** تحتوي سلة على ٦ تفاحات و ٥ موزات و ٤ برتقالات و ٥ درّاقات. إذا اختار ماجد حبة واحدة من الفاكهة عشوائيًا وأكلها ثم اختار حبة ثانية. فما احتمال أن يكون قد اختار موزة ثم تفاحة؟

بدون إرجاع

ن = ٦ + ٥ + ٤ + ٥ = ٢٠

الحوادث غير مستقلة (ليس بإرجاع)

ح (ثم)

ح ( ) = ح ( ) × ح ( )

$\frac{٣}{٣٨} = \frac{٦}{١٩} \times \frac{١}{٤} = \frac{٦}{١٩} \times \frac{٥}{٢٠}$

تدرب (٧) ١٢ ألعب دحلة نحو أربع حارات، ما احتمال ظهور الكتابة في الأربع حارات جميعها / حوادث مستقلة

ن = ٢ × ٢ × ٢ × ٢ = ١٦

ح (ظهور الكتابة في الأربع حارات) = $\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}$

$= \frac{١}{١٦}$

مجموعة رفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تأكد

٣) **كتب:** اختار حسن كتابًا من الرف المجاور عشوائيًّا، وأعاده ثم اختار كتابًا آخر. فما احتمال أن يكون قد اختار كتابين من كتب الرياضيات؟

حوادث مستقلة

ن = ١٧

ح (كتابين رياضيات)

$= \frac{٨}{١٧} \times \frac{٨}{١٧} = \frac{٦٤}{٢٨٩}$

تدرب (٨) رُميَ مكعب أرقام مرتين ، ما احتمال ظهور عددين مختلفين .

٦ × ٦ = ٣٦

ستكون (١،١) (١،٢) (٢،٢) (٣،٣) (٤،٤) (٥،٥) (٦،٦) × (٣٦ - ٦ = ٣٠)

ح (عددين مختلفين) $= \frac{٣٠}{٣٦} = \frac{٥}{٦}$

احتمال الحوادث المتنافية وغير المتنافية

مثال / اوجد كلًّا من الاحتمالات الآتية عند رمي مكعب أرقام .

(أ٣) ح (أقل من ٣)

١، ٢

لا توجد عناصر مشتركة

$= \frac{١}{٦} + \frac{١}{٦} = \frac{١}{٣} = ٣٣٪$

أو

$= \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣} = ٣٣٪$

(ب٣) ح (عدد زوجي)

٦، ٤، ٢

لا توجد عناصر مشتركة

$= \frac{١}{٦} + \frac{١}{٦} + \frac{١}{٦} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢} = ٥٠٪$

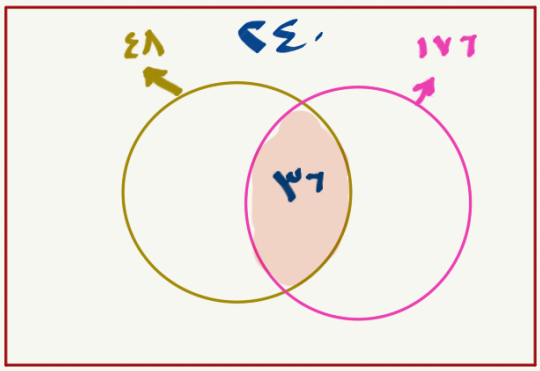
أو

$= \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢} = ٥٠٪$

مثال /

الطلاب الرياضيون: يوجد من بين ٢٤٠ طالبًا في مدرسة ما ١٧٦ طالبًا متفوقًا علميًّا و ٤٨ طالبًا متفوقًا رياضيًّا. وهناك ٣٦ طالبًا متفوقًا علميًّا ورياضيًّا. اختير طالب عشوائيًّا فما احتمال أن يكون متفوقًا علميًّا أو رياضيًّا ؟

بما أن بعض الطلاب متفوقون علميًّا ورياضيًّا فالحادثتان غير متنافيتين.



حوادث غير متنافية (عناصر مشتركة)

ح (أ أو ب) = ح(أ) + ح(ب) - ح (أ و ب)

(أ: علمي، ب: رياضي)

$= \frac{١٧٦}{٢٤٠} + \frac{٤٨}{٢٤٠} - \frac{٣٦}{٢٤٠}$

$= \frac{١٨٨}{٢٤٠} = \frac{٤٧}{٦٠}$

تحقق / عدد كل عناصر هذا الحال ظهور عدد فردي أو أولي.

عدد فردي (١، ٣، ٥، ٧)

عدد أولي (٢، ٣، ٥)

عناصر مشتركة (فردي و أولي) = ٣، ٥

ح (فردي أو أولي) = ح (فردي) + ح (أولي) - ح (فردي و أولي)

$= \frac{٤}{٦} - \frac{٣}{٦} + \frac{٣}{٦}$

$= \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣} = ٦٦,٧\%$

تأكد /

يحتوي صندوق على ٨ كرات حمراء و٨ سوداء و ٨ بيضاء و ٨ زرقاء، وقد رُقّمت كرات كل لون بالأرقام من ١ إلى ٨، فإذا سُحبت كرة واحدة عشوائيًّا من الصندوق. حدّد هل الحادثتان في كلٍّ ممّا يأتي متنافيتان أم غير متنافيتين، ثم أوجد الاحتمال:

٤) ح (٢ أو ٨)

٥) ح (حمراء أو زرقاء)

٦) ح (زوجي أو سوداء)

(٤) ح(٥ أو ٨) = ح(٥) + ح(٨) (متنافيتان)

= $\frac{٤}{٣٢} + \frac{٨}{٣٢} = \frac{٨}{٣٢} = \frac{١}{٤}$ = ٢٥٪

(٥) ح(حمراء أو زرقاء) = ح(حمراء) + ح(زرقاء) (متنافيتان)

= $\frac{٨}{٣٢} + \frac{٨}{٣٢} = \frac{١٦}{٣٢}$ = ٥٠٪

(٦) ح(زوجي أو سوداء) = ح(زوجي) + ح(سوداء) − ح(زوجي وسوداء)

(غير متنافيتان)

= $\frac{١٦}{٣٢} + \frac{٨}{٣٢} - \frac{٤}{٣٢}$

= $\frac{٢٠ \div ٤}{٣٢ \div ٤} = \frac{٥}{٨}$ = ٦٢,٥٪

بسم الله

اللهم احفظه علماً نافعاً ينتفع به

hassna kilany